Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din IAŞI
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 2

SUR LES CATÉGORIES INTERNES

PAR

I. TOFAN

Le but de cette Note est la caractérisation des catégories et des foncteurs internes et l'internalisation à un topos $\mathcal{E}$ de la notion d'adjonction.

1. Soit $\mathcal{E}$ un topos élémentaire. Nous noterons par π_i les morphismes de structure des produits fibrés, par $\times$ le produit des morphismes et par $<,>$ le morphisme qui correspond par la propriété d'universalité des carrés cartésiens à une ensemble adéquat de morphismes (de même source).

Nous noterons aussi, par **Ens** la catégorie des ensembles et par **Cat** la catégorie des petites catégories.

Dans [1] on définit les notions de catégorie et foncteur internes :

Définition 1: *Une catégorie interne* **C** dans $\mathcal{E}$ *est constituée par* :
i) *un couple d'objets* C_0, C_1 ;
ii) *quatre morphismes* $d_0 : C_1 \to C_0$, $d_1 : C_1 \to C_0$, $i : C_0 \to C_1$ *et* $m : C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$ *tels que* :
iii) $d_0 i = 1_{C_0} = d_1 i$, $d_0 m = d_0 \pi_1$, $d_1 m = d_1 \pi_2$ $(\pi_1, \pi_2 : C_2 \to C_1)$, $m < \pi_1, m < \pi_2, \pi_3 >> = m < m < \pi_1, \pi_2 >, \pi_3 >>$ $(\pi_1, \pi_2, \pi_3 : C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1)$.

Soient $\mathbf{C} = (C_0, C_1, d_0^C, d_1^C, i^C, m^C)$, $\mathbf{D} = (D_0, D_1, d_0^D, d_1^D, i^D, m^D)$ des catégories internes de $\mathcal{E}$.

Définition 2 : *Un foncteur interne* $\mathbf{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *dans* $\mathcal{E}$ *est constitué par* :
i) *un couple de morphismes* $f_0 : C_0 \to D_0$, $f_1 : C_1 \to D_1$ *tel que* :
ii) $d_0^D f_1 = f_1 d_0^C$, $d_1^D f_1 = f_0 D_1^C$, $i^D f_0 = f_1 i^C$, $m^D (f_1 \times f_1) = f_1 m^C$. On obtient la catégorie des catégories internes dans $\mathcal{E}$ (notée par cat $(\mathcal{E})$).

Remarque 1 : $\mathbf{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ est une catégorie interne dans $\mathcal{E}$ ssi $\forall X \in |\mathcal{E}|$, $(\mathcal{E}(X, C_0), \mathcal{E}(X, C_1), \mathcal{E}(X, d_0), \mathcal{E}(X, d_1), \mathcal{E}(X, i), \mathcal{E}(X, m))$ est une catégorie interne dans **Ens**.

Remarque 2 : $\mathbf{f} = (f_0, f_1)$ est un foncteur interne dans $\mathcal{S}$ ssi $\forall X \in |\mathcal{E}|$ $(\mathcal{E}(X, f_0), \mathcal{E}(X, f_1))$ est un foncteur interne dans **Ens**.

Proposition 1 : *On donne une catégorie interne dans* $\mathcal{E}$ *ssi on donne* $C \in |\mathcal{E}|$ *de pair avec les morphismes* $\alpha : C \to C$, $\beta : C \to C$, $\varphi : C \times_C C \to C$ *en satisfaisant les conditions* (x) $\alpha\alpha = \alpha = \beta\alpha$, $\beta\beta = \beta = \alpha\beta$, $\varphi < 1_C, \alpha > = 1_C = \varphi < \beta, 1_C >$, $\alpha\varphi = \alpha\pi_1$, $\beta\varphi = \beta\pi_2$, $\varphi < \varphi < \pi_1, \pi_2 >, \pi_3 > = \varphi < \pi_1, \varphi < \pi_2, \pi_3 >>$, *ou ssi on donne un objet* $C \in |\mathcal{E}|$ *tel qu'il existe* $F : \mathcal{E} \to$ **Cat** *en satisfaisant la relation* $\mathcal{E}(-, C) = UF$ $(\pi_1, \pi_2 : C \times_C C \to C$, $\pi_1, \pi_2, \pi_3 : C \times_C C \times_C C \to C$, U *désigne le foncteur d'oublie* : **Cat** $\to$ **Ens**, $\mathcal{C} \to \bigcup_{XY} \mathcal{C}(X, Y) = FL(\mathcal{C})$).

