$$+o\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\frac{d(\lambda_{n,\,n-\tau})}{t\log 1/t}\right)\Bigg]\text{ uniformly in } E.$$

$$=\left[o(1)+o\left(\frac{1}{\log n}\right)+o\left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{n}\frac{\lambda_{n,\,n-[x]}}{\log x}dx\right)+o\left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{n}\frac{xd\lambda_{n,\,n[x]}}{\log x}\right)\right]\text{uniformly in } E,$$

$$=\left[o(1)+o\left(\frac{1}{\log n}\right)+o\left(\left\{\int_{[\delta^{-1}]}^{a}+\int_{a}^{a+1}+\dots+\int_{k}^{k+1}+\dots+\int_{n-1}^{n}\right\}\frac{\lambda_{n,\,n-[x]}}{\log x}dx\right)\right.$$

$$\left.+o\left(\left\{\int_{[\delta^{-1}]}^{a}+\int_{a}^{a+1}+\dots+\int_{k}^{k+1}+\dots+\int_{n-1}^{n}\right\}\frac{xd\lambda_{n,\,n-[x]}}{\log x}\right)\right)\text{ uniformly in } E.$$

where $a=[\delta^{-1}]+1$

$$=\left[o(1)+o\left(\frac{1}{\log n}\right)+o\left(\sum_{k=a-1}^{n-1}\frac{\lambda_{n,\,n-k}}{\log k}\right)+0\left(\sum_{k=a}^{n}\frac{k}{\log k}\,\Delta\lambda_{n,\,n-k}\right)\right]\text{ uniformly in } E.$$

$$=\left[o(1)+o\left(\frac{1}{\log n}\right)+o\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,\,n-k}\right)+o\left(\frac{n}{\log n}\right)\sum_{k=a}^{n}\lambda_{n,\,n-k}-\lambda_{n,\,n-k+1}\}\right]$$

uniformly in E.

$$=\left[o(1)+o\left(\frac{1}{\log n}\right)+o\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,\,k}\right)+o\left(\frac{n}{\log n}\right)\{\lambda_{n,\,0}-\lambda_{n,n-a+1}\}\right]$$

uniformly in E.

$$=[o(1)+o(1)+o(1)+o(1)]\text{ uniformly in } E.$$

as $n\to\infty$. by regularity condition and lemma 3

(6.7) $\qquad =o(1)$ uniformly in E.

Now combining (6.1), (6.2) and ... (6.7), we get the proof of the theorem.

REFERENCES

1. Hardy, G.H. and Rogosinski, W.W. — *Fourier series*, Cambridge Tracts Maths. No. 38, 1944 Theo. 31, p. 24.
2. Nand Kishore and G.C. Hota — *On absolute matrix summability of a Fourier series*, Indian J. of Math. vol. 13, 1971, No. 2, pp. 99 — 110.
3. Saxena, Ashok — *On the uniform harmonic summability of Fourier series and its conjugate series*. Proc. Natl. Inst. Sc. India, 31, 1965, pp. 303 — 310.
4. Saxena, Ashok — *On uniform Nörlund summability of Fourier series*, Proc. Natl. Inst. Sc. India Part A, 32, 1966, pp. 502 — 508.

Received 15.VIII.1979

Applied Mathematics Section
Institute of Technology
Banaras Hindu University
Varanasi — 221005, India

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din IAŞI
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 2

NOTION DE SPECTRE DANS UNE CATEGORIE QUELCONQUE (I)

PAR

EUGEN POPA

L'objet de cette note est d'étendre, dans le cadre d'une catégorie quelconque (éventuellement additive), certaines constructions fondamentales en géométrie algébrique [4] : spectre, anneau de fractions, localisé, etc. Dans le §1, on définit un foncteur contravariant, noté Sp, sur une catégorie quelconque, à valeurs dans TOP. Lorsque la catégorie est additive, on peut définir, sur chaque espace topologique Sp A, des faisceaux de groupes abéliens $\mathbf{O}_{AB}$. Cette construction est acomplie en §6. On utilise de façon essentielle un certain foncteur Q_+, introduit au §2. Un rôle important joue la notion d'objet complet, qui est détaillée en §3. §4 et §5 contiennent des application à TOP (et à ENS, comme cas particulier), tandis que §7 traite l'exemple classique de la catégorie A-mod. Un dernier paragraphe contient une brève disscution du comportement des constructions précédentes, par l'action des foncteurs.

Les trois derniers paragraphes paraîtront séparément. Cette note est le développement de la conférence présentée à Cape-Town 1976 [7].

Pour tout ce qui concerne les catégories, nous renvoyons à [5], [8], [9]. $\mathbf{C}$ sera une catégorie quelconque. Pour un objet $A\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$, on note $\mathbf{P}(A)$ la classe des sous-objets de de A. $\mathbf{P}(A)$ sera ordonnée par la relation d'inclusion : $A'\subseteq A''$ si et seulement si, il existe un monomorphisme $A'\to A''$, compatible avec les monomorphismes $A'\to A$ et $A''\to A$. Si $\mathbf{C}$ possède des limites projectives finies, on note $A'\cap A''$ la limite projective du diagramme :

$$\begin{array}{c} A' \\ \downarrow \\ A''\to A \end{array} \qquad A',\,A''\in\mathbf{P}(A)$$

et $u^{-1}(B')$ la limite projective du diagramme :

$$\begin{array}{c} B' \\ \downarrow \\ A\xrightarrow{u}B \end{array} \qquad B'\in\mathbf{P}(B)$$

On note $u\,|_{A'}$ la composition $A'\to A\xrightarrow{u}B$.

Un ensemble ordonné sera identifié avec la catégorie correspondente. Une application $f:X\to Y$ entre deux espaces topologiques sera appellée homéomorphisme sur son image, si $f:X\to f(X)$ est un homéomorphisme. $A\setminus B$ désignera la différence d'ensembles ; $\complement A$ sera le complémentaire par rapport à un ensemble qui sera clair du contexte.

1. **Le foncteur Sp.** Soit $\mathbf{C}$ une catégorie localement petite, avec des limites projectives finies.

Définition 1.1. *On note* $\mathbf{C}_+$ *la catégorie dont les objets sont les couples* $(A, \mathbf{A})$, *avec* $A \in Ob\ \mathbf{C}$ *et* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{P}(A)$, *tels que :*

(i) $A \in \mathbf{A}$.

(ii) $A' \in \mathbf{A}$ *et* $A' \subseteq A'' \Rightarrow A'' \in \mathbf{A}$.

(iii) $A', A'' \in \mathbf{A} \Rightarrow A' \cap A'' \in \mathbf{A}$

et dont les morphismes $(A, \mathbf{A}) \to (B, \mathbf{B})$ *sont les morphismes* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ *tels que* $u^{-1}(B') \in \mathbf{A}$, $\forall B' \in \mathbf{B}$.

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{P}(A)$ ayant les propriétés (i) — (iii) sera appellé *filtre* (sur A) ; $\mathbf{A}_0$ ayant les propriétés (i) et (iii) sera appellé *base de filtre*. Il est évident que, pour chaque base de filtre, il existe un plus petit filtre qui la contient, et qui sera appellé le filtre engendré (par cette base de filtre).

On vérifie sans peine que $\mathbf{C}_+$ est correctement définie. De plus, $\mathbf{C}_+$ possède des limites projectives finies. Notons $\gamma : \mathbf{C}_+ \to \mathbf{C}$ le foncteur oubli.

Proposition 1.2. *γ possède des adjoints à gauche et à droite.*

Démonstration. Il suffit de définir $D, G : \mathbf{C} \to \mathbf{C}_+$ par $D(A) = (A, \{A\})$ et $G(A) = (A, \mathbf{P}(A))$.

Proposition 1.3. *$\mathbf{C}_+$ possède des limites projectives (resp. inductives) si et seulement si $\mathbf{C}$ possède des limites projectives (resp. inductives) et alors γ commute avec les limites.*

En particulier, γ est exact.

Démonstration. γ étant un adjoint à droite, on sait [5] que γ commute avec les limites. De plus, on a $\gamma \circ D = 1$, donc, si $\mathbf{C}_+$ a des limites alors $\mathbf{C}$ en a aussi. Supposons donc que $\mathbf{C}$ a des limites projectives et inductives. Alors :

a) Si $(A_i, \mathbf{A}_i) \in \mathrm{Ob}\ \mathbf{C}_+$ $(i \in I)$ soit $A = \prod_{i \in I} A_i$ le produit dans $\mathbf{C}$. Soit $\mathbf{A}$ le filtre engendré par la base de filtre $\mathbf{A}_0 = \{\bigcap_{k=1}^{n} pr_{i_k}^{-1}(A'_{i_k}) \mid A'_{i_k} \in \mathbf{A}_{i_k}\}$. Alors $(A, \mathbf{A})$ est un produit direct dans $\mathbf{C}_+$, pour la famille $\{(A_i, \mathbf{A}_i)\}_{i \in I}$.

b) Soit $F : (A, \mathbf{A}) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (B, \mathbf{B})$ dans $\mathbf{C}_+$. Alors $(\mathrm{Ker}\, F', \mathbf{K})$ est un noyau pour F dans $\mathbf{C}_+$ ou, $F' : A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ et $\mathbf{K}$ est le filtre engendré par la base

$$\mathbf{K}_0 = \{\mathrm{Ker}\, F' \times_A A' \mid A' \in \mathbf{A}\}.$$

c) Si $(A_i, \mathbf{A}_i) \in \mathrm{Ob}\ \mathbf{C}_+$ $(i \in I)$, alors $(A, \mathbf{A})$, avec $A = \coprod_{i \in I} A_i$ somme directe dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{A} = \{A' \in \mathbf{P}(A) \mid \varepsilon_i^{-1}(A') \in \mathbf{A}_i, \forall i \in I\}$ est une somme directe dans $\mathbf{C}_+$ pour la famille considérée.

d) Si $F : (A, \mathbf{A}) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (B, \mathbf{B})$ dans $\mathbf{C}_+$, alors $(\mathrm{Coker}\, F', \mathbf{K})$ avec $F' : A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ et $\mathbf{K} = \{K' \subseteq \mathrm{Coker}\, F' \mid p^{-1}(K') \in \mathbf{B}\}$ est un conoyau pour F dans $\mathbf{C}_+$ (p désigne la projection du conoyau dans $\mathbf{C}$).

