$X, Y \in \mathcal{X}(M)$ in (11) and asking for the invariance of ∇ and R with respect to V. If $J = V$ (i.e. $V' = 0$), then ∇, T, R are reduced to the usual notions of linear connection, torsion and curvature tensors.

Proposition 7. *The following identity of Bianchi type for a V-connection ∇ is satisfied :*

$$\mathcal{P}R(X, Y)Z = \mathcal{P}T(X, V[Y, Z]) + \mathcal{P}\nabla_X(T(Y, Z)) \tag{12}$$

where $\mathcal{P}$ means circular permutation for the arguments X, Y and Z. A detailed study of the V-connection will be attempted in a following paper.

REFERENCES

1. Caddeo R. — *Connessioni parziali*, Rev. Roum. Math. pures et appl., T XXIV, No. 7, pp. 1027 — 1032.
2. Ianus S. — *Some almost product structures on manifolds with linear connection*, Kodai Math. Sem. Rep. 23 (1971) 3, pp. 305 — 310.
3. Ianus S., Popovici I. — *Gheorghe Vrănceanu — un precursor al geometriei diferențiale globale*, Analele Univ. București 1980 (va apare).
4. Kobayashi S., Nomizu K. — *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, 1963, 1969.
5. Schouten J. R. van Kampen — *Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie Nichtholonomer Gebilde*, Math. Ann. 103 (1930) p. 752 — 783.
6. Vrănceanu G. — *Les espaces non-holonomes et leurs applications mécaniques*, in „Memorial des sc. mathem", fasc. 76, Gauthier-Villars, Paris, 1936, pp. 1 — 70.

Received 18 11.1980

Faculty of Mathematics
University of Bucharest
Str. Academiei 14, Bucharest
R. S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din IAŞI
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 2

LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES COMPLEXES DE QUADRIQUES DANS L'ESPACE EQUIAFFINE A_3

PAR

DAVID RIMER

0. **Considérations générales.** En continuant et élargissant nos préoccupations des Notes [4]—[10], nous allons étudier, dans l'éspace équiaffine à trois dimensions A_3, les variétés à trois paramètres, engendrées par une quadrique (réelle ou vide, irréductible ou dégénérée.) Cette étude inclura donc 17 types de variétés, selon la classification des quadriques dans A_3[1]. Vu que chacune des variétés dépend de trois paramètres, nous les nommons *complexes de quadriques*, en analogie avec les complexes de droites [11].

Nous utiliserons plus fréquemment les indices $\alpha, \beta = \overline{0,3}$; $i, j, k = \overline{1, 2, 3}$; $m = 0, 2, 3$, de même que la convention d'Einstein des indices muets.

Les diverses considérations générales faites sur les complexes de quadriques dans P_3 [9], peuvent être adaptées facilement à notre étude, en remplaçant le groupe projectif G_{15} par le groupe équiaffine G_{11}, les repères $\{B_\alpha, V\}$ et $\{A_\alpha, U\}$ par $\{O ; i_k\}$, respectivement $\{M, I_j\}$ et en faisant : $\omega_\alpha^0 = 0$, $\omega_0^i = \omega^i$, avec les motivations données dans [4].

En notant par R respectivement r les rangs des formes quadratiques $H = a_{ij}\, x^i x^j + 2b_i\, x^i x^0 + c(x^0)^2$, $h = a_{ij} x^i x^j$, nous désignons ces complexes par $V(3 ; (R, r)\, A_3)$ ou, plus brièvement $V(R ; r)$, vu que le nombre 3 des paramètres principaux de la variété et l'espace A_3 sont les mêmes pour toutes les variétés ici considérées.

D'une manière analogue à celle de [9], pour chaque couple $(R ; r)$ fixé, nous étudions une seule variété que nous noterons $V_1(R ; r)$, l'étude d'autres vatiétés $V_p(R, r)$, $p = 2, 3, \ldots$ étant réservé pour une autre Note. Pour chaque complexe, nous allons déterminer le système complet d'invariants et le repère Frenet, à l'aide de la méthode du repère mobile de Cartan ; de même nous allons donner des interprétations géométriques aux éléments du repère Frenet.

1. **Complexes de quadriques à centre unique ou à droite de centres ou à plan de centres.** Par définition, nous considérons comme repères d'ordre zéro, les repères $R = \{M, I_k\}$, par rapport auxquels la quadrique générique a l'équation normale

$$Q = \varepsilon_i\, (x^i)^2 + \varepsilon_0 = 0, \tag{1.1}$$

où $\varepsilon_1 = 1$ et ε_m ont les valeurs données par le tableau

(1.2)

	$V(4;3)$	$V(3;3)$	$V(3;2)$	$V(2;2)$	$V(2;1)$	$V(1;1)$
ε_2	± 1	$+1$	± 1	± 1	0	0
ε_3	± 1	± 1	0	0	0	0
ε_0	± 1	0	± 1	0	± 1	0

De (1.1) et (1.2), on obtient immédiatement les conditions géométriques auxquelles satisfont les repères d'ordre zéro de chacun de ces 14 types de variétés.