Démonstration. Pour la catégorie interne $\mathbf{C}=(C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ en choisissant $C=C_1$, $\alpha=id_0$, $\beta=id_1$, $\varphi=m$ on obtient les relations $(\varkappa)$. $\forall X\in|\mathcal{E}|$ dès que $C, \alpha, \beta, \varphi$ satisfont à $(\varkappa)$, $\mathcal{E}(X, C)$, $\mathcal{E}(X, \alpha)$, $\mathcal{E}(X, \beta)$, $\mathcal{E}(X, \varphi)$ satisfont à des conditions similaires, donc $\mathcal{E}(X, C)$ peut être considérée comme $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ pour une petite catégorie $\mathcal{C}$. En même temps $\mathcal{E}(q, C)$ $(q\in\mathcal{E}(X, Y))$ a un caractère fonctoriel donc on peut construire $F:\mathcal{E}\to\mathbf{Cat}$ tel que $\mathcal{E}(-, C)=UF$. Réciproquement si $\mathcal{E}(-, C)=UF$, alors $\forall X\in|\mathcal{E}|$ $\mathcal{E}(X, C)$ peut être doté avec $\tilde{\alpha}^C_X$, $\tilde{\beta}^C_X$, $\tilde{\varphi}^C_X$ en satisfaisant à $(\varkappa)$. Si on choisit $\alpha=\tilde{\alpha}^C_C(1_C)$, $\beta=\tilde{\beta}^C_C(1_C)$, $\varphi=\tilde{\varphi}^C_C\times_C c(\pi_1, \pi_2)$ on obtient pour $f, g\in\mathcal{E}(X, C)$ $\tilde{\alpha}^C_X(f)=\alpha f$, $\tilde{\beta}^C_X(f)=\beta f$, $\tilde{\varphi}^C_X(f, g)=\varphi<f, g>$ (on suppose que $\tilde{\alpha}^C_X(g)=\tilde{\beta}^C_X(f)$).
On vérifie que α, β, φ satisfont à $(\varkappa)$. Enfin en choisissant $C_1=C$, $C_0=\mathrm{Im}\,\alpha$ (l'image de α) plus précisément

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] & C \\ C_0 \arrow[u, "j"] \arrow[r] & C_0 \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

$d_0=q$, $d_1=q\beta$, $i=j$, $\varphi=m$ $(C\times_C C=C\times_C C)$ nous obtenons une catégorie interne.

Proposition 2 : *On donne un foncteur interne* $\mathbf{f}=(f_0, f_1)$ *de* $\mathbf{C}=(C_0, C_1, d^C_0, d^C_1, i^C, m^C)$ à $\mathbf{D}=(D_0, D_1, d^D_0, d^D_1, i^D, m^D)$ *ssi on donne un morphisme* $f: C\to D$ *(C, D sont associées à* $\mathbf{C}$ *et respectivement à* $\mathbf{D}$ *par la proposition 1) tel que* $(\varkappa\varkappa)$ $\alpha^D f=f\alpha^C$, $\beta^D f=f\beta^C$, $\varphi^D(f\times f)=f\varphi^C$ *ou ssi on donne un morphisme* $f: C\to D$ *tel que* $\forall X\in|\mathcal{E}|$ $\tilde{\alpha}^D_X\mathcal{E}(X, f)=\mathcal{E}(X, f)\,\tilde{\alpha}^C_X$, $\tilde{\beta}^D_X\mathcal{E}(x, f)=\mathcal{E}(X, f)\,\tilde{\beta}^C_X$, $\mathcal{E}(X, f)\,\tilde{\varphi}^C_X=\tilde{\varphi}^D_X(\mathcal{E}(X, f)\times\mathcal{E}(X, f))$.

Démonstration. On vérifie que $f=f_1: C\to D$ $(C=C_1,\ D=D_1)$ satisfait aux conditions $(\varkappa\varkappa)$. Alors, $\mathcal{E}(X, f)$ satisfait aux conditions similaires.

Réciproquement en prennant $X=C$ et $X=C\times_C C$ on démontre que f satisfait $(\varkappa\varkappa)$.

Enfin en choisissant $f_1=f$, $f_0=f^D f q^C$ $(\alpha^C=q^C j^C,\ \alpha^D=q^D j^D)$ nous obtenons un foncteur interne de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{D}$.

2. Soient les topos élémentaires $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et les foncteurs $F:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2$, $G:\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_1$.