Définition 1.4. a) *Pour* $A \in \mathrm{Ob}\ \mathbf{C}$, *on note :*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{(A, \mathbf{A}) \mid (A, \mathbf{A}) \in \mathrm{Ob}\ \mathbf{C}_+\}.$$

b) *Pour* $A' \in \mathbf{P}(A)$ *on note :*

$$\mathbf{O}(A') = \{(A, \mathbf{A}) \in \mathrm{Sp}\, A \mid A' \in \mathbf{A}\}.$$

c) *Pour* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ *on note* $\mathrm{Sp}(f) : \mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A)$ *l'application définie par*

$$[\mathrm{Sp}(f)]\ (B, \mathbf{B}) = (A, f^{-1}(\mathbf{B}))$$

où $f^{-1}(\mathbf{B})$ *est le filtre engendré par la base* $\{f^{-1}(B') \mid B' \in \mathbf{B}\}$.

Proposition 1.5. $\mathbf{O}(A_1) \cap \mathbf{O}(A_2) = \mathbf{O}(A_1 \cap A_2)$.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$(A, \mathbf{A}) \in \mathbf{O}(A_1) \cap \mathbf{O}(A_2) \Leftrightarrow A_1 \in \mathbf{A} \text{ et } A_2 \in \mathbf{A} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathbf{A} \Leftrightarrow (A, \mathbf{A}) \in \mathbf{O}(A_1 \cap A_2)$$

Proposition 1.6. *On a :*

$$[\mathrm{Sp}(f)]^{-1}(\mathbf{O}(A')) = \bigcup_{f^{-1}(B') \subseteq A'} \mathbf{O}(B')$$

Démonstration. On a les équivalences :

$$(B, \mathbf{B}) \in [\mathrm{Sp}(f)]^{-1}(\mathbf{O}(A')) \Leftrightarrow [\mathrm{Sp}(f)]\ (B, \mathbf{B}) \in \mathbf{O}(A') \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists B' \in \mathbf{B} \text{ tel que } f^{-1}(B') \subseteq A' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (B, \mathbf{B}) \in \bigcup_{f^{-1}(B') \subseteq A'} \mathbf{O}(B')$$

La proposition 1.5 montre que $\{\mathbf{O}(A')\}_{A' \subseteq A}$ est une base pour une topologie sur $\mathrm{Sp}(A)$. Par la suite, $\mathrm{Sp}(A)$ sera considéré toujours muni de cette topologie. La proposition 1.6 assure alors que toute application $\mathrm{Sp}(f)$ est continue. Donc :

Proposition 1.7. $\mathrm{Sp} : \mathbf{C} \to \mathrm{TOP}$ *est un foncteur contravariant.*

Proposition 1.8. a) $\mathbf{O}(A') \subseteq \mathbf{O}(A'') \Leftrightarrow A' \subseteq A''$.

b) $\mathbf{O}(A') = \bigcup_{i \in I} \mathbf{O}(A'_i) \Leftrightarrow \forall i \in I,\ A'_i \subseteq A'$ et $\exists i_0 \in I$ *tel que* $A' \subseteq A'_{i_0}$.

Démonstration. a) Soit $\mathbf{F} = \{A_1 \in \mathbf{A} \mid A' \subseteq A_1\}$. On a $\mathbf{F} \in \mathbf{O}(A')$, donc $\mathbf{F} \in \mathbf{O}(A'')$, d'où $A'' \in \mathbf{F}$, ce qui prove que $A' \subseteq A''$. La réciproque est évidente.

b) Si $\mathbf{O}(A') = \bigcup_{i \in I} \mathbf{O}(A'_i)$ alors pour tout $i \in I$ on a $\mathbf{O}(A'_i) \subseteq \mathbf{O}(A')$, donc $A'_i \subseteq A'$. Comme $(A, \mathbf{F}) \in \mathbf{O}(A')$, il existe $i_0 \in I$ tel que $(A, \mathbf{F}) \in \mathbf{O}(A_{i_0})$, d'où $A' \subseteq A'_{i_0}$.

Réciproquement, on a $A'_i \subseteq A'$, $\forall i \in I$, donc $\mathbf{O}(A'_i) \subseteq \mathbf{O}(A')$. $A' \subseteq A'_{i_0}$ implique $\mathbf{O}(A') \subseteq \mathbf{O}(A'_{i_0})$, ce qui prouve l'égalité.

Proposition 1.9. $\mathrm{Sp}(A)$ *est un espace* T_0.

Démonstration. Soient $\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{F}_2$ dans $\mathrm{Sp}(A)$. Alors : ou bien il existe $A' \in \mathbf{F}_1$ et $A' \notin \mathbf{F}_2$; ou bien il existe $A' \in \mathbf{F}_2$ et $A' \notin \mathbf{F}_1$. Donc, il existe un ouvert $\mathbf{O}(A')$ tel que : soit $\mathbf{F}_1 \in \mathbf{O}(A')$ et $\mathbf{F}_2 \notin \mathbf{O}(A')$; soit $\mathbf{F}_2 \in \mathbf{O}(A')$ et $\mathbf{F}_1 \notin \mathbf{O}(A')$.

2. **Le foncteur** Q_+. Dans ce § nous admettrons les mêmes hypothèses que celles de §, et de plus, que $\mathbf{C}$ est une catégorie additive. Alors $\mathbf{C}_+$ est aussi une catégorie additive, et γ devient un foncteur additif.

Théorème 2.1. *Supposons que :*

a) *Toute limite inductive finie de monomorphismes dans* $\mathbf{C}$, *est un monomorphisme.*

b) *Pour tout épimorphisme* p *dans* $\mathbf{C}$, p^{-1} *établit une bijection entre les sous-objets de* B, *et les sous-objets de* A, *qui contiennent* Ker p.

Alors Sp *commute avec les limites inductives finies.*

Démonstration. Soient $A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ et $A = A_1 \oplus A_2$ la somme directe. Les inclusions $A_i \to A$ $(i=1, 2)$ définissent une application continue $\varphi : \mathrm{Sp}(A) \to \mathrm{Sp}(A_1) \times \mathrm{Sp}(A_2)$. Soit

$$\psi : \mathrm{Sp}(A_1) \times \mathrm{Sp}(A_2) \to \mathrm{Sp}(A),$$

définie par :

$$\psi((A_1, \mathbf{A}_1), (A_2, \mathbf{A}_2)) = (A_1, \mathbf{A}_1) \oplus (A_2, \mathbf{A}_2),$$

(somme directe dans $\mathbf{C}_+$). Prop. 1.3 assure que ψ est bien définie. Soit $\mathbf{O}(A') \subseteq \mathrm{Sp}(A)$ et $A'_i = A' \cap A_i$ $(i=1, 2)$. On a : $A' = A \oplus A$ car $A \oplus B \simeq \simeq A \times B$ dans $\mathbf{C}$, et les limites projectives finies commutent. On a alors :

$$\psi^{-1}(\mathbf{O}(A')) = \mathbf{O}(A'_1) \times \mathbf{O}(A'_2).$$

En effet, on a les équivalences :

$$((A_1, \mathbf{A}_1), (A_2, \mathbf{A}_2)) \in \psi^{-1}(\mathbf{O}(A')) \Leftrightarrow A' \in \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A'_i \in \mathbf{A}_1 \text{ et } A'_2 \in \mathbf{A}_2 \Leftrightarrow (A_1, \mathbf{A}_1) \in \mathbf{O}(A'_1) \text{ et } (A_2, \mathbf{A}_2) \in \mathbf{O}(A'_2)$$

Ceci prouve que ψ est continue. Soit $(A, \mathbf{A}) \in \mathrm{Sp}(A)$. Alors $\varphi(A, \mathbf{A}) = ((A_1, \mathbf{A} \cap A_1), (A_2, \mathbf{A} \cap A_2))$. Mais : $(A_1, \mathbf{A} \cap A_1) \oplus (A_2, \mathbf{A} \cap A_2) = (A, \mathbf{A})$, car on a les équivalences :

$$A' \in (\mathbf{A} \cap A_1) \oplus (\mathbf{A} \cap A_2) \Leftrightarrow A' \cap A_i \in \mathbf{A} \cap A_i \ (i=1, 2) \Leftrightarrow A' \in \mathbf{A}.$$

La dernière implication résulte ainsi : de $A' \cap A_i \in \mathbf{A} \cap A_i$, il résulte l'existence de $A''_i \in \mathbf{A}$, tel que $A''_i \cap A_i \subseteq A' \cap A_i$. Alors : $A''_1 \cap A''_2 \subseteq (A''_1 \cap A_1) \oplus \oplus (A''_2 \cap A_2) \subseteq (A' \cap A_1) \oplus (A' \cap A_2) \subseteq A'$, donc $A''_1 \cap A''_2 \subseteq \mathbf{A}$ implique $A' \in \mathbf{A}$. Ainsi on a $\psi \circ \varphi = 1$.