Afin d'obtenir les pfaffiens principaux d'ordre zéro, nous écrivons la condition de fixité de la quadrique (1.1), où ε_m ont les valeurs correspondantes à $V(4;3)$ du tableau (1.2). Il résulte 8 pfaffiens principaux d'ordre zéro.

$$\omega_1^1;\ \varepsilon_2\omega_2^2;\ \omega_2^1+\varepsilon_2\omega_1^2;\ \omega_3^1+\varepsilon_3\omega_1^3;\ \varepsilon_2\omega_3^2+\varepsilon_3\omega_2^3;\ \omega^1;\ \varepsilon_2\omega^2;\ \varepsilon_3\,\omega^3. \tag{1.3}$$

Vu que dans (1.3), le coefficient ε_0 n'existe pas, (1.3) donne aussi les pfaffiens principaux des complexes $V_1(3;3)$. Les pfaffiens principaux d'ordre zéro des autres complexes mentionnés dans le tableau (1.2) sont obtenus de (1.3) en donnant à ε_2, ε_3 les valeurs particulières correspondantes.

1a) **Complexes de quadriques à centre unique : $V_1(4;3)$, $V_1(3;3)$.** Une des caractéristiques des complexes étudiés ici est qu'aucun de ces 8 pfaffiens principaux (1.3) n'est pas identique à zéro ce qui signifie — selon ce que nous avons montré dans [9], que l'image dans S_9, de chacun de ces complexes est contenue dans un espace ayant exactement 8 dimensions.

Supposons que l'on a $[\omega^1, \omega^2, \omega^3]\neq 0$, ce qui signifie qu'on a exclu de l'étude les complexes caractérisés par le fait que le centre de la quadrique irréductible génératrice de $V_1(4;3)$, respectivement le sommet du cône quadratique, générateur de $V_1(3;3)$ avec $\varepsilon_2=-\varepsilon_3=+1$, ou le point double, générateur de $V_1(3;3)$ avec $\varepsilon_2=\varepsilon_3=+1$ n'est pas fixe, ni ne décrit pas une courbe ou une surface. En notant : $\omega_1^1=\lambda_i\omega^i$, $\varepsilon_2\omega_2^2=\lambda_{3+i}\omega^i$, $\omega_2^1+\varepsilon_2\omega_1^2=\lambda_{6+i}\omega^i$, $\omega_3^1+\varepsilon_3\omega_1^3=\lambda_{9+i}\omega^i$, $\varepsilon_2\omega_3^2+\varepsilon_3\omega_2^3=\lambda_{12+i}\omega^i$ et en continuant à appliquer l'algorithme, nous obtenons 15 équations de la forme

$$\delta\lambda_s+f_{s1}(\lambda_1,\dots,\lambda_{15})\,\pi_1^2+f_{s2}(\lambda)\,\pi_1^3+f_{s3}(\lambda)\,\pi_2^3=0,\quad s=\overline{1,15}.$$

Afin de fixer les trois derniers paramètres secondaires, il faudrait donner des valeurs constantes (par ex. 0 ou 1) à trois de ces 15 paramètres λ. Ceci peut être réalisé, théoriquement, en 8. $C_{15}^3=3\,640$ manières. Mais il y a des combinations (par ex. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$), pour lesquelles on n'obtient pas $\pi_1^2=\pi_1^3=\pi_2^3=0$, c'est-à-dire que pour ces valeurs de λ on ne fixe pas les trois paramètres secondaires et donc, le repère. Chacune de ces combinations de valeurs de λ marque un cas d'exception. Remarquons de même qu'il serait avantageux de donner des valeurs à ces ternes de coefficients λ qui donnent $\pi_1^2=\pi_1^3=\pi_2^3=0$ sans aucune restriction, ou avec un minime de restrictions pour d'autres coefficients λ, tel qu'on pratique dans l'étude des courbes, des surfaces, des congruences ou des complexes de droites [11]. Mais, vu le nombre immense de situations possibles, une telle recherche

serait presque impossible (même avec la technique calculatrice moderne) et, autrement, sans utilité réelle.

