Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din IAŞI
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 2

OSCILLATIONS DE CERTAINS SYSTEMES DIFFERENTIELS IMPLIQUEES PAR L'EXISTENCE DES SOLUTIONS BORNEES (I)

PAR

CONSTANTIN SIMIRAD

1. Introduction. Considérons le système différentiel ordinaire du premier ordre :

$$\dot{x}_i(t)=f_i(t, x_1(t),\dots, x_n(t)), \quad i=1,\dots, n, \tag{1}$$

où les fonctions f_i sont réelles, définies sur l'espace $R\times R^n$.

Nous allons supposer que les fonctions f_i sont presque-périodiques en t, uniformément par rapport à la variable $x=(x_1,\dots, x_n)$ appartenant à des ensembles compacts de R^n.

Soit $x=(x_1,\dots, x_n)$ une solution du système différentiel (1).

Définition 1. *On appelle système associé à la solution x du système différentiel (1) la famille des systèmes différentiels linéaires et homogènes de la forme*

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, a)\, z_j(t)\,, \tag{2}$$

où

$$\varphi_{ij}(t, a) = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x(t)+su(t))\, ds, \quad u(t)=x(t+a)-x(t), \quad a\in R.$$

Définition 2. *On appelle système associé au système différentiel (1) la famille des systèmes différentiels linéaires et homogènes de la forme :*

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, x, y)\, z_j(t), \tag{3}$$

où

$$\varphi_{ij}(t, x, y) = \int_0^1 \partial f_i/\partial x_j\,(t, y(t)+su(t))\, ds, \quad u(t)=x(t)-y(t),$$

x étant une solution du système différentiel (1) et y étant soit une autre solution du système différentiel (1), soit une fonction de la forme $x(t+a)$, a étant un paramètre réel.

On observe que, dans le cas où le système différentiel (1) est un système linéaire de la forme

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j(t) + b_i(t),$$

le système associé à la solution x et le système associé au système (1) sont les mêmes, plus précisément, ils coïncident avec le système homogène

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, z_j(t).$$

Dans la suite nous allons montrer que certaines propriétés des systèmes associés impliquent des oscillations du système différentiel (1), en élargissant, quelques résultats de A. Halanay [3] au cas des systèmes différentiels non-linéaires.

2. Quelques propriétés de certaines familles de systèmes différentiels linéaires. Soit la famille des systèmes différentiels :

$$\dot{x}_i^a(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, a)\, x_j^a(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

où $a \in R$ et φ_{ij} sont des fonctions réelles et bornées, définies sur $R \times R$.

Par $B(t, t_0, a)$ nous allons désigner la matrice fondamentale des solutions du système (4), c'est à dire la matrice qui satisfait au système différentiel

$$\begin{cases} \dot{B}(t, t_0, a) = \varphi(t, a)\, B(t, t_0, a), \\ B(t_0, t_0, a) = I \end{cases} \tag{5}$$

par le symbôle I nous avons noté la matrice unité du type $n \times n$ et par $\varphi(t, a)$ la matrice $(\varphi_{ij}(t, a))_{n \times n}$.

Lemme 1. *Supposons qu'il existe deux constantes positives* α, β, *indépendantes de* a, *telles que*

$$|B(t, t_0, a)| \leqslant \beta e^{-\alpha(t - t_0)}, \quad \forall t \geqslant t_0, \tag{6}$$

alors, quel que soit a, il existe une fonction Liapunov $V(t, a)$ et deux constantes μ, M, indépendantes de a, telles que

$$\mu |x^a|^2 \leqslant (V(t, a)\, x^a, x^a) \leqslant M |x^a|^2, \tag{7}$$

quel que soit le vecteur x^a, solution du système (4),

Démonstration. La démonstration de ce lemme est toute à fait analogue à la démonstration du théorème 1.6″ de [4] p. 48.

Considérons une forme quadratique $(W(t)\, x, x)$ ayant la propriété suivante :

$$\lambda_m(x, x) \leqslant (W(t)\, x, x) \leqslant \lambda_M(x, x) \tag{8}$$

où $\lambda_m > 0$, λ_m et λ_M étant la plus petite et respectivement la plus grande valeur propre.