Soit $(A_i, \mathbf{A}_i) \in \mathrm{Sp}(A_i)$ $(i=1, 2)$. Alors $(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2) \cap A_1 = \mathbf{A}_1$, car on a les equivalences : $A'_1 \in (\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2) \cap A_1 \Leftrightarrow A'_1 = (A''_1 \oplus A''_2) \cap A_1$ avec $A''_i \in \mathbf{A}_i$ $(i = =1, 2) \Leftrightarrow A''_1 = A''_1 \in \mathbf{A}'_1$.
La dernière implication résulte du fait que $A''_2 \cap A_1 = 0$. On a donc $\varphi \circ \psi = 1$, ce qui prouve que Sp commute avec les sommes directes finies.

Soit maintenant $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{p}$ Coker u un conoyau. Les hypothèses montrent que $\mathrm{Sp}(p)$ est une application injective. Pour tout $C' \subseteq$ Coker u on a :

$$\mathrm{Sp}(p)\,[\mathbf{O}(C')] = \{(B, \mathbf{B}) \mid \mathbf{B} = p^{-1}(\mathbf{F}), \text{ avec } C' \in \mathbf{F}\} =$$

$$= \mathbf{O}(p^{-1}(C')) \cap \mathrm{Sp}(p)\ [\mathrm{Sp}(\mathrm{Coker}\ u)],$$

donc $\mathrm{Sp}(p)$ est un homéomorphisme sur son image. Soit $(B, \mathbf{B})$ un point de $\mathrm{Sp}(B)$ tel que $u^{-1}(\mathbf{B}) = \{A\}$. Pour tout $B' \in \mathbf{B}$ on a Im $u =$ Ker $p \subseteq B'$. Donc,

il existe $\mathbf{K}$ tel que $p^{-1}(\mathbf{K}) = \mathbf{B}$. Il résulte que $\mathrm{Sp}(p)$ est le noyau de $\mathrm{Sp}(u)$ et $\mathrm{Sp}(0)$.

Enfin, $\mathrm{Sp}(0)$ est réduit à un point, donc Sp commute avec les limites inductives finies.

Définition 2.2. a) *Pour* $((A, \mathbf{A}), B) \in \mathrm{Ob}\,(\mathbf{C}^\circ_+ \times \mathbf{C})$ *notons* $F((A, \mathbf{A}), B)$ *le foncteur défini sur l'ensemble ordonné* $\mathbf{A}$, *à valeurs dans* Ab, *par :*

$$F((A, \mathbf{A}), B)(A') = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', B),$$

$$F((A, \mathbf{A}), B)(i) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(i, 1_B).$$

b) *On introduit sur l'ensemble* $\bigcup_{A' \in \mathbf{A}} F((A, \mathbf{A}), B)(A')$ *la relation d'équivalence* $u \sim v$ *par ; Il existe* $A_1 \in \mathbf{A}$ *tel que* $u \mid A_1 = v \mid A_1$. *Notons* $[u]$ *la classe des* u, *et* $Q_+((A, \mathbf{A}), B)$ *l'ensemble quotient par cette relation d'équivalence.*

Théorème 2.3. $Q_+ : \mathbf{C}^\circ_+ \times \mathbf{C} \to Ab$ *est un foncteur additif en chaque variable.*

Démonstration. Soient $u, v \in \bigcup_{A' \in \mathbf{A}} F((A, \mathbf{A}), B)(A')$. Il existe $A' \in \mathbf{A}$ et $u', v' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', B)$ tels que $u \sim u'$, $v \sim v'$. Définissons $[u] + [v] = [u' + v']$. On vérifie sans peine que, muni de cette opération, $Q_+((A, \mathbf{A}), B)$ devient un groupe abélien. Ainsi, Q_+ est défini sur les objets.

Soient maintenant $f : (A_2, \mathbf{A}_2) \to (A_1, \mathbf{A}_1)$ et $g : B_1 \to B_2$ morphismes dans $\mathbf{C}^\circ_+$, respectivement dans $\mathbf{C}$. Pour chaque $[u] \in Q_+((A, \mathbf{A}), B)$ (de représentant $u : \mathbf{A}'_1 \to B_1$) on a $f^{-1}(A'_1) \in \mathbf{A}$, donc on peut définir $g\,u\,f : f^{-1}(A'_1) \to B_2$ (lorsque cela ne risque pas de produire des confusions, on notera par la même lettre un morphisme et ses divers restrictions). Alors $[g\,u\,f] \in Q_+((A_2, \mathbf{A}_2), B_2)$ et on pose :

$$Q_+(f, g)([u]) = [g\,u\,f].$$

La définition est correcte, car, pour $u_1 \in [u]$ il existe $A''_1 \in \mathbf{A}_1$ tel que $u \mid_{A''_1} = = u_1 \mid_{A''_1}$; ainsi :

$$g u_1 f \mid_{f^{-1}(A''_1)} = g\,u\,f \mid_{f^{-1}(A''_1)}$$

Ensuite :

$$Q_+(f_1, g_1)\{Q_+(f, g)([u])\} = Q_+(f_1, g_1)([g\,u\,f]) = [g_1\,g\,u\,f\,f_1],$$

$$Q_+(ff_1, g_1 g)([u]) = [g_1\ g\,u\,f\ f_1],$$

donc $Q_+(f_1, g_1) \circ Q_+(f, g) = Q_+(ff_1, g_1 g)$. On vérifie sans difficulté que Q_+ ainsi défini est bien un foncteur additif en chaque variable.

Proposition 2.4. $Q_+((A, \mathbf{A}), .)$ *commute avec les limites projectives finies. En particulier,* $Q_+((A, \mathbf{A}), .)$ *est exact à gauche.*

Démonstration. Soit $\{B_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ une famille finie d'objets de $\mathbf{C}$. Il existe une bijection :

$$\alpha : Q_+((A, \mathbf{A}), \prod_{i=1}^{n} B_i) \to \prod_{i=1}^{n} Q_+((A, \mathbf{A}), B_i)$$

définie par : $\alpha([u])=([p_i u])$ où $p_i : \prod_{j=1}^{n} B_j \to B_i$ sont les projections canoniques. En effet, si $u_1 \in [u]$, alors $p_i u_1 \in [p_i u]$, donc α est correctement définie. Il est immédiat que α est un morphisme de groupes abéliens. Si $\alpha([u])=$ $=\alpha([v])$ on a $p_i u = p_i v$, avec des répresentants convenablement choisis. Il en résulte $u=v$, donc α est injective. Soit :

$$([v_i]) \in \prod_{i=1}^{n} Q_+((A, \mathbf{A}), B_i),$$

avec $v_i : A_i' \to B_i$. On a $\bigcap_{i=1}^{n} A_i' \in \mathbf{A}$, donc on peut considérer $v = \prod_{i=1}^{n} v_i : \bigcap_{i=1}^{n} A_i' \to \prod_{i=1}^{n} B_i$. Puisque $p_i \circ \prod_{j=1}^{n} v_j = v_i$, on a $\alpha([v])=([v_i])$, ce qui prouve la surjectivité de α.

Soit $F : B \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C$. Pour $[u] \in Q_+((A, \mathbf{A}), \operatorname{Ker} F)$ on a :

$$Q_+(1, f)\{Q_+(1, \varepsilon)([u])\} = [f\varepsilon u] = [g\varepsilon u] = Q_+(1, g)\{Q_+(1, \varepsilon)([u])\}$$

Si $[v] \in Q_+((A, \mathbf{A}), B)$ est tel que $Q_+(1, f)([v]) = Q_+(1, g)([v])$ alors il existe $v_1 \in [v]$ tel que $fv_1 = gv$. D'après les propriétés du noyau dans $\mathbf{C}$, il existe u_1 tel que $v_1 = \varepsilon u_1$. Donc $[v] \in Q_+(1, \varepsilon)([u_1])$, ce qui montre que $Q_+((A, \mathbf{A}), \operatorname{Ker} F)$ est un noyau pour le diagramme $Q_+((A, \mathbf{A}), B) \rightrightarrows Q_+((A, \mathbf{A}), C)$ dans Ab.

Enfin, si e est un objet final dans $\mathbf{C}$, $Q_+((A, \mathbf{A}), e)$ est l'objet final (en fait nul) de Ab, ayant comme unique élément la classe de l'unique morphisme $A \to e$.

Proposition 2.5. *Si f est monomorphisme (respectivement isomorphisme), alors $Q_+(1, f)$ est injection (respectivement isomorphisme).*

Démonstration. Soient $f : B \to B_1$ et $[u], [v] \in Q_+((A, \mathbf{A}), B)$ tels que $[fu]=[fv]$. On peut choisir $u, v : A' \to B$, donc le fait que f soit un monomorphisme implique $u=v$. $Q_+(1, f)$ est alors une application injective.

Si f^{-1} existe, alors $Q_+(1, f)$ admet comme inverse $Q_+(1, f^{-1})$ donc $Q_+(1, f)$ est un isomorphisme.