Nous avons donné les valeurs : $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$; avec la restriction $\lambda_9(\lambda_{10}-1)-\lambda_7\lambda_{12}\neq 0$, nous avons obtenu $\pi_1^2=\pi_1^3=\pi_2^3=0$ et, donc, les trois pfaffiens principaux du Ier ordre ω_1^2, ω_1^3, ω_2^3. On a ainsi le repère Frenet pour chacun de ces 6 complexes étudiés. En notant : $k_i=\lambda_{3+i}$ $(i=\overline{1,12})$, où $k_6(k_7-1)-k_4k_9\neq 0$, et $\omega_1^2=k_{12+i}\omega^i$, $\omega_1^3=k_{15+i}\omega^i$, $\omega_2^3=k_{18+i}\omega^i$, on a donc : 3 invariants différentiels (ω^i), 12 invariants finis du Ier ordre $(k_1,\dots,k_{12})$ et 9 du IIème ordre $(k_{13},\dots,k_{21})$.

Maintenant on peut écrire les formules Frenet pour ces 6 complexes $V_1(4;3)$, $V_1(3;3)$:

$$\begin{aligned}
&dM=\omega^k I_k,\\
&dI_1=(\delta_1^3 I_1+k_{12+i}I_2+k_{15+i}I_3)\,\omega^i,\\
&dI_2=[(k_{3+i}-\varepsilon_2k_{12+i})\,I_1+\varepsilon_2k_iI_2+k_{18+i}I_3]\,\omega^i,\\
&dI_3=[(k_{6+i}-\varepsilon_3k_{15+i})\,I_1+(k_{9+i}-\varepsilon_2\varepsilon_3k_{18+i})\,I_2+\\
&\qquad\qquad+(-\delta_i^3-\varepsilon_2k_i)\,I_3]\,\omega^i;\quad k_6(k_7-1)-k_4k_9\neq 0,
\end{aligned}\tag{1.4}$$

δ_i^j étant le symbole de Kronecker. On écrit les conditions d'intégrabilité dont trois sont finies :

$$\begin{cases}
k_{17}-k_{19}-k_5k_{13}+k_4k_{14}=0,\\
k_{18}+\varepsilon_2k_1-k_6k_{13}+k_4k_{15}=0,\\
k_{21}+\varepsilon_2k_2-k_6k_{14}+k_5k_{15}=0.
\end{cases}\tag{1.5}$$

Il résulte que le nombre d'invariants finis indépendents se réduit à 18.

Pour plus de simplicité, nous maintenons les expressions de ω_i^j données par (1.4), mais, dans diverses applications il faudra tenir compte des relations (1.5).

Théorème 1.1. *Trois formes de Pfaff linéairement indépendentes de trois variables et 18 fonctions regulières indépendentes des mêmes variables, satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, déterminent à une transformation équiaffine près, un complexe d'ellipsoïdes réels, l'un d'ellipsoïdes vides, l'un de hyperboloïdes à une nappe, l'un de hyperboloïdes à deux nappes, l'un de cônes quadratiques et l'un de couples de points coïncidents.*

La démonstration est similaire à celle du théorème 3.1 de la Note [9]. La manière d'obtenir effectivement la variété est donnée dans [10]. Avec (1.4), on détermine dQ, où Q est donné par (1.1) avec (1.2). On obtient

$$dQ=-2T_i\omega^i \quad \text{où} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
T_i=\delta_i^3(x^1)^2+\varepsilon_2k_i(x^2)^2-(\varepsilon_2\varepsilon_3k_i-\delta_i^3\varepsilon_3)\,(x^3)^2+k_{3+i}x^1x^2+\\
+k_{6+i}x^1x^3+\varepsilon_2k_{9+i}x^2x^3+\delta_i^1x^1+\delta_i^2\varepsilon_2x^2+\delta_i^3\varepsilon_3x^3.
\end{aligned}\tag{1.6'}$$

Remarquons que les expressions de T_i (1.6') ne contiennent pas le coefficient ε_0, ce qui signifie qu'elles sont associées à tous les 6 complexes $V_1(4;3)$, $V_1(3,3)$.

L'origine M de chacun des repères Frenet coïncide avec le centre de la quadrique réelle irréductible, respectivement avec le sommet du cône ou au couple de points coïncidents. Il appartient, de même, à chacune des trois quadriques $(T_i=0)$, où T_i sont données par (1.6'). Les plans tangents aux quadriques $(T_i=0)$, au point M sont, respectivement, $x^i=0$. Leurs intersections, deux à deux, sont les axes MI_k du repère Frenet. Les complexes d'ellipsoïdes réels, respectivement vides, ont le même repère Frenet, vu que, l'équation de la quadrique générique a, dans les deux cas, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$ et donc, les quadriques associées $(T_i=0)$ sont les mêmes.