Pour a fixée et x^a une solution du système (4), nous allons définir

$$(V(t, a)\, x^a, x^a) = \int_t^\infty (W(s) B(s, t, a)\, x^a, B(s, t, a)\, x^a)\, ds$$

et donc, la matrice $V(t, a)$ est donée formellement, par la relation

$$V(t, a) = \int_t^\infty B^*(s, t, a)\, W(s)\, B(s, t, a)\, ds. \tag{9}$$

Puisque nous avons l'inégalité (6) et $|W| \leqslant \lambda_M$, il résulte l'inégalité suivante :

$$|V(t, a)| \leqslant \int_t^\infty \beta e^{-\alpha(s-t)} \lambda_M \beta e^{-\alpha(s-t)} ds = \frac{\lambda_M \beta^2}{2\alpha},$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale de (9) par laquelle nous avons défini la fonction $V(t, a)$.

En prenant $M = \lambda_M \beta^2 / 2\alpha$, nous avons assuré l'inégalité :

$$(V(t, a)\, x^a, x^a) \leqslant M |x^a|^2,$$

la constante M étant indépendante de a.

En utilisant la partie gauche de l'inégalité (8), nous avons :

$$(V(t, a)\, x^a, x^a) \geqslant \int_t^\infty \lambda_m (B(s, t, a) x^a, B(s, t, a)\, x^a)\, ds = \lambda_m \int_t^\infty |x^a(s, t;\, x^a)|^2 ds. \tag{10}$$

Puisqu'on a

$$x^a(s, t;\, x^a) = x^a + \int_t^s \varphi(u, a) x^a(u, t;\, x^a)\, du, \tag{11}$$

et en utilisant de même le fait que $|x^a(u, t;\, x^a)| \leqslant \beta |x^a|$, pour $u \geqslant t$, on obtiendra l'inégalité suivante :

$$|x^a(s, t;\, x^a) - x^a| \leqslant \beta |x^a| \int_t^s |\varphi(u, a)|\, du. \tag{12}$$

La matrice $\varphi(t, a)$ est bornée et par la suite, en prennant un intervalle d'intégration $t \leqslant s \leqslant t + \gamma$, assez petit, de (12) il résulte :

$$|x^a(s, t;\, x^a) - x^a| \leqslant \frac{1}{2} |x^a|, \tag{13}$$

inégalité qui nous conduit à :

$$|x^a(s, t;\, x^a| \geqslant |x^a| - |x^a(s, t;\, x^a) - x^a| \geqslant \frac{1}{2} |x^a|.$$

En revenant à l'inégalité (10), nous avons :

$$(14)\qquad \begin{aligned}(V(t,a)\,x^a,\ x^a) &\geqslant \lambda_m \int_t^{\infty} |x^a(s,t;\ x^a)|^2\,ds \geqslant \\ &\geqslant \lambda_m \int_t^{t+\gamma} |x^a(s,t;\ x^a)|^2\,ds \geqslant \frac{\lambda_m \gamma}{4}\,|x^a|^2\end{aligned}$$

et en choisissant $\mu=\lambda_m\gamma/4$, l'affirmation du lemme 1 résulte.

On remarque le fait que si la constante β est dépendante de a, alors la constante γ sera aussi dépendante de a, puisque la constante γ est choisie de manière que l'inégalité (12) conduise à l'inégalité (13).

Soit la famille des systèmes différentiels linéaires et non-homogènes de la forme suivante :

$$(15)\qquad \dot{x}_i^a(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t,a)\,x_j^a(t) + f_i(t,a),$$

où les fonctions φ_{ij}, f_i sont supposées bornées pour $t\geqslant 0$, $\forall a\in R$.

Lemme 2. *Supposons qu'il existe deux constantes positives α, et β, indépendantes du paramètre a, telles que l'inégalité (6) soit vraie ; alors toutes les solutions du système (15) sont bornées pour $t\geqslant 0$, $a\in R$. De plus, on aura l'inégalité*

$$(16)\qquad |x^a(t)| \leqslant K \sup_{t\geqslant 0} |f(t,a)|,$$

la constante K étant indépendante du paramètre a.

Démonstration. En utilisant le lemme de [4] p. 222 au système différentiel (15), on obtiendra l'inégalité (16) où la constante K est:

$$K = \frac{2M^{3/2}}{\mu^{1/2}},$$

les constantes μ et M étant définies dans la démonstration du lemme 1 et par conséquent K est indépendante de a.