Théorème 2.6. *Supposons que dans $\mathbf{C}$, toute limite inductive de monomorphismes est un monomorphisme. Alors $Q_+(\cdot, B)$ commute avec les limites inductives.*

Démonstration. Soit $(A_i, \mathbf{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'objets dans $\mathbf{C}_+$. On définit $\alpha : Q_+(\coprod_{i \in I}(A_i, \mathbf{A}_i), B) \to \prod_{i \in I} Q_+((A_i, \mathbf{A}_i), B)$ par $\alpha([u]) = ([u\varepsilon_i])_{i \in I}$ ou $\varepsilon_i : A_i \to \coprod_{i \in I} A_i$ sont les injections canoniques. On a $\alpha([u]+[v]) = \alpha([u+v]) =$ $=([(u+v)\varepsilon_i])_{i \in I} = ([u\varepsilon_i]) + ([v\varepsilon_i])$. Par hypothèse, tout sous-objet $A' \in \mathbf{A}$ s'écrit comme somme directe $A' = \coprod_{i \in I} A_i'$ avec $A_i' \in \mathbf{A}_i$. Ceci permet de définir :

$$\beta : \prod_{i \in I} Q_+((A_i, \mathbf{A}_i), B) \to Q_+(\coprod_{i \in I}(A_i, \mathbf{A}_i), B)$$

par $\beta(([v_i])) = [\coprod_{i \in I} v_i]$. On a :

$$\alpha(\beta(([v_i]))) = \alpha([\coprod_{i \in I} v_i]) = ([\varepsilon_i \coprod v_i]) = ([v_i]) \text{ donc } \alpha\beta = 1 \text{ et : } \beta(\alpha([u])) =$$
$$= \beta([u\varepsilon_i]) = ([\coprod_{i \in I} u\varepsilon_i]) = [u],$$

donc $\beta\alpha = 1$, ce qui prouve que $Q_+(\cdot, B)$ commute avec les sommes directes.

Soit $F : (B, \mathbf{B}) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (B_1, \mathbf{B}_1)$. Si $[u] \in Q_+((\operatorname{Coker} F, \mathbf{K}), A)$ alors :

$$Q_+(f, 1)(Q_+(p, 1)([u])) = [upf] = [upg] = Q_+(g, 1)(Q_+(p, 1)([u])).$$

Soit maintenant $[v] \in Q_+((B_1, \mathbf{B}_1), A)$ tel que : $Q_+(f, 1)([v]) = Q_+(g, 1)([v])$. Si $v : B_1' \to A$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B_1') \cap g^{-1}(B_1') \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d] & B_1' \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \operatorname{Coker} F' \arrow[d] \\
B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B_1 \arrow[r, "p"] & \operatorname{Coker} F
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont des monomorphismes. On déduit que : $v = v_1 p'$ donc $[v] = [v_1 p]$. Ceci prouve que $Q_+(((\operatorname{Coker} F, \mathbf{K}), A)$ est un noyau dans Ab pour le diagramme :

$$Q_+((B_1, \mathbf{B}_1), A) \rightrightarrows Q_+((B, \mathbf{B}), A)$$

Enfin, si $(\varphi, \varnothing)$ est un objet initial dans $\mathbf{C}_+$, alors $Q_+((\varphi, \varnothing), A) = 0$, ayant comme unique élément la classe de l'unique morphisme $\varphi \to A$.

Remarque. Tous les théorèmes de ce paragraphe restent valables en suprimant l'adjectif „additif" et en remplaçant Ab par Ens.

3. **Des objets complets. Définition 3.1.** Soient $(A, \mathbf{A})$ et $(B, \mathbf{B}) \in \operatorname{Ob} \mathbf{C}_+$. On dit que $(A, \mathbf{A})$ est $(B, \mathbf{B})$-complet si, quels que soient $u : A' \to B$, avec $A' \in \mathbf{A}$ et $B' \in \mathbf{B}$, on a $u^{-1}(B') \in \mathbf{A}$. Lorsque $(A, \mathbf{A})$ est $(A, \mathbf{A})$-complet, on dit simplement que $(A, \mathbf{A})$ est complet.

Remarquons que $(A, \{A\})$ est complet, et $(A, \mathbf{P}(A))$ est $(B, \mathbf{B})$-complet, quel que soit $(B, \mathbf{B})$.

Théorème 3.2. a) *Si $(A, \mathbf{A}_i)$ sont $(B, \mathbf{B})$ complets, alors $(A, \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i)$ est $(B, \mathbf{B})$ complet. En particulier, pour tout objet $(A, \mathbf{A})$, il existe un plus petit objet $(B, \mathbf{B})$ complet, designé par $(A, \varepsilon_{(B, \mathbf{B})}(A, \mathbf{A}))$, tel que $\mathbf{A} \subseteq \varepsilon_{(B, \mathbf{B})}(A, \mathbf{A})$.*

b) *Si $(A, \mathbf{A}_i)$ sont complets, alors $(A, \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i)$ est complet. En particulier, pour tout objet $(A, \mathbf{A})$ il existe un plus petit objet complet, noté $(A, \varepsilon(A, \mathbf{A}))$, tel que $\mathbf{A} \subseteq \varepsilon(A, \mathbf{A})$.*

Démonstration. a) Soient $A' \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$ et $u : A' \to B$. Comme $A' \in \mathbf{A}_i$, $\forall i \in I$, on déduit que, pour tout $B' \in \mathbf{B}$ on a $u^{-1}(B') \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$, ce qui montre que $(A, \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i)$ est $(B, \mathbf{B})$-complet.

b) Soient $A' \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$ et $u : A' \to A$. Soit $A'' \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Comme $A' \in \mathbf{A}_i$, $\forall i \in I$ et $A'' \in \mathbf{A}_i$, $\forall i \in I$ on a $u^{-1}(A'') \in \mathbf{A}_i$ $\forall i \in I$, donc $u^{-1}(A'') \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$ ce qui prouve bien que $(A, \bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i)$ est encore complet.

L'interêt de la notion d'objet complet est donné par le résultat suivant.

Théorème 3.3. *Si* $(A, \mathbf{A})$ *est* $(B, \mathbf{B})$ *complet, il existe un morphisme fonctoriel :*

$$\mu : Q_+((A, \mathbf{A}), B) \times Q_+((B, \mathbf{B}), C) \to Q_+((A, \mathbf{A}), C).$$

Démonstration. Soient $[u] \in Q_+((A, \mathbf{A}), B)$, $[v] \in Q_+((B, \mathbf{B}), C)$ de représentants $u : A' \to B$, resp. $v : B' \to C$. Alors $u^{-1}(B') \in \mathbf{A}$ donc $vu : u^{-1}(B') \to C$ est défini et $[vu] \in Q_+((A, \mathbf{A}), C)$. On pose $\mu([u], [v]) = [vu]$. Si $u_1 \in [u]$ et $v_1 \in [v]$, il est clair que $v_1 u_1 \in [vu]$ donc μ est bien défini. De plus, μ est évidemment un homomorphisme de groupes. Enfin, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q_+((A, \mathbf{A}), B) \times Q_+(B, \mathbf{B}), C) & \xrightarrow{\mu} & Q_+((A, \mathbf{A}), C) \\ \Big\downarrow Q_+(f, 1) \times Q_+(1, g) & & \Big\downarrow Q_+(f, g) \\ Q_+((A_1, \mathbf{A}_1), B) \times Q_+((B, \mathbf{B}), C_1) & \xrightarrow{\mu} & Q_+((A_1, \mathbf{A}_1) C_1) \end{array}$$

(sur les deux cotés $([u], [v]) \to [gvuf]$) montre que μ est un morphisme fonctoriel.

Les propositions suivantes apportent quelques précisions sur la structure des objets complets.

Proposition 3.4. *Notons le filtre engendré par la base* $\{A'\}$, *par la même notation. Alors :*

$$\varepsilon(A, \mathbf{A}) = \bigcup_{A' \in \mathbf{A}} \varepsilon(A, \{A'\})$$

$$\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B, \mathbf{B}) = \bigcup_{A' \in \mathbf{A}} \varepsilon_{(A, \{A'\})}(B, \mathbf{B})$$

Démonstration. Il est clair que

$$\varepsilon(A, \mathbf{A}) = \bigcup_{A' \in \varepsilon(A, \mathbf{A})} \varepsilon(A, \{A'\})$$

donc $\bigcup_{A' \in \mathbf{A}} \varepsilon(A, \{A'\}) \subseteq \varepsilon(A, \mathbf{A})$. Il suffit de montrer que $\bigcup_{A' \in \mathbf{A}} \varepsilon(A, \{A'\})$ est complet. Soient $u : A_1' \to A$ et $A_2' \in \varepsilon(A, \{A'\})$ et $A_1' \in \varepsilon(A, \{A''\})$. On a $A_1', A_2' \in \varepsilon(A, \{A' \cap A''\})$, donc $u^{-1}(A_2') \in \varepsilon(A, \{A' \cap A''\})$. Mais $A' \cap A'' \in \mathbf{A}$ d'où la conclusion.