1b) **Complexes de quadriques à droite de centres : $V_1(3\ ;2)$ et $V_1(2\ ;2)$.** Les pfaffiens principaux d'ordre zéro, obtenus de (1.3) pour $\varepsilon_3=0$, sont :

$$\omega^1,\ \omega_1^1,\ \omega_3^1,\ \omega_2^1+\varepsilon_2\omega_1^2,\ \varepsilon_2\omega^2,\ \varepsilon_2\omega_2^2,\varepsilon_2\omega_3^2. \tag{1.7}$$

Dans l'hypothèse qu'aucun de ces 7 pfaffiens n'est pas identiquement nul, nous allons considérer $[\omega^1,\ \omega_1^1,\ \omega_3^1]\neq 0$. En notant : $\theta^1=\omega^1$, $\theta^2=\omega_1^1$, $\theta^3=\omega_3^1$ et $\omega_2^1+\varepsilon_2\omega_1^2=\lambda_i\theta^i$, $\varepsilon_2\omega^2=\lambda_{3+i}\ \theta^i$, $\varepsilon_2\omega_2^2=\lambda_{6+i}\ \theta^i$, $\varepsilon_2\omega_3^2=\lambda_{9+i}\ \theta^i$, après les calculs usuels, en faisant $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=0$, $\lambda_{10}=1$ et en supposant $\lambda_{12}\neq 0$, les quatres derniers paramètres sont fixés et l'on a le repère Frenet (du Ier ordre) de chacun de ces 5 complexes. En introduisant les invariants on a : $k_1=\lambda_2$, $k_{1+p}=\lambda_{4+p}$ $\overline{(p=1,5)}$, $k_7=\lambda_{11}$, $k_8=\lambda_{12}\neq 0$. $\omega^3=k_{8+i}\ \theta^i$, $\omega_1^2=k_{11+i}\ \theta^i$, $\omega_1^3=k_{14+i}\ \theta^i$, $\omega_2^3=k_{17+i}\ \theta^i$, on obtient 8 invariants finis du Ier ordre et 12, du IIeme ordre. Les formules Frenet sont :

$$\begin{aligned}
dM&=(\delta_i^1\ I_1+\varepsilon_2(\delta_i^2k_2+\delta_i^3k_3)\ I_2+k_{8+i}\ I_3)\ \theta^i,\\
dI_1&=(\delta_i^2\ I_1+k_{11+i}\ I_2+k_{14+i}\ I_3)\ \theta^i,\\
dI_2&=[(-\varepsilon_2k_{11+i}+\delta_i^2k_1)\ I_1+\varepsilon_2k_{3+i}\ I_2+k_{17+i}\ I_3]\ \theta^i,\\
dI_3&=[\delta_i^3I_1+\varepsilon_2(\delta_i^2+\delta_i^1k_7+\delta_i^3k_8)\ I_2+(-\delta_i^2-\varepsilon_2k_{3+i})\ I_3]\ \theta^i,\ k_8\neq 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Il n'y a pas des conditions d'intégrabilité finies.

Théorème 1.2. *Trois formes de Pfaff linéairement indépendentes de trois variables et 20 fonctions régulières des mêmes variables déterminent, à une transformation équiaffine près, un complexe de cylindres elliptiques (réels ou vides), l'un de cylindres hyperboliques, l'un de couples de plans sécants et l'un de couples de droites coïncidentes.*

Avec (1.8), on calcule dQ, où Q est donné par (1.1) avec $\varepsilon_3=0$, et l'on obtient

$$dQ=T_i\theta^i,\ \text{où} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases}
T_1=x^2(k_4x^2+x^3+\varepsilon_2k_{12}),\\
T_2=(x^1)^2+k_5(x^2)^2+k_1x^1x^2+k_7x^2x^3+x^1+\varepsilon_2k_{13}x^2,\\
T_3=k_6(x^2)^2+x^1x^3+k_8x^2x^3+\varepsilon_2k_{14}x^2.
\end{cases} \tag{1.9'}$$

Voici des interprétations pour les éléments du repère : MI_3 est l'axe du cylindre elliptique réel, $(\varepsilon_2=-\varepsilon_0=1)$, du couple de plans sécants $(\varepsilon_2=-1,\ \varepsilon_0=0)$; il est aussi la droite double $(\varepsilon_2=1\ ;\ \varepsilon_0=0)$ et une génératrice commune des quadriques $(T_2=0)$ et $(T_3=0)$. La quadrique $(T_1=0)$ est un couple de plans sécants, dont l'un est $x^3=0$. L'intersection de ce plan avec la quadrique $(T_3=0)$ est formée des droites MI_1 et MI_3, dont l'intersection est le point M, l'origine du rèpère. MI_2 est menée par le point M, telleque, avec MI_1 et MI_3 elle forme un trièdre ayant la même orientation que le trièdre fondamental de l'espace.