3. Oscillations du système (1) impliquée par les solutions bornées. **Théorème 1.** *Si :*

1°. les dérivées $\partial f_i/\partial x_j$ définies et continues sur $R\times R$ sont bornées sur tout ensemble de la forme $R\times K$, où K est un compact quelconque de R^n,

2°. le système (1) a une solution bornée x,

3°. le système associé à la solution x a la propriété qu'il existe deux constantes positives α, β, indépendantes de a, telles que soit vraie l'inégalité (6); alors le système différentiel (1) a une solution presque-périodique,

Démonstration. Dans l'inégalité (6), par $B(t,t_0,a)$ nous avons noté, cette fois, la matrice fondamentale du système (2).

Soit $a\in R$ et notons $u(t)=x(t+a)-x(t)$, x étant la solution bornée du système (1). Nous avons :

$$(17)\qquad \dot{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t,a)\,u_j(t) + f_i(t+a,x(t+a)) - f_i(t,x(t+a))$$

où les fonctions φ_{ij}, résultées par l'application du lemme de Hadamard (voir [6] p. 186), ont la même signification comme dans le système différentiel (2).

Soit z la solution du système différentiel (2) dans les conditions initiales $z(0)=u(0)=x(a)-x(0)$. Notons $v(t)=u(t)-z(t)$, alors $v(0)=0$ et de plus, la fonction v satisfait au système différentiel :

$$(18)\qquad \dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t,a)v_j(t) + f_i(t+a,x(t+a)) - f_i(t,x(t+a)).$$

On peut appliquer au système (18) le lemme 2, qui nous conduit à l'inégalité suivante :

$$(19)\qquad |v(t)| \leqslant K \sup_{t\in R} |f(t+a,x(t+a)) - f(t,x(t+a))|.$$

où la constante K est indépendante du paramètre a. Choisissons a une $\varepsilon/2K$ presque-période de la fonction f et alors nous obtiendrons l'inégalité suivante :

$$(20)\qquad |v(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ \forall t\geqslant 0.$$

D'autre part on a l'inégalité $|z(t)|\leqslant \beta e^{-\alpha t}|z(0)|$ et puisque $z(0)$ est bornée d'une borne suppérieure, indépendante de a, il résulte que, quel que soit $\varepsilon/2>0$, il existe $T(\varepsilon)$, telle que $|z(t)|\leqslant\varepsilon/2$, $\forall t\geqslant T(\varepsilon)$. Par conséquent, compte tenu de la manière dont nous avons définie la fonction v et de l'inégalité ci-dessus, il résulte :

$$(21)\qquad |u(t)| \leqslant \varepsilon,\quad \forall t\geqslant T(\varepsilon).$$

L'inégalité (21) affirme que la fonction x est presque-périodique à l'avenir (asymptotiquement presque-périodique). Du théorème fondamental de Fréchet, on aura $x(t)=u(t)+w(t)$, où la fonction u est presque-périodique et la fonction w a la propriété que $\lim_{t\to\infty} w(t)=0$.

D'autre part, on a $\dot{x}(t)=\dot{u}(t)+\dot{w}(t)=f(t,u(t))+f(t,u(t)+w(t))-f(t,u(t))$ et puisque $\lim_{t\to\infty}[f(t,u(t)+w(t))-f(t,u(t))]=0$, il résulte que la fonction $\dot{x}$ est une fonction presque-périodique à l'avenir (puisque la fonction $f(t,u(t))$ est presque-périodique). Conformément au théorème 3.3 de [7] p. 21 on a :

$$\dot{u}(t) = f(t,u(t)),$$

ce qui implique que la fonction u est une solution presque-périodique du système (1) (voir [1]).

Le théorème 1 n'assure pas l'unicité de la solution presque-périodique du système (1). Le théorème suivant va établir un résultat concernant l'unicité de la solution presque-périodique et le comportament de cette solution à l'avenir.

Par $B(t, t_0)$ nous allons comprendre la matrice fondamentale du système (3).

Théorème 2. Si :

1°. *les dérivées $\partial f_i/\partial x_j$ définies et continues sur $R\times R^n$ sont bornées sur $R\times K$, K étant un compact quelconque de R^n,*

2° *le système (1) a une solution bornée x,*

3°. *il existe deux constantes positives α, β, telles que*

$$|B(t, t_0)| \leqslant \beta e^{-\alpha(t-t_0)},$$

quelle que soit la paire (x, y),
alors le système (1) a une solution unique presque-périodique qui est uniformément asymptotiquement stable.