De même, on a :

$$\bigcup_{A' \in \mathbf{A}} \varepsilon_{(A, \{A'\})}(B, \mathbf{B}) \subseteq \varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B, \mathbf{B}),$$

donc il suffit de montrer que $\bigcup_{A' \in \mathbf{A}} \varepsilon_{(A, \{A'\})}(B, \mathbf{B})$ est $(A, \mathbf{A})$-complet Soient donc $u : B_1' \to A$ avec $B_1' \in \varepsilon_{(A, \{A''\})}(B, \mathbf{B})$ et $A_2' \in \varepsilon(A, \{A'\})$. On a $B_1' \in \varepsilon_{(A, \{A' \cap A''\})}(B, \mathbf{B})$ et $A_2' \in \varepsilon(A, \{A' \cap A''\})$ donc

$$u^{-1}(A_2') \in \varepsilon_{(A, \{A' \cap A''\})}(B, B), \text{ c.q.f.d.}$$

Proposition 3.5. *Il existe une suite* $\mathbf{B}^n$ *de filtres, telle que :*

$$\mathbf{B}^n \subseteq \mathbf{B}^{n+1},$$

$$\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B, \mathbf{B}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}^n,$$

si $f : B_1 \to B_2$ *et* $f^{-1}(\mathbf{B}_2) \subseteq \mathbf{B}_1$ *alors :*

$$f^{-1}(\mathbf{B}_2^n) \subseteq \mathbf{B}_1^n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Démonstration. On définit les $\mathbf{B}^n$ par induction. On pose $\mathbf{B}^1 = \mathbf{B}$. Si $\mathbf{B}^n$ est construit, soient $B_1', \ldots, B_p' \in \mathbf{B}^n$, $u_i : B_i' \to A$ et $A_i' \in \mathbf{A}$ $(i = 1, \ldots, p)$. On note $\mathbf{B}^{n+1}$ l'ensemble de tous les sous-objets de B, contenant un sous-objet de la forme : $u_1^{-1}(A_1') \cap \ldots \cap u_p^{-1}(A_p')$. Il est clair que $\mathbf{B}^n \subseteq \mathbf{B}^{n+1}$ (si Hom $(B', A) = \varnothing$, on convient de considérer $B' \in \mathbf{B}^{n+1}$). On prouve sans difficulté que $\mathbf{B}^{n+1}$ ainsi construit est un filtre. Si $B_2' \in \mathbf{B}_2^n$ contient le sous-objet $u_1^{-1}(A_1') \cap \ldots \cap u_p^{-1}(A_p')$ alors $f^{-1}(B_2')$ contient le sous-objet $(u_1 f)^{-1}(A_1') \cap \ldots \cap (u_p f)^{-1}(A_p')$ ce qui montre que $f^{-1}(\mathbf{B}_2^n) \subseteq \mathbf{B}_1^n$. L'inclusion $\mathbf{B}^n \subseteq \varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B, \mathbf{B})$ résulte du fait que $\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B, \mathbf{B})$ est $(A, \mathbf{A})$-complet et de la construction du $\mathbf{B}^n$. Il reste à prouver que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}^n$ est $(A, \mathbf{A})$ complet. Soient donc $u : B' \to A$ avec $B' \in \mathbf{B}^n$ et $A' \in \mathbf{A}$. Par construction, $u^{-1}(A') \in \mathbf{B}^{n+1}$, donc $u^{-1}(A') \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}^n$.

Corollaire 3.6. *Il existe une suite* $\mathbf{B}^n$ *de filtres, telle que :*

$$\mathbf{B}^n \subseteq \mathbf{B}^{n+1},$$

$$\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B, \{B\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}^n,$$

si $f : B_1 \to B_2$ *alors* $f^{-1}(\mathbf{B}_2^n) \subseteq \mathbf{B}_1^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 3.7. *Il existe une suite* $\mathbf{A}^n$ *de filtres, telle que :*

$$\mathbf{A}^n \subseteq \mathbf{A}^{n+1},$$

$$\varepsilon(A, \mathbf{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^n.$$

Démonstration. Construction semblable à celle de prop. 3.5.

Théorème 3.8. $\varepsilon_{(A, \mathbf{A})} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}_+$ *est un foncteur additif, pleinement fidèle.* $\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(\mathbf{C})$ *est une sous-catégorie pleine de* $\mathbf{C}_+$, *isomorphe à* $\mathbf{C}$.

Démonstration. $\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B)$ est le plus petit objet $(B, \mathbf{B})$ qui est $(A, \mathbf{A})$ — complet. Pour $f : B_1 \to B_2$, on peut définir $\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(f) = f$ et le cor. 3.6. assure alors qu'on obtient un foncteur à valeurs dans $\mathbf{C}_+$. Il est clair que ce foncteur est additif et pleinement fidèle. Puisque $\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}(B)$ est injectif sur les objets, la seconde assertion est prouvée.

Théorème 3.9. $\varepsilon_{(A, \mathbf{A})}$ *est exact à gauche.*

Démonstration. Soit $0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B''$ une suite exacte, $0 \to (B', \mathbf{B}') \xrightarrow{i} (B, \mathbf{B}) \xrightarrow{p} (B'', \mathbf{B}'')$ la suite correspondente. Soit $(B', \mathbf{K})$ le noyau de p dans $\mathbf{C}_+$. On sait que i est morphisme aussi dans $\mathbf{C}_+$, donc $i^{-1}(\mathbf{B}) = \mathbf{K} \subseteq \mathbf{B}'$.

On sait que $B_1' \in \mathbf{K}$ si et seulement si $B_1' \in \mathbf{B}$ et $B_1' \subseteq B'$. Soient $B_1' \in \mathbf{K}$, $u : B_1' \to A$ et $A' \in \mathbf{A}$. On a $B_1' \in \mathbf{B}$ donc $u^{-1}(B_1') \in \mathbf{B}$. On a aussi $u^{-1}(B_1') \subseteq B_1' \subseteq B'$ donc $u^{-1}(B_1') \in \mathbf{K}$ ce qui prove que $\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{K}$.

Théorème 3.10. *Si $(B, \mathbf{B})$ est le plus petit objet qui est$(A, \mathbf{A})$ complet, alors $(B, \mathbf{B})$ est complet.*

Démonstration. Soient $B' \in \mathbf{B}$ et $i : B' \to B$ l'inclusion canonique. D'après le th. 3.9. $(B', i^{-1}(\mathbf{B}))$ est le plus petit objet $(A, \mathbf{A})$-complet. La prop. 3.5 implique alors $u^{-1}(\mathbf{B}) \subseteq i^{-1}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{B}$, où $u : B' \to B$ est quelconque. Ceci prouve que $(B, \mathbf{B})$ est complet.

4. **Applications à TOP.** Soit X un espace topologique. Dans tout ce qui suit, on fait la convention de désigner par $\mathrm{Sp}(X)$ l'ensemble des filtres $\mathbf{F}$ sur X qui satisfont de plus à la condition :

(iv) $$A \in \mathbf{F} \Rightarrow \text{int } A \in \mathbf{F}.$$

Théorème 4.1. $\mathrm{Sp} : \mathrm{TOP} \to \mathrm{TOP}$ *est un foncteur.*

Démonstration. Compte tenu des résultats de §1, il reste à vérifier que, quels que soient X, Y espaces topologiques et $f : X \to Y$, application continue, $\mathrm{Sp}(f)(\mathbf{F})$ vérifie (iv) si $\mathbf{F}$ vérifie cette condition. Mais ceci résulte de la continuité de f.

Notons, pour chaque $x \in X$, $i(x)$ le filtre des voisinages de x. La notation i_X sera utilisée lorsqu'il sera nécessaire de préciser l'espace X.

Théorème 4.2. $i : X \to \mathrm{Sp}(X)$ *est une application continue, ouverte sur son image.*

Démonstration. Le théorème résulte des deux formules suivantes :

$$i^{-1}(\mathbf{O}(A)) = \text{int } A$$

$$A \subseteq X \text{ ouvert} \Rightarrow i(A) = i(X) \cap \mathbf{O}(A) .$$

En effet, pour la première, on a :

$$x \in i^{-1}(\mathbf{O}(A)) \Leftrightarrow A \text{ est un voisinage de } x \Leftrightarrow x \in \text{int } A$$

Pour la seconde formule :

$$\mathbf{F} \in i(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ tel que } \mathbf{F} = i(x) \Leftrightarrow \mathbf{F} \in i(X) \text{ et } A \in \mathbf{F}$$

Théorème 4.3. *$i(X)$ est le complété T_0 de X [2]. Donc i est injective si et seulement si X est T_0 ; dans cé cas, i est homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. $i(X)$ est un espace T_0 d'après la prop. 1.9. Soit Y un espace T_0 et $f : X \to Y$ une application continue. Soit $\mathbf{F} \in i(X)$. Il existe donc $x \in X$, tel que $\mathbf{F} = i(x)$. Si $y \in X$ est tel que $\mathbf{F} = i(y)$ alors x et y ont les mêmes voisinages. Supposons $f(x) \neq f(y)$. Il existe alors un voisinage V de $f(x)$ (par exemple) tel que $f(y) \notin V$. Alors $x \in f^{-1}(V)$ et $y \notin f^{-1}(V)$, tandis que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Cette contradiction prouve que $\tilde{f}(\mathbf{F}) = f(x)$ est une application correctement définie, de $i(X)$ dans Y. Il est clair que $\tilde{f} o i = f$. Il reste encore à vérifier que, pour chaque ouvert $D \subseteq Y$:

$$\tilde{f}^{-1}(D) = i(X) \cap \mathbf{O}(f^{-1}(D)) .$$

Mais :

$\mathbf{F} \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow \tilde{f}(\mathbf{F}) \in D \Leftrightarrow \exists x \in X$ tel que $i(x) = \mathbf{F}$ et $f(x) \in D \Leftrightarrow \exists x \in X$ tel que $i(x) = \mathbf{F}$ et $x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow \exists x \in X$ tel que $i(x) = \mathbf{F}$ et $f^{-1}(D) \in \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F} \in i(X) \cap \mathbf{O}(f^{-1}(D))$.

Rappellons [2] qu'un espace topologique X est dit semirégulier s'il possède une base d'ouverts, ayant la propriété $A = \text{int cl } A$. Tout espace T_3 est evidement semi-régulier.