1c) **Complexes de quadriques à plan de centres : $V_1(2\ ;1)$ et $V_1(1\ ;1)$.** De (1.3), avec $\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$ il résulte quatre pfaffiens principaux d'ordre zéro

$$\omega_1^1,\ \omega_2^1,\ \omega_3^1,\ \omega^1. \tag{1.10}$$

Dans l'hypothèse qu'aucun d'eux n'est pas identiquement nul, supposons que l'on a $[\omega_1^1,\ \omega_2^1,\ \omega_3^1]\neq 0$. En notant : $\theta^1=\omega_1^1$, $\theta^2=\omega_2^1$, $\theta^3=\omega_3^1$ et $\omega^1=\lambda_i\theta^i$, on obtient, pour $\lambda_2=\lambda_3=0$, $\lambda_1=k_1$ (k_1 étant un invariant constant), les pfaffiens principaux du Ier ordre : $k_1\omega_1^2-\omega^2$, $k_1\omega_1^3-\omega^3$; en les notant par $\mu_i\theta^i$, respectivement $\mu_{3+i}\ \theta^i$, on obtient, pour $\mu_1=\mu_3=\mu_5=\mu_6=0$, $\mu_2=1$, avec $\mu_4\neq 0$, les pfaffiens principaux du IIeme ordre : ω_1^2, ω_1^3, ω_2^2, ω_2^3, ω_3^2. En notant : $k_2=\mu_4\neq 0$ et $\omega_1^2=k_{2+i}\ \theta^i$, $\omega_1^3=k_{5+i}\ \theta^i$, $\omega_2^2=k_{8+i}\ \theta^i$, $\omega_2^3=k_{11+i}\theta^i$, $\omega_3^2=k_{14+i}\ \theta^i$, on a 17 invariants finis et le repère Frenet (du IIeme ordre). Les formules Frenet sont

$$\begin{aligned}
dM&=[\delta_i^1k_1I_1+(k_1k_{2+i}-\delta_i^2)\ I_2+(k_1k_{5+i}-\delta_i^1k_2)\ I_3]\ \theta^i,\\
dI_1&=(\delta_i^1I_1+k_{2+i}\ I_2+k_{5+i}\ I_3)\ \theta^i,\\
dI_2&=(\delta_i^2I_1+k_{8+i}\ I_2+k_{11+i}\ I_3)\ \theta^i,\\
dI_3&=[\delta_i^3I_1+k_{14+i}\ I_2+(-\delta_i^1-k_{8+i})\ I_3]\ \theta^i.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Aucune des conditions d'intégrabilité n'est pas finie.

Théorème 1.3. *Trois formes de Pfaff linéairement indépendentes de trois variables et 17 fonctions régulières des mêmes variables, déterminent, à une transformation équiaffine près, un complexe de couples de plans strictement parallèles (réels ou vides) et un couple de plans coïncidents.*

Avec (1.11), on calcule $dQ(\varepsilon_2=\varepsilon_3=0)$ et l'on obtient

$$dQ=T_i\ \theta^i,\ \text{où} \tag{1.12}$$

$$T_1=x^1(x^1+k_1),\ T_2=x^1x^2,\ T_3=x^1x^3. \tag{1.12'}$$

Les quadriques $(T_2=0)$ et $(T_3=0)$ sont deux couples de plans sécants, dont les axes sont MI_3, respectivement MI_2. Leur intersection est l'origine M du repère. L'intersection du plan $x^2=0$ (de la quadrique $T_2=0$) avec le plan $x^3=0$ (de la quadrique $T_3=0$) est l'axe MI_1.

2. Complexes de quadriques sans centre ou sans droite de centres : V_1 (4,2) et V_1 (2 ; 1). 2a) **Complexes de paraboloïdes** V_1 (4 ; 2). Par définition seront considérés comme repères d'ordre zéro les repères par rapport auxquels le paraboloïde générique a l'équation

$$Q=(x^1)^2+\varepsilon_2(x^2)^2-2x^3=0. \tag{2.1}$$

Avec les conditions de fixité d'un point dans I_3, $\delta Q=0$ donne 8 pfaffiens principaux d'ordre zéro :

$$\omega_1^1\ ;\ \varepsilon_2\omega_2^2\ ;\ \omega_2^1+\varepsilon_2\omega_1^2\ ;\ \omega_3^1\ ;\ \varepsilon_2\omega_3^2\ ;\ \omega^1-\omega_1^3\ ;\ \varepsilon_2\omega^2-\omega_2^3\ ;\ \omega^3. \tag{2.2}$$