Démonstration. Les conditions du théorème 1 sont satisfaites et par suite il existe une solution presque-périodique. Soit la fonction u la solution presque-périodique qui est assurée par l'existence de la solution bornée x. Supposons que le système (1) a encore une solution presque-périodique, disons la fonction v. Posons $p_i(t)=u_i(t)-v_i(t)$ et alors le système (1) nous conduit au système suivant :

$$\dot{p}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, u, v)\, p_j(t), \tag{3'}$$

où les fonctions φ_{ij} sont définies de la même manière que dans le système (3).

Puisque la matrice fondamentale est bornée, on aura l'inégalité suivante :

$$|p(t)| \leqslant \beta e^{-\alpha t}|p(0)|, \tag{22}$$

d'où il résulte que $\lim_{t\to\infty} p(t)=0$, c'est à dire la fonction $u(t)-v(t)$ est une fonction presque-périodique ayant la limite zéro, lorsque $t\to\infty$. La seule fonction presque-périodique ayant la limite zéro à l'infini est la fonction zéro et donc $u(t)\equiv v(t)$.

Soit u la solution presque-périodique du système (1), dans les conditions initiales $u_i(t_0)=u_i^0$ et v une autre solution du (1), avec les conditions initiales $v_i(t_0)=v_i^0$, alors on a :

$$\dot{u}_i(t) - \dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, u, v)\,(u_j(t) - v_j(t)). \tag{23}$$

Puisque la matrice fondamentale du système (3) satisfait à l'inégalité donée dans l'hypothèse 3°, on aura :

$$|u(t) - v(t)| \leqslant |B(t, t_0)|\cdot|u^0 - v^0| \leqslant \beta|u^0 - v^0|\, e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{24}$$

L'inégalité (24) implique que la solution u est uniformément asymptotiquement stable. De ce théorème il résulte que toute solution du système (1) est presque-périodique à l'avenir.

Il est à remarquer que les hypothèses 3° des théorèmes 1 et 2 font que ces deux théorèmes aient un intérêt plus théorique que pratique. Dans ce qui suit, nous allons donner une condition, assez simple à vérifier, impliquant les deux hypothèses des théorèmes 1 et 2.

Supposons qu'il existe une matrice de fonctions continues $G=(g_{ij})_{n\times n}$, $g_{ij}: R\to R$, telle que :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, x) \leqslant g_{ii}(t), \quad \forall i = 1,\dots, n, \ \forall(t, x), \\ &\left|\frac{\partial f_i}{x_j}(t, x)\right| \leqslant g_{ij}(t), \quad \forall i\neq j, \ \forall(t, x). \end{aligned} \tag{I}$$

Par la norme d'un vecteur x nous allons comprendre $|x|=\sum_i |x_i|$ et par la norme d'une matrice $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $|A|=\sup_k \sum_i |a_{ik}|$. D'après [5], par la norme logarithmique d'une matrice A, notée par $\mu(A)$, on comprend la limite:

$$\mu(A) = \lim_{h\to 0+} \frac{|1 - hA| - 1}{h}.$$

Dans le cas où on utilise les normes ci-dessus, on a :

$$\mu(A) = \sup_k \left(\operatorname{Re} a_{kk} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}|\right).$$

Les inégalités (I) impliquent les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \varphi_{ii}(t, x, y) \leqslant g_{ii}(t), \quad \forall i = 1,\dots, n, \ \forall(t, x, y), \\ |\varphi_{ij}(t, x, y)| \leqslant g_{ij}(t), \quad \forall i\neq j, \ \forall(t, x, y) \end{cases} \tag{I'}$$

et par conséquent on aura $\mu(\varphi)\leqslant\mu(G)$.

Un théorème de L o z i n s k i [5] dit que, si on a le système différentiel $\dot{x}(t)=a(t)x(t)$, $a=(a_{ij})_{n\times n}$, et $A(t, s)$ est la matrice fondamentale, alors on a l'inégalité suivante :

$$|A(t, s)| \leqslant \exp\int_s^t \mu(a(s))\, ds.$$

Nous avons $\mu(\varphi)\leqslant\mu(G)$ et alors, si $B(t, s)$ est la matrice fondamentale du système (3), on aura :

$$|B(t, s)| \leqslant \exp\int_s^t \mu(\varphi(u))\, du \leqslant \exp\int_s^t \mu(G(u)\, du.$$

Théorème 3. *Si*

$$\alpha > 0 \text{ et } \int_s^t \mu(G(u))\, du \leqslant -\alpha(t-s), \quad \forall t \geqslant s,$$

alors les hypothèses 3° des théorèmes 1 et 2 sont vraies.