Lemme 4.4. *Soit Y un espace topologique, $f : X \to Y$ une application continue, avec* cl $(f(X)) = Y$.

a) *si f est un homéomorphisme local sur son image, alors on a le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Sp}(X) \\ Y \arrow[r, "i_Y"] & \mathrm{Sp}(Y) \arrow[u, "\mathrm{Sp}(f)"'] \end{tikzcd}$$

b) *si Y est semi-régulier, alors $\mathrm{Sp}(f) o i_Y$ est ouverte sur son image.*

c) *Si Y est semi-régulier et T_2, et f est homéomorphisme sur son image, alors $\mathrm{Sp}(f) o i_Y$ est homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. a) $i_Y(f(x))$ est le filtre des voisinages de $f(x)$, donc la continuité de f implique :

$$\mathrm{Sp}(f)\,[i_Y(f(x))] \subseteq i_X(x) .$$

L'inclusion inverse découle du fait que f est homéomorphisme local sur son image.

b) Notons, pour simplifier, $g = \mathrm{Sp}(f) o i_Y$. Y étant semi-régulier il suffit de vérifier que :

$$g(\text{int cl } A) = g(Y) \cap \mathbf{O}(f^{-1}(\text{int cl } A))$$

Il est clair que $g(\text{int cl } A) \subseteq g(Y)$. Si $\mathbf{F} \in g$ (int cl A). il existe $y \in$ int cl A tel que $\mathbf{F}$ = le filtre engendré par la base $f^{-1}(V)$ avec $V \in i_Y(y)$. On a donc $i_Y(y) \in$ int cl A, donc f^{-1} (int cl A) $\in \mathbf{F}$ soit $\mathbf{F} \in \mathbf{O}(f^{-1}$ (int cl A)). Inversement, soit $\mathbf{F} \in g(Y)$. Alors il existe $y \in Y$ tel que $\mathbf{F}$ soit le filtre engendré par la base des $f^{-1}(V)$, avec $V \in i_Y(y)$. Si de plus $\mathbf{F} \in \mathbf{O}(f^{-1}$ (int cl A)), alors il existe V, voisinage ouvert de y, tel que $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}$ (int cl A), ce qui implique $V \subseteq$ cl $[f(f^{-1}(V))]$. Mais : $f(f^{-1}$ (int cl A)) $\subseteq$ int cl A donc $V \subseteq$ cl int cl A, d'où $V \subseteq$ int cl A, V étant ouvert. En particulier, $y \in$ int cl A, soit $\mathbf{F} \in g$(int cl A)).

c) Y étant T_2, i_Y est injective. Si $y_1 \neq y_2$, il existe V_1, V_2 — voisinages disjoints pour y_1, y_2. On a $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$, ce qui prouve que :

$$\mathrm{Sp}(f)\,(i_Y(y_1)) \neq \mathrm{Sp}(f)\,(i_Y(y_2)) .$$

Donc, $\mathrm{Sp}(f) o i_Y$ est injective. Utilisant b), la démonstration est terminée.

Théorème 4.5. *Soient X un espace topologique, Y un espace semi-régulier et T_2 et $\varepsilon : X \to Y$ un homéomorphisme sur son image, avec* cl $(\varepsilon(X)) = Y$. *Alors il existe une application unique $f : Y \to \mathrm{Sp}(X)$ telle que :*

— *f est un homéomorphisme sur son image.*
— *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "i_X"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\ & \mathrm{Sp}X & \end{tikzcd}$$

Démonstration. ε satisfait aux hypothèses du lemme, donc il suffit de prendre $f=\mathrm{Sp}\,(\varepsilon)\circ i_Y$. L'unicité résulte du fait que $\mathrm{cl}\ \varepsilon(X)=Y$.

Théorème 4.6. *Soit X un espace semi-régulier et T_2 et $X_1\subseteq X$ un sous-espace quelconque. Alors il existe un homéomorphisme sur son image $f:\mathrm{cl}\,(X_1)\to \mathrm{Sp}(X)$.*

Démonstration. En effet, il suffit de définir $f=i_X\circ\varepsilon$, avec $\varepsilon:\mathrm{cl}(X_1)\to X$ l'inclusion canonique, et d'appliquer le lemme 4.4.

Les deux derniers résultats justifient la définition suivante.

Définition 4.7. *Soit X un espace topologique semi-régulier et T_2. On appelle bord de X toute partie $\varnothing\neq\Delta\subseteq\mathrm{Sp}(X)$, formée de filtres sans point adhérent dans X.*

Remarquons que, si X est localement compact, alors $\mathbf{F}$ est sans point adhérent dans X si et seulement si $\complement K\in\mathbf{F}$, $\forall K\subseteq X$ compact.

Le bord Δ sera dit T_2 (resp. compact) si l'espace topologique $X\cup\Delta\subseteq\mathrm{Sp}(X)$ est T_2 (resp. compact).

Proposition 4.8. *Soit Δ un bord. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Δ est T_2.*

b) *$\mathbf{F}_1\neq\mathbf{F}_2\in\Delta$, $\exists A_1\in\mathbf{F}_1$, $A_2\in\mathbf{F}_2$ tels que $A_1\cap A_2=\varnothing$.*

c) *$\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2\in\Delta$ et $\exists\mathbf{U}$ ultrafiltre sur X, plus fin que $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, alors $\mathbf{F}_1=\mathbf{F}_2$.*

Démonstration. Immédiate

5. **Correspondences entre les bords.** Soient X et Y deux ensembles et $\varphi:\mathbf{P}(X)\to\mathbf{P}(Y)$ une application monotone. On peut donc supposer $Y=\varphi(X)$. Notons :

$$\psi(B)=\bigcap_{B\subseteq\varphi(A)} A,$$

$$\psi_1(B)=\{x\in X\mid B\cap\varphi(x)\neq\varnothing\},$$

pour $B\in\mathbf{P}(Y)$.

Proposition 5.1. $\{y\in Y\mid\psi(y)=\varnothing\}=\bigcap_{x\in X}\varphi(X\setminus\{x\})$,

$$\{y\in Y\mid\psi_1(y)=\varnothing\}=Y\setminus\bigcup_{x\in X}\varphi(x).$$

Démonstration. $\psi(y)=\varnothing\Leftrightarrow\forall x\in X\ \exists A_x\subseteq X$ *tel que* $y\in\varphi(A_x)$ et $x\notin A_x\Leftrightarrow\nexists\, x\in X,\ y\in\varphi(X\setminus\{x\})\Leftrightarrow y\in\bigcap_{x\in X}\varphi(X\setminus\{x\})$.

$$\psi_1(y)=\varnothing\Leftrightarrow\forall x\in X,\ y\notin\varphi(x)\Leftrightarrow y\in Y\setminus\bigcup_{x\in X}\varphi(x).$$

Proposition 5.2. $\{y\in Y\mid \mathrm{card}\ \psi_1(y)\geqslant 2\}=\bigcup_{x\neq x'}(\varphi(x)\cap\varphi(x'))$.

Démonstration. $\mathrm{card}\ \psi_1(y)\geqslant 2\Leftrightarrow\exists x\neq x'$ tels que

$$y\in\varphi(x)\cap\varphi(x')\Leftrightarrow y\in\bigcup_{x\neq x'}(\varphi(x)\cap\varphi(x')).$$

Proposition 5.3. $\varphi(A)\subseteq\{y\mid\psi(y)\subseteq A\}$,

$$\{y\mid\psi_1(y)\leqslant A\}\subseteq\varphi(A)\cup[Y\setminus\bigcup_{x\in X}\varphi(x)].$$

Démonstration. Si $y\in\varphi(A)$, par définition $\psi(y)\subseteq A$. Si $\psi_1(y)\subseteq A$ et $\psi_1(y)\neq\varnothing$, il existe $x\in\psi_1(y)$, donc $y\in\varphi(x)$ et $x\in A$, d'ou $y\in\varphi(A)$.

En général, il n'y a pas de relation entre $\psi(y)$ et $\psi_1(y)$. Si $\mathrm{card}\,\psi_1(y)\geqslant 2$, alors $\psi(y)=\varnothing$. Si $\mathrm{card}\ \psi_1(y)=1$, alors $\psi(y)=\varnothing$ ou bien $\psi(y)=\psi_1(y)$.

Proposition 5.4. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\varphi(\varnothing)=\varnothing$; $\bigcup_{x\in X}\varphi(x)=Y$ et $\varphi(A)\cap\varphi(B)=\varphi(A\cap B)$.

b) ψ_1 est fonction et $\varphi(A)=\psi_1^{-1}(A)$.

Démonstration. a) $\Rightarrow$b) $\bigcup_{x\in X}\varphi(x)=Y$ et la prop. 5.1 impliquent $\psi_1(y)\neq\varnothing$, $\forall y\in Y$.

De $\varphi(x)\cap\varphi(x')=\varphi(\{x\}\cap\{x'\})=\varphi(\varnothing)=\varnothing$ et $x\neq x'$ et de la prop. 5.2 on tire $\mathrm{card}\ \psi_1(y)=1$, $\forall y\in Y$. Donc, ψ_1 est fonction. De la prop. 5.3 on déduit $\psi_1^{-1}(A)\subseteq\varphi(A)$. Inversement, soit $y\in\varphi(A)$. Si $x=\psi_1(y)$, alors $y\in\varphi(x)$, donc $y\in\varphi(x)\cap\varphi(A)=\varphi(x\cap A)$ ce qui implique $x\cap A\neq\varnothing$, donc $x\in A$.

b) $\Rightarrow$ a) ψ_1 étant fonction, les propriétés de a) sont bien connues pour l'image invèrse.

Proposition 5.5. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\varphi(\varnothing)=\varnothing$; $\bigcup_{x\in X}\varphi(x)=Y$; $\varphi(\cap A_i)=\cap\varphi(A_i)$,

b) ψ est une fonction et $\varphi(A)=\psi^{-1}(A)$.