Dans l'hypothèse qu'aucun d'eux n'est pas identiquement zéro, considérons $[\omega_1^1,\ \omega_2^2,\ \omega^3]\neq 0$. En notant :

$$\theta^1=\omega^3,\ \theta^2=\omega_1^1,\ \theta^3=\omega_2^2,\ \omega_3^1=\lambda_i\theta^i,\ \varepsilon_2\omega_3^2=\lambda_{3+i}\theta^i,$$

$$\omega_2^1+\varepsilon_2\omega_1^2=\lambda_{6+i}\theta^i,\ \omega^1-\omega_1^3=\lambda_{9+i}\theta^i,\ \varepsilon_2\omega^2-\omega_2^3=\lambda_{12+i}\theta^i,$$

après la différentiation extérieure, on obtient, (pour $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0$ et $\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_{11}\neq 0$), les trois pfaffiens principaux du Ier ordre : ω^1, ω^2, ω_1^2. Notons : $k_1=\lambda_3\neq 0$, $k_2=\lambda_4\neq 0$, $k_{2+s}=\lambda_{5+s}$ $(s=\overline{1,10})$, $(k_5k_8\neq 0)$, $\omega^1=k_{12+i}\theta^i$, $\omega^2=k_{15+i}\theta^i$, $\omega_1^2=k_{18+i}\theta^i$. Il a resulté 12 invariants finis du Ier ordre et 9 du IIème ordre. Les formules Frenet sont :

$$\begin{cases} dM=(k_{12+i}I_1+k_{15+i}I_2+\delta_i^1 I_3)\,\theta^i, \\ dI_1=[\delta_i^2 I_1+k_{18+i}I_2+(k_{12+i}-k_{6+i})I_3]\,\theta^i, \\ dI_2=[(k_{3+i}-\varepsilon_2k_{18+i})I_1+\delta_i^3 I_2+(\varepsilon_2k_{15+i}-k_{9+i})I_3]\,\theta^i, \\ dI_3=[\delta_i^3k_1I_1+\varepsilon_2(\delta_i^1+\delta_i^2)k_{1+i}I_2-(\delta_i^2+\delta_i^3)I_3]\,\theta^i,\ (k_1k_2k_5k_8\neq 0). \end{cases} \tag{2.3}$$

Aucune des conditions d'intégrabilité n'est pas finie.

Théorème 2.1. *Trois formes de Pfaff linéairement indépendentes et 21 fonctions regulières des mêmes variables, déterminent, à une transformation équiaffine près, un complexe de paraboloïdes elliptiques et l'un de paraboloïdes hyperboliques.*

On calcule dQ(Q donné par (2.1)) et l'on obtient

$$dQ=T_i\theta^i,\ \text{où} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} T_i=\delta_i^2(x^1)^2+\delta_i^3\varepsilon_2(x^2)^2+k_{3+i}x^1x^2+(\delta_i^1+\delta_i^2)k_{1+i}x^2x^3+ \\ +\delta_i^3k_1x^1x^3+k_{6+i}x^1+k_{9+i}x^2+(\delta_i^2+\delta_i^3)x^3-\delta_i^1. \end{aligned} \tag{2.4'}$$

L'origine M du repère est le sommet du paraboloïde Q (2.1). Le plan $x^3=0$ est tangent à Q au point M. L'axe MI_3 est la droite menée par M ayant direction assymptotique pour chacune des quadriques Q, $(T_2=0)$ et $(T_3=0)$. Le paraboloïde elliptique et celui hyperbolique ont en commun le plan $x^2=0$. MI_1 est l'intersection des plans $x^3=0$ et $x^2=0$. Le diamètre conjugué au plan $(x^2=0)$ par rapport à Q est MI_2. Le repère est interprété.

2b) **Complexes de cylindres paraboliques,** V_1 **(2 ; 1).** Les repères d'ordre zéro sont, par définition ceux, par rapport auxquels la quadrique générique a l'équation normale

$$Q=(x^1)^2-2x^3=0. \tag{2.5}$$

De la condition de fixité, il résulte 7 pfaffiens principaux d'ordre zéro

$$\omega^3\ ;\ \omega_1^1\ ;\omega_2^1\ ;\ \omega_3^1\ ;\ \omega_2^3\ ;\ \omega_3^3\ ;\ \omega^1-\omega_1^3. \tag{2.6}$$