Proposition 3 : *On peut construire les foncteurs* F' : $\mathrm{cat}(\mathcal{E}_1)\to\mathrm{cat}(\mathcal{E}_2)$ *et* G' : $\mathrm{cat}(\mathcal{E}_2)\to\mathrm{cat}(\mathcal{E}_1)$ *tels que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{cat}(\mathcal{E}_1) \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "U_1"'] & \mathrm{cat}(\mathcal{E}_2) \arrow[d, "U_2"] \\ \mathcal{E}_1 \arrow[r, "F"] & \mathcal{E}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{cat}(\mathcal{E}_2) \arrow[r, "G'"] \arrow[d, "U_1"'] & \mathrm{cat}(\mathcal{E}_1) \arrow[d, "U_2"] \\ \mathcal{E}_2 \arrow[r, "G"] & \mathcal{E}_1 \end{tikzcd}$$

soient commutatives. Si $F\dashv G$ *alors* $F'\dashv G'$. (Par U_1, U_2 on a noté les foncteurs d'oublie, les catégories internes étant considérées comme des objets de pair avec les morphismes α, β, φ).

Démonstration. Notons par S_i : $\mathcal{E}_i\to\mathrm{cat}(\mathcal{E}_i)$ $i=1, 2$ les foncteurs qui s'obtiennent par l'association $C\to(C$ de pair avec $\alpha=\beta=\varphi=1_C)$, $f\to f$. Alors $F'=S_2FU_1$, $G'=S_1GU_2$ satisfont à $FU_1=U_2F'$, $GU_1=U_2G'$. Si $\Phi: 1_{\mathcal{E}_1}\to GF$, $\Psi: FG\to 1_{\mathcal{E}_2}$ sont les flèches d'adjonction, respectivement coadjonction, pour $F\dashv G$ alors $\Phi'_-=S_1(\Phi' U_{1(-)})$, $\Psi'=S_2(\Psi U_{2(-)})$ donnent les transformations naturelles Φ', Ψ' tel que $F'\dashv G'$.

Corollaire 1 : cat $(\mathcal{E})$ *est cartésienne.*

Corollaire 2 : **Cat** *est cartésienne*

3. Soient $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbf{C}\to\mathbf{D}$ $\mathbf{f}=(f_0, f_1)$, $\mathbf{g}=(g_0, g_1)$ des foncteurs internes dans $\mathcal{E}$.

Définition 3 : *Une transformation naturelle interne* $\alpha: \mathbf{f}\to\mathbf{g}$ *dans* $\mathcal{E}$ *est constitué par :*

i) *un morphisme* $\alpha: C_0\to D_1$ *tel que*

ii) $d^D_0\alpha=f_0$, $d^D_1\alpha=g_0$, $m<\alpha d^D_0, g_1>=m<f_1, \alpha d^D_1>$.

Remarque 3 : $\alpha: \mathbf{f}\to\mathbf{g}$ est une transformation naturelle interne dans $\mathcal{E}$ ssi $\forall X\in|\mathcal{E}|$, $\mathcal{E}(X, \alpha)$ satisfait à la même condition dans **Ens** $(\mathcal{E}(X, \alpha)$: $(\mathcal{E}(X, f_0), \mathcal{E}(X, f_1))\to(\mathcal{E}(X, g_0), \mathcal{E}(X, g_1)))$.

Définition 4 : *On dit que* $\mathbf{f}$ *est adjoint interne à gauche de* $\mathbf{g}$ *(et on note* $\mathbf{f}\dashv_{\mathcal{E}}\mathbf{g}$*) s'il existe des transformations naturelles internes* $\varphi: 1_C\to\mathbf{gf}$, ψ : $\mathbf{fg}\to 1_{\mathbf{D}}$ *de manière que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[d, "f_0"'] \arrow[d, shift left=6ex, "<f_1\varphi,\ \psi f_0>"] \\ D_0 \arrow[d, "i_D"'] \\ D_2 \arrow[d, "m^D"] \\ D_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_0 \arrow[d] \arrow[dr, "g_0"] & \\ C_2 \arrow[d, "m_C"'] & C_0 \arrow[d, "i^C"] \\ C_1 & \end{tikzcd} \quad <\varphi g_0,\ g_1\psi>$$

soient commutatives ($<f_1\varphi, \psi f_0>$, $<\varphi g_0, g_1\psi>$ sont définis).

Remarque 4 : L'adjonction interne dans **Ens** conduit à l'adjonction usuelle.

Remarque 5 : $\mathbf{f}\dashv_{\mathcal{E}}\mathbf{g}$ ssi $\forall X\in|\mathcal{E}|$ $(\mathcal{E}(X, f_0), \mathcal{E}(X, f_1))\dashv_{\mathbf{Ens}}(\mathcal{E}(X, g_0), \mathcal{E}(X, g_1))$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Johnstone P.T. — *Topos theory*, Academic Press, 1977.

Received 18.VII.1979

Département de Mathématiques
Université „Al.I. Cuza", Iaşi
R.S. Roumanie