Démonstration. a) $\Rightarrow$ b) De $\varphi(\cap A_i)=\cap\varphi(A_i)$ il résulte $y\in\varphi(\psi(y))$ donc $\psi(y)$ est le plus petit ensemble A, tel que $y\in\varphi(A)$. La prop. 5.1 implique alors $\varphi(y)\neq\varnothing$, $\forall y\in Y$. De $y\in Y=\bigcup_{x\in X}\varphi(x)$ on a $\mathrm{card}\ \psi(y)=1$, $\forall y\in Y$, donc ψ est fonction. Aussi, $\psi(y)\subseteq A$ implique $y\in\varphi(\psi(y))\subseteq\varphi(A)$, donc d'après la prop. 5.3 $\varphi(A)=\psi^{-1}(A)$.

b) $\Rightarrow$ a) ψ étant fonction, les propriété de a) sont bien connues pour l'image inverse.

Corollaire 5.6. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *ψ est fonction et $\varphi(A)=\psi^{-1}(A)$,*

b) *ψ_1 est fonction et $\varphi(A)=\psi_1^{-1}(A)$.*

Dans ce cas, $\psi=\psi_1$.

Proposition 5.7. *ψ et $\psi_1:\mathbf{P}(Y)\to\mathbf{P}(X)$ sont monotones.*

Démonstration. Soit $B_1\subseteq B_2$. Si $B_2\subseteq\varphi(A)$, alors $B_1\subseteq\varphi(A)$, donc $\psi(B_1)\subseteq\psi(B_2)$. Si $B_1\cap\varphi(x)\neq\varnothing$, alors $B_2\cap\varphi(x)\neq\varnothing$ donc $\psi_1(B_1)\subseteq\psi_1(B_2)$.

Proposition 5.8. On a $\psi(\cup B_i)=\bigcup\psi(B_i)$ et

$$\psi_1(\bigcup B_i)=\bigcup\psi_1(B_i).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a $\bigcup\psi(B_i)\subseteq\psi(\bigcup B_i)$ et $\bigcup\psi_1(B_i)\subseteq\psi_1(\bigcup B_i)$. Si $x\notin\psi(B_i)$ alors $x\notin\psi(B_i)$, $\forall i\in I$. Il s'ensuit $\forall i\in I$ $\exists A_i$ tel que $B_i\subseteq\varphi(A_i)$ et $x\notin A_i$. On a :

$$\bigcup B_i \subseteq \bigcup \varphi(A_i) \subseteq \varphi(\bigcup A_i)$$

et $x \notin \bigcup A_i$, d'où $x \notin \psi(\bigcup B_i)$. Pour la dernière inclusion :

$$\psi_1(\bigcup B_i) = \{x \in X \mid (\bigcup B_i) \cap \varphi(x) \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid \exists i_0,\ B_{i_0} \cap \varphi(x) \neq \emptyset\} =$$
$$= \bigcup \{x \in X \mid B_i \cap \varphi(x) \neq \emptyset\} = \bigcup \psi_1(B_i)$$

Corollaire 5.9. $\psi(\emptyset) = \emptyset$; $\psi_1(\emptyset) = \emptyset$

$$\psi(\bigcap B_i) \subseteq \bigcap \psi(B_i)\ ;\ \psi_1(\bigcap B_i) \subseteq \bigcap \psi_1(B_i)$$

Proposition 5.10. a) $\psi(\varphi(A)) \subseteq A$. *Si* $\varphi(\bigcap A_i) = \bigcap \varphi(A_i)$ *alors* $B \subseteq \varphi(\psi(B))$.

b) *Si* $Y = \bigcup_{x \in X} \varphi(x)$ *alors* $B \subseteq \varphi(\psi_1(B))$. *Si* $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ et $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \bigcap \varphi(B)$ *alors* $\psi_1(\varphi(A)) \subseteq A$.

Démonstration. a) On a :

$$\psi(\varphi(A)) = \bigcap_{\varphi(A) \subseteq \varphi(A')} A' \leqslant A.$$

Si $\varphi(\bigcap A_i) = \bigcap \varphi(A_i)$ alors : $\varphi(\psi(B)) = \varphi(\bigcap_{B\varphi \subseteq (A)} A) = \bigcap_{B \subseteq \varphi(A)} \varphi(A) \supseteq B$

b) Soit $y \in B$. Si $Y = \bigcup_{x \in X} \varphi(x)$, alors il existe $x \in X$ tel que $y \in \varphi(x)$. Donc $x \in \{z \mid B \cap \varphi(z) \neq \emptyset\}$ d'ou :

$$y \in \varphi(x) \subseteq \varphi(\{x \mid B \cap \varphi(x) \neq \emptyset\}) = \varphi(\psi_1(B)).$$

Soit $x \notin A$. Si $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ et $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$ alors :

$$\varphi(A) \cap \varphi(x) = \varphi(A \cap \{x\}) = \varphi(\emptyset) = \emptyset,$$

donc $x \notin \{z \mid \varphi(A) \cap \varphi(z) \neq \emptyset\} = \psi_1(\varphi(A))$.

Soit maintenant Z un autre ensemble et $\varphi' : \mathbf{P}(Y) \to \mathbf{P}(Z)$ une application monotone, telle que $\varphi'(Y) = Z$. Notons $\varphi'' = \varphi' \circ \varphi$ et soient ψ', ψ'' et ψ_1', ψ_1'' les applications correspondentes.

Proposition 5.11. Si $\bigcup \varphi'(B_i) = \varphi'(\bigcup B_i)$ *alors :*

$$\psi_1(\psi_1'(C)) = \psi_1''(C),\ \forall C \in \mathbf{P}(Z)$$

Démonstration. On a :
$\psi_1(\psi_1'(C)) = \{x \in X \mid \psi_1'(C) \cap \varphi(x) \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid \exists y \in Y$ tel que $y \in \varphi(x)$ et $C \cap \varphi'(y) \neq \emptyset\}$.

Alors $\varphi'(y) \subseteq \varphi'(\varphi(x))$ donc $\psi_1(\psi_1'(C)) \subseteq \psi_1''(C)$ car $\psi_1''(C) = \{x \in X \mid C \cap \varphi'(\varphi(x)) \neq \emptyset\}$.

Réciproquement, si $\bigcup \varphi'(B_i) = \varphi'(\bigcup B_i)$ alors :

$$\psi_1''(C) = \{x \in X \mid C \cap (\bigcup_{y \in \varphi(x)} \varphi'(y)) \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid \exists y \in \varphi(x) \text{ tel que}$$
$$C \cap \varphi'(y) \neq \emptyset\} = \psi_1(\psi_1'(C)).$$

Indiquons maintenant une interprétation catégorielle des quelques conditions considérées plus haut. L'ensemble ordonné $\mathbf{P}(X)$ sera identifié à une catégorie, et les applications monotones φ, ψ,... à des foncteurs.

Proposition 5.12. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) ψ *est adjoint à gauche de* φ,
b) φ *a un adjoint à gauche.*
c) $\varphi(\cap A_i) = \cap \varphi(A_i)$.

Démonstration. a)⇒b) Evident. b)⇒c) Bien connue, compte tenu du fait que l'intersection est une limite projective. c)⇒a) On doit vérifier que $B \subset \varphi(A) \Leftrightarrow \psi(B) \subseteq A$. Si $B \subseteq \varphi(A)$ la définition de ψ implique $\psi(B) \subseteq A$. Réciproquement, si $\psi(B) \subseteq A$, alors $\psi(B) = \bigcap_{B \subseteq \varphi(A')} A'$ donne :

$$B \subseteq \cap \{\varphi(A') \mid B \subseteq \varphi(A')\} = \varphi(\{\cap A' \mid B \subseteq \varphi(A')\}) = \varphi(\psi(B)) \subseteq \varphi(A)$$

Corollaire 5.13. *Si* $\varphi(\cap A_i) = \cap \varphi(A_i)$ *et*

$$\varphi'(\cap B_i) = \cap \varphi'(B_i),\ \textit{alors}\ \psi(\psi'(C)) = \psi''(C)$$

$\forall C \in \mathbf{P}(Z)$ (notations de la prop. 5.12)

Proposition 5.14. *Si* $\varphi'(A) \subseteq \varphi(A)$, $\forall A \in \mathbf{P}(X)$ et ψ, ψ' (resp. ψ_1, ψ_1') *sont des fonctions, alors :*

$$\psi' = \psi \mid \varphi'(X) \ (\text{resp. } \psi_1' = \psi_1 \mid \varphi'(X))$$

Démonstration. Si $x \in \varphi'(X)$ alors : $\psi(x) \subseteq \psi'(x)$ et $\psi_1(x) \supseteq \psi_1'(x)$. L'hypothèse que ψ, ψ' et ψ_1', ψ_1 sont des fonctions implique l'égalité.

Remarquons enfin que, si $\varphi : X \to \mathbf{P}(Y)$ est une multifonction [1] alors on peut prolonger φ à une application monotone $\mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(Y)$ par $\varphi(A) = \bigcup_{x \in A} \varphi(x)$. On a alors $\varphi(\bigcup A_i) = \bigcup \varphi(A_i)$. Réciproquement, si $\varphi : \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(Y)$ satisfait à $\varphi(\bigcup A_i) = \bigcup \varphi(A_i)$ alors φ peut être considéré comme une multifonction. En particulier, ψ et ψ_1 sont toujours des multifonctions.