Dans l'hypothèse qu'aucun d'eux n'est pas identiquement zéro, supposons encore que l'on à $[\omega_1^1,\ \omega_3^3,\ \omega^3]\neq 0$. Notons : $\theta^1=\omega^3$, $\theta^2=\omega_1^1$; $\theta^3=\omega_3^3$, $\omega_2^1=\lambda_i\theta^i$, $\omega_3^1=\lambda_{3+i}\theta^i$, $\omega_2^3=\lambda_{6+i}\theta^i$, $\omega^1-\omega_1^3=\lambda_{9+i}\theta^i$. Après la différentiation extérieure, pour $\lambda_2=\lambda_5=\lambda_{11}=\lambda_{12}=0$, avec les restrictions : $\lambda_8\neq 0$, $\lambda_8+2\lambda_9\neq 0$, $\lambda_1\lambda_6-\lambda_3\lambda_4\neq 0$, on obtient les quatre pfaffiens principaux du Ier ordre : ω^1, ω^2, ω_1^2, ω_2^3. Notons : $k_1=\lambda_1$; $k_2=\lambda_3$; $k_3=\lambda_4$; $k_{3+n}=\lambda_{5+n}$ $(n=\overline{1,5})$, $(k_1-k_2k_3\neq 0$, $k_6\neq 0$, $k_6+2k_7\neq 0)$, $\omega^1=k_{8+i}\theta^i$, $\omega^2=k_{11+i}\theta^i$, $\omega_1^2=k_{14+i}\theta^i$, $\omega_3^2=k_{17+i}\theta^i$. Il a resulté 8 invariants finis de Ier ordre et 12 du II-^ème ordre. Les formules Frenet sont :

$$\begin{aligned} dM&=(k_{8+i}I_1+k_{11+i}I_2+\delta_i^1 I_3)\,\theta^i, \\ dI_1&=[\delta_i^2 I_1+k_{14+i}I_2+(k_{8+i}-\delta_i^1k_8)I_3]\,\theta^i, \\ dI_2&=[(\delta_i^1k_1+\delta_i^3k_2)I_1-(\delta_i^2+\delta_i^3)I_2+k_{4+i}I_3]\,\theta^i, \\ dI_3&=[(\delta_i^1k_3+\delta_i^3k_4)I_1+k_{17+i}I_2+\delta_i^3 I_3]\,\theta^i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aucune des conditions d'intégrabilité n'est pas finie.

Théorème 2.2. *Trois formes de Pfaff, linéairement indépendentes de trois variables et 20 fonctions regulières des mêmes variables, déterminent, à une transformation équiaffine près, un complexe de cylindres paraboliques.*

Avec (2.7) on obtient

$$dQ=T_i\,\theta^i,\ \text{où} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} T_1=k_1x^1x^2+k_3x^1x^3+k_8x^1-k_5x^2-1=0, \\ T_2=(x^1)^2-k_6x^2=0\ \ (k_6\neq 0), \\ T_3=k_2x^1x^2+k_4x^1x^3-k_7x^2-x^3=0, \end{cases} \tag{2.8'}$$

La quadrique $(T_2=0)$ est un cylindre parabolique. MI_3 est sa génératrice, lieu géométrique des sommets de ses paraboles de section, parallèles au plan $(x^3=0)$, MI_2 est la génératrice de la quadrique générique Q, le lieu des sommets de ses paraboles de section, parallèles au plan $(x^2=0)$. Leur intersection est l'origine M du rèpère. Les paraboles de section par M, dans les cylindres $(Q=0)$ et $(T_2=0)$ ont comme tangente au sommet, la droite MI_1.

Remarque 1. Soient V et V' deux variétés, Q et Q' leurs quadriques génératrices, de manière que l'équation normale de Q' s'obtienne de l'équation normale de Q en annulant certains coefficients ε_m. Alors si ceci implique l'annulation d'un ou de plusieurs pfaffiens principaux d'ordre zéro, il résulte qu'entre les ordres v et v' des groupes de stabilité des quadriques Q et Q' il y a la relation $v>v'$. Dans ces conditions, l'application de l'algorithme de la méthode du repère mobile, pour la variété V' ne peut pas être obtenue de celle de V par la même particularisation.

Si par l'annulation d'un coefficient ε_m, il ne se produit pas une réduction du nombre des pfaffiens principaux d'ordre zéro, les calculs ultérieurs pour les variétés V et V' sont les mêmes.

Exemples. En annulant ε_0, les pfaffiens (1.3) restent les mêmes et donc pour les variétés V_1(3.3) nous avons les mêmes calculs et résultats — (1.4) et Théorème (1.1) — que pour les variétés V_1(4.3). Mais en faisant $\varepsilon_3=0$,

ou $\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$, (1.3) devient (1.7), respectivement (1.10) et les calculs ultérieurs de même que les résultats diffèrent du cas des variétés V_1 (4, 3).