La démonstration de ce théorème résulte aisément, puisqu'on a :

$$|B(t, s)| \leqslant e^{-\alpha(t-s)}, \quad \forall t \geqslant s.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Coppel, W.A. — *Almost periodic property of ordinary differential equations.* Ann. Mat. Pura Appl. 76 (1977) p. 27 — 49.
2. — *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations.* D.C. Heath and Company Boston, 1965.
3. Halanay, A. — *Pocti-periodiceskie resenija nelineinyh sistem s'malym parametrom.* J. cistoi i prikl. mat. Acad. R.P.R. 1, 2, (1956) p. 49 — 60.
4. — *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.* Ed. Acad. R.P.R. 1963.
5. Lozinskii, M.S. — *Ocenika progresnosti cislenogo integrirovanija obyknovennyh differencial'nyh uravnenii* 1. Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat. 5 (6) (1958) p. 52 — 90.
6. Pontreaghin, L.S. — *Obyknovennie differencial'nye uravnenija.* Izd. Nauka, Moskva, 1970.
7. Yoshizawa, T. — *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions.* Springer, Verlag, New-York, 1975.

Reçu le 20.IX.1979

Centre d'Astronomie et de Science Spatiales Iași, R.S. Roumanie

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din IAȘI
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 2

ON ABSTRACT MEASURE DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

S. R. JOSHI and S. G. DEO

1. **Introduction.** Recently, Haimovici [4] and R.R. Sharma [6] have considered differential equations in which an ordinary derivative is replaced by a derivative of a set function, and as a result, the solutions happen to be signed measures. Such differential equations may be called abstract measure differential equations ($AMDE$).

In the present paper we deal with an $AMDE$ involving a delay and study some basic problems, such as existence and uniqueness of solutions, extension of solutions, maximal and minimal solutions. The main tool is the application of fixed point theorems due to Banach, Schauder and Tarski. We also obtain a differential inequality and a local stability result. Examples are given to illustrate some of the ideas involved in the theory.

2. **Preliminaries.** Let X be a real Banach space with any convenient norm $\|\,.\,\|$. For any two points x, y in X, the segment $\overline{xy}$ is defined by

$$\overline{xy} = \{z \in X : z = x + r(y - x),\ 0 \leqslant r < 1\}.$$

Let x_0 and y_0 be two fixed points in X such that $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, and $\overline{Oy_0} \subset \overline{Ox_0}$ where 0 is the zero vector in X. Let z be a point of X, such that $\overline{Ox_0} \subset \overline{Oz}$. For this z and $x \in \overline{y_0 z}$, define the sets $\overline{S}_x$ and S_x as follows :

$$\overline{S}_x = \{rx : -\infty < r \leqslant 1\},\ S_x = \{rx : -\infty < r < 1\}.$$

For $x_1, x_2 \in \overline{y_0 z}$, we write $x_1 \leqslant x_2$ (or $x_2 \geqslant x_1$) if $\overline{y_0 x_1} \subset \overline{y_0 x_2}$. Let the positive number $\|x_0 - y_0\|$ be denoted by w. For each $x \in \overline{x_0 z}$, $z \geqslant x_0$, let x_w denote, that element of $\overline{y_0 z}$ for which the relations $x_w \leqslant x$ and $\|x - x_w\| = w$ hold. Note that x_w and wx are not the same unless $w = 0$ and $x = 0$.

Let M_0 be the smallest ∂-algebra on $\overline{S}_{x_0}$ containing $\{x_0\}$ and the sets $\overline{S}_x$, $x \in \overline{y_0 x_0}$. For any $z \geqslant x_0$, let M_z denote the smallest ∂-algebra defined on S_z, containing M_0 and the sets $\overline{S}_x$, $x \in \overline{x_0 z}$. For any set S in X and a ∂-algebra M on S, let the symbol $ca(S, M)$ denote the space of all finite signed measures. It is known that $ca(S, M)$ is a Banach space, with respect to the norm $\|\,.\,\|$ given by

$$\|p\| = |p|\,(S),\ p \in ca(S, M),$$