Nous allons appliquer les considérations précedentes à l'étude des corespondences entre bords. Soient Δ et Γ deux bords de l'éspace topologique X, supposé T_2 et semiregulier (cf. déf. 4.7). On définit les applications :

$$t_{\Gamma\Delta},\ s_{\Gamma\Delta} : \mathbf{P}(\Gamma) \to \mathbf{P}(\Delta)$$

par :

$$t_{\Gamma\Delta}(\Gamma') = \{\mathbf{F} \in \Delta \mid \exists \mathbf{F}_1 \in \Gamma',\ \mathbf{F} \supseteq \mathbf{F}_1\}$$

$$s_{\Gamma\Delta}(\Gamma') = \{\mathbf{F} \in \Delta \mid \exists \mathbf{U} \text{ ultrafiltre et } \mathbf{F}_1 \in \Gamma' \text{ tels que } \mathbf{U} \supseteq \mathbf{F} \text{ et } \mathbf{U} \supseteq \mathbf{F}_1\}$$

(avec $\Gamma' \subseteq \Gamma$). Les propriétés suivantes sont imédiates :

a) $t_{\Gamma\Delta}(\emptyset) = s_{\Gamma\Delta}(\emptyset) = \emptyset$

b) $t_{\Gamma\Delta}$ et $s_{\Gamma\Delta}$ sont monotones.

c) $t_{\Gamma\Delta}(\Gamma') \subseteq s_{\Gamma\Delta}(\Gamma')$, $\forall \Gamma' \in \mathbf{P}(\Gamma)$

d) $t_{\Gamma\Delta}(\bigcup \Gamma_i) = \bigcup t_{\Gamma\Delta}(\Gamma_i)$ et

$$s_{\Gamma\Delta}(\bigcup \Gamma_i) = \bigcup s_{\Gamma\Delta}(\Gamma_i).$$

Proposition 5.15. *Si* Γ *est* T_2 *alors* $t_{\Gamma\Delta}(\bigcap \Gamma_i) = \bigcap t_{\Gamma\Delta}(\Gamma_i)$.

Démonstration. L'inclusion $t_{\Gamma\Delta}(\cap \Gamma_i) \subseteq \cap t_{\Gamma\Delta}(\Gamma_i)$ étant immédiate, soit $\mathbf{F} \in \cap t_{\Gamma\Delta}(\Gamma_i)$. Pour chaque $i \in I$ il existe alors $\mathbf{F}_{1i} \in \Gamma_i$ tel que $\mathbf{F} \geqslant \mathbf{F}_{1i}$. Γ étant T_2 $\mathbf{F}_{1i}$ est unique, donc $\mathbf{F}_{1i} \in \cap \Gamma_i$.

Proposition 5.16. *Si* Γ *est compacte, alors* $s_{\Gamma\Delta}(\Gamma)=\Delta$.

Démonstration. Γ étant compacte, chaque $\mathbf{F}\in\Delta$ a un point d'accumulation sur Γ, soit $\mathbf{F}_1$. Il existe alors un ultrafiltre plus fin que $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}_1$.

Corollaire 5.17. *Si* Γ *est* T_2 *alors il existe une fonction*

$$\alpha_{\Gamma\Delta}: t_{\Gamma\Delta}(\Gamma)\to\Gamma$$

telle que $\alpha_{\Gamma\Delta}^{-1}(\Gamma')=t_{\Gamma\Delta}(\Gamma')$, $\forall\Gamma'\subseteq\Gamma$.

Le résultat suivant a été utilisé dans [6] :

Proposition 5.18. *Si* Γ *est compact et* $A\subseteq X$ *alors :*

$$\Delta\cap\mathcal{C}\mathbf{O}(A)\subseteq s_{\Gamma\Delta}(\Gamma\cap\mathcal{C}\mathbf{O}(A))$$

Démonstration. Soit $\mathbf{F}\in\Delta\cap\mathcal{C}\mathbf{O}(A)$ donc $A\notin\mathbf{F}$. Il existe un ultrafiltre $\mathbf{U}$ plus fin que $\mathbf{F}$ tel que $\mathcal{C}A\in\mathbf{U}$. Γ étant compact, il existe $\mathbf{F}_1\in\Gamma$ tel que $\mathbf{U}$ soit plus fin que $\mathbf{F}_1$. Alors $A\notin\mathbf{F}_1$, ce qui prouve que $\mathbf{F}_1\in\Gamma\cap\mathcal{C}\mathbf{O}(A)$.

L'application $t_{\Gamma\Delta}$ permet, dans certain cas, la comparaison des solutions du problème de Dirichlet, relative à deux bords. On considère, comme exemple, le cas simplifié suivant. Supposons [3] X localement compact et $\mathbf{S}$ un ensemble de fonctions $u: X\to(-\infty, +\infty]$, i.s.c. Pour chaque bord Γ et chaque fonction $f:\Gamma\to[-\infty, +\infty]$ soit :

$$H_f^\Gamma(x)=\inf\{u(x)\mid u\in\mathbf{S},\ \lim\inf_{\mathbf{F}} u\geqslant f(\mathbf{F}),\ \forall\mathbf{F}\in\Gamma\}\quad(x\in X).$$

Supposons Γ compact et soit Δ un bord, tel que $t_{\Gamma\Delta}(\Gamma)=\Delta$. Alors on a l'application $\alpha_{\Gamma\Delta}:\Delta\to\Gamma$ et l'inégalité suivante est valable :

$$H_f^\Delta\circ\alpha_{\Gamma\Delta}\leqslant H_f^\Gamma.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Berge, C. — *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, Dunod Paris, 1959.
2. Bourbaki, N. — *Topologie générale*, ch. I. Hermann, Paris, 1958.
3. Constantinescu, C., Cornea, A. — *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer, 1972.
4. Grothendieck, A., Dieudonné, J. — *Eléments de géometrie algébrique I*. Springer, 1971.
5. Mitchell, B. — *Theory of Categories*, Academic Press, New-York, London, 1965.
6. Popa, E. — *Allure de u/p à certaines frontières*, Proc. Inst. Math. Iaşi, 1976, p. 155—160.
7. Popa, E. — *Some Recent Results on Categories of R-spaces and Probabilistic Spaces and on Categorical Spectra*, Quest. Math. 2 (1977), p. 285 — 295.
8. Popescu, L. Popescu, N. — *Theory of Categories*, Sijthoof & Noordhoff, 1979.
9. Spulber, D. — *Categorii*, Iaşi, 1974.

Reçu le 8.1.1980

Faculté de Mathematiques
Université de Iaşi
6 600 — Iaşi
R. S. Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din IAŞI
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 2

SUBGRADIENTS OF CONVEX FUNCTIONS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS *)

BY

CONSTANTIN N. UDRIŞTE

Suppose M is a complete connected finite-dimensional Riemannian manifold. Let A be a totally convex set in M and $f: A\to R$ be a convex function. The set T_x^*A of cotangent vectors to A at a point x is a convex cone in T_x^*M. Let y be a generic point in A and $\gamma_{xy}(t)$, $t\in[0, 1]$, be a geodesic arc such that $\gamma_{xy}(0)=x$, $\gamma_{xy}(1)=y$, $\dot{\gamma}_{xy}(0)=X_x\in T_xA$. We denote by Γ_{xy} the set of all geodesic arcs joining the points x and y.

1. Definition. *A 1-form* $\omega_x\in T_x^*A$ *is called the subgradient of* f *at* x *if* $f(y)\geqslant f(x)+\omega_x(\dot{\gamma}_{xy}(0))$, $\forall y\in A$, $\forall\gamma_{xy}\in\Gamma_{xy}$.

2. Definition. *The set of all subgradients of* f *at* x *is called the subdifferential of* f *at* x *and is denoted by* $\partial f(x)$. *The multiform map* $\partial f: x\to\partial f(x)$ *is called the subdifferential of* f.

3. *Remark.* If f is differentiable at x, then $\omega_x=df(x)$.

4. Theorem. *The set* $\partial f(x)\subset T_x^*A$ *contains at least one element.*

Proof. Since f is convex on A, we have

$$f(y)-f(x)\geqslant\frac{f(\gamma_{xy}(t))-f(x)}{t}\geqslant Df(x;\ X_x),$$

where $t>0$ and $Df(x;\ X_x)$ is the unilateral, directional derivative [7] of f at x with respect to $\gamma_{xy}(0)=X_x$. But T_x^*A is a convex set in T_x^*M and $X_x\to\to Df(x;\ X_x)$ is a convex function [7]. Therefore [8] there exists $\omega_x\in T_x^*M$ such that $\omega_x(X_x)\leqslant Df(x;\ X_x)$ and hence $f(y)-f(x)\geqslant\omega_x(X_x)$ i.e. $\omega_x\in\partial f(x)$.

5. Theorem. *The set* $\partial f(x)$ *is convex and compact.*

Proof. Let ω_x^1, $\omega_x^2\in\partial f(x)$. Then

$$f(y)\geqslant f(x)+\omega_x^1(\dot{\gamma}_{xy}(0)),\ f(y)\geqslant f(x)+\omega_x^2(\dot{\gamma}_{xy}(0)),\ \forall y\in A,\ \forall\gamma_{xy}\in\Gamma_{xy}.$$

Multiplying the first relation by $1-s$, the second by $s\in[0, 1]$, and adding, we find $f(y)\geqslant f(x)+(1-s)\,\omega_x^1+s\omega_x^2)\,(\dot{\gamma}_{xy}(0))$, $\forall y\in A$. So $(1-s)\,\omega_x^1+s\omega_x^2\in\in\partial f(x)$ and hence $\partial f(x)$ is convex.

*) Communicated at the National Colloquium of Geometry and Topology, Cluj-Napoca September 22—24, 1978.