Voici l'explication d'avoir repris, presque chaque fois l'application de l'algorithme de la méthode du repère mobile.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cruceanu, Vasile — *Elemente de algebră liniară și geometrie*. E.D.P., București, 1973.
2. Gheorghiez, Gh. — *Observații asupra geometriei afine diferențiale a câmpurilor de vectori*. Lucrările Consf. Geom. și topol., Iași, 1958, pp. 127 — 138.
3. Gheorghiez, Gh., Miron, R., Papuc, Dan — *Geometrie analitică și diferențială*, E.D.P. București, 1968.
4. Rimer, D. — *La géométrie différentielle des variétés uniparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace équiaffine à trois dimensions*. Bull. Math. 9 (57), București, 1965, p. 211 — 225.
5. Rimer, D. — *Variétés biparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace projectif et équiaffine à trois dimensions*. An. șt. Univ. Iași, s.n., XIII (1967) f. 2, pp. 349 — 365.
6. Rimer, D. — *Complexes de cônes quadratiques dans l'espace équiaffine et euclidien à trois dimensions*. An. șt, Univ. Iași, XVI (1970), f. 2, pp. 405 — 422.
7. Rimer, D. — *La géométrie différentielle des variétés unidimensionnelles de quadriques en P_3, A_3, E_3*. Math. Nachr. Berlin, *51* (1971), pp. 60 — 82.
8. Rimer, D. — *Congruences de quadriques en P_3 et A_3*. Math. Nachrichten, Berlin, *53* (1972), pp. 345 — 359.
9. Rimer, D. — *Complexes de quadriques dans P_3*. An. șt.Univ. Iași (1979), f. 2, pp. 399—410.
10. Rimer, D. — *Compléments à l'étude différentielle des variétés de quadriques*. Bull. Inst. Polyt. Iași (à paraître).
11. Scerbakov, R.N.— *Kurs affinoi i proektivnoi differenţialnoi geometrii*, Tomsk (1960).

Reçu le 5.XI.1979

Seminaire Mathématique „A. Myller"
Université de Iassy
Roumanie

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din IAȘI
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 2

SOME PROPERTIES OF n-CYCLIC INTERACTIVE LANGUAGE

BY

T. JUCAN

In [1] the notions of interactive system of grammars, interactive language, n-cyclic interactive system and n-cyclic interactive language, are introduced. Some properties of interactive language are also given.

In the present paper some properties of n-cyclic interactive languages are studied.

Definition 1. (see [1], also [2], 43—50). *A phrase-structure grammar is a 4-tuple $G=(V_N, V_T, P, S)$, where*

1) *V_N is a finite set of nonterminal symbols;*
2) *V_T is a finite set of terminal symbols;*
3) *P is a finite set of productions;*
4) *S is a start symbol in V_N.*

Let $P_1=\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ be a set of labels for the productions in P, distinct productions in P have distinct labels.

Let

$$S=u_0 \xrightarrow{p_{j(0)}} u_1 \xrightarrow{p_{j(1)}} u_2 \xrightarrow{p_{j(2)}} \dots \xrightarrow{p_{j(m)}} u_{m+1}, \quad m\geq 0$$

be a left-most derivation.

The word $c=p_{j(0)}\, p_{j(1)} \dots p_{a(m)}$, is called a control word. The mapping $g_G : P_1 \to (V_N \cup V_T)^*$ is defined by $g_G(c)=u_{m+1}$.

Definition 2. *Let $G_1=(V_{N_1}, V_{T_1}, P_1, S_1)$ and $G=(V_{N_2}, V_{T_2}, P_2, S_2)$ be two phrase-structure grammars as in definition 1 with $V_{T_1}\subseteq P_{1_2}$ and $V_{T_2}\subseteq P_{1_1}$. The interactive derivation denoted $w_1 \underset{G_1G_2}{\Longrightarrow} w_2$ is defined by*

5) $$w_1, w_2 \in L(G_1);$$

6) $$\exists\, y\in L(G_2),\ y=g_{G_2}(w_1) \text{ and } g_{G_1}(y)=w_2.$$

The relation $\underset{G_1G_2}{\Longrightarrow}$ is called an interactive derivation between G_1 and G_2. The reflexive and transitive closure of relation $\underset{G_1G}{\Longrightarrow}$ will be denoted by $\underset{G_1G_2}{\Longrightarrow}^*$. A pair of grammars (G_1, G_2) is called an interactive system.

Definition 3. *The interactive language $L(G_1, G_2;\ w_0)$ is defined by*

$$L(G_1, G_2;\ w_0)=\{w / w\in L(G_1),\ w_0 \underset{G_1G_2}{\Longrightarrow}^* w\},$$

where $w_0\in L(G_1)$ is the initial word.

Definition 4. *Let $(G_1, G_2, \dots, G_n)$, $n\geq 3$, be phrase-structure grammars. The n-cyclic interactive derivation denoted by $w_1 \underset{G_1G_2\dots G_n}{\Longrightarrow} w_2$, is defined by*