20. Снеснных В. М. — *Обобщенная связность в векторном расслоении*, Укр. Мат. Ж. 5, т. 3, 1978, 685—689.
21. Szybiak, A. — *Covariant differentiation of geometric objects*, Dissertationes Math. LVI, 1967.
22. Szybiak, A. — *Generalized tangent bundles*. Bull. Acad. Pol. Sci. XVII, 5, 1969, 289—297.
23. Vamanu, E. — *Cvasi-conexiuni pe varietăți diferențiabile*. An. șt. Univ. Iași, XVI, (1970), 383—388.
24. Wong, Y-Ch. — *Linear connections and quasi-connections on a differentiable manifold*, Tohoku Math. J., 14, 1, (1962), 48—63.

*Received 15. VI. 1980*

*Institute of Mathematics, UMCS*
*plac M. Curie-Sklodowskiej 1*
*20—031 Lublin*
*Poland*

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al.I.Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s.I a, 1981, f.2

# APPLICATIONS QUASI-CONFORMES SUR DES PRODUITS FINIS D'ESPACES NORMÉS

PAR

SILVIU CRĂCIUNAŞ

Dans cet ouvrage, on établit, à partir d'un $n$-uple d'homéomorphismes sur des espaces normés réels quelques résultats concernant la liaison entre la quasi-conformité des applications composantes dans le sens de la définition métrique et de la définition avec des dérivées scalaires) et la quasi-conformité de l'application produit.

Soient $E_i$, $i=\overline{1, n}$ des espaces normés réels et $E=\prod_{i=1}^{n} E_i$ l'espace produit sur lequel on considère la norme définie par

$$x\in E\to \|x\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\| \qquad \text{où } x_i\in E_i \quad \text{et} \quad x=(x_1, \ldots, x_n),$$

et où pour ne pas compliquer la notation on a utilisé $\|\cdot\|$ pour toutes les normes. Sur $E$ dans la topologie produit compatible avec la norme introduite, on peut considérer comme une base, les ensembles ouverts, de la forme $D=\prod_{i=1}^{n} D_i$ où $D_i$ sont des ensembles ouverts de $E_i$.

On note aussi

$$f: D=\prod_{i=1}^{n} D_i\to D^*=\prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

l'application définie par

$$x\in D\to f(x)=(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)),$$

où $f_i: D_i\to D_i^*$ est un homéomorphisme de l'ouvert $D_i\in E_i$ sur l'ouvert $D_i^*\in E_i$ $(i=\overline{1, n})$. Il est aisé de voir :

**Proposition 1.** *L'application*

$$f: D=\prod_{i=1}^{n} D_i\to D^*=\prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est un homéomorphisme sur $D$.*

Soit maintenant l'application $f$ de la proposition précédente ; on considère la dilatation locale linéaire et les dérivées scalaires définies respectivement par les relations

$$\delta_L(x, f) = \lim_{r\to 0} \frac{L(x, f, r)}{l(x, f, r)},$$

$$D^-f(x) = \lim_{\substack{x'\to x\\ x'\neq x}} \inf \frac{\|f(x')-f(x)\|}{\|x'-x\|}, \quad D^+f(x) = \lim_{\substack{x'\to x\\ x'\neq x}} \sup \frac{\|f(x')-f(x)\|}{\|x'-x\|}$$

où pour $r$ suffisamment petit, on a noté

$$L(x, f, r) = \sup\{\|f(x')-f(x)\| ; \|x'-x\| = r\}$$
$$l(x, f, r) = \inf\{\|f(x')-f(x)\| ; \|x'-x\| = r\}.$$

Soit $K \geqslant 1$.

**Définition 1.** *On dit que l'application*

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est K-quasi-conforme dans le sens de la définition métrique, si*

$$\delta_L(x, f) \leqslant K$$

*quel que soit* $x \in D$.

**Définition 2.** *On dit que l'application*

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est K-quasi-conforme dans le sens de la définition avec des dérivees scalaires, si les conditions*

$$(i)\ D^-f(x) > 0,\ D^+f(x) < \infty, \qquad \forall x \in D,$$
$$(ii)\ D^+f(x) \leqslant K \cdot D^-f(x), \qquad \forall x \in D$$

*sont vérifiées.*

*Si f vérifie la condition (i), on dit que f est non-dégénérée sur D.*

**Théorème 1.** *Si*

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est un homéomorphisme K-quasi-conforme dans le sens de la définition métrique, alors les applications facteurs* $f_i : D_i \to D_i^*$ *sont des homéomorphismes K-quasi-conformes dans le sens de la même définition.*

*Démonstration.* Soit pour un $i$ arbitraire $1 \leqslant i \leqslant n$ un élément $x_i^0 \in D_i$.

Soit $x_0 \in D$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ où pour $j \neq i$ $x_j^0$ sont des éléments arbitraires de $D_j$. Pour $x_i \in D_i$ arbitraire, on note par $x^{(i)}$ l'élément de $D$ donné par

$$x^{(i)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0).$$



On a, évidement, les égalités

$$(1) \qquad \begin{aligned} \|x^{(i)} - x_0\| &= \|x_i - x_i^0\|, \\ \|f(x^{(i)}) - f(x_0)\| &= \|f_i(x_i) - f_i(x_i^0)\|. \end{aligned}$$

Donc, si on prend $x_i \in D_i$ arbitraire tel que $\|x_i - x_i^0\| = r$, pour $r$ suffisamment petit, on obtient les inégalités :

$$l(x_0, f, r) \leqslant \|f(x^{(i)}) - f(x_0)\| = \|f_i(x_i) - f_i(x_i^0)\| \leqslant L(x_0, f, r),$$

et donc :

$$l(x_0, f, r) \leqslant l(x_i^0, f_i, r) \leqslant L(x_i^0, f_i, r) \leqslant L(x_0, f, r).$$

L'application

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

étant $K$-quasi-conforme, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe $r(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $r$, $0 < r < r(\varepsilon)$, on a

$$\frac{L(x_0, f, r)}{l(x_0, f, r)} < K + \varepsilon.$$

Donc

$$\frac{L(x_i^0, f_i, r)}{l(x_i^0, f_i, r)} < K + \varepsilon.$$

Si $r$ tend vers 0, il résulte que

$$\delta_L(x_i^0, f_i) < K + \varepsilon,$$

c'est-à-dire, $f_i$ est $K$-quasi-conforme dans le sens de la définition metrique.

**Théorème 2.** *Si*

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est un homéomorphisme K-quasi-conforme dans le sens de la définition avec des dérivées scalaires, alors les applications facteurs* $f_i : D_i \to D_i^*$ *sont des homéomorphismes K-quasi-conformes dans le sens de la même définition.*

*Démonstration.* Avec les notations du théorème précédent, les relations (1) sont évidemment vérifiées.

En utilisant les définitions des dérivées scalaires, on obtient

$$D^+f_i(x_i^0) = \lim_{\substack{x_i\to x_i^0\\ x_i\neq x_i^0}} \sup \frac{\|f_i(x_i) - f_i(x_i^0)\|}{\|x_i - x_i^0\|} = \lim_{\substack{x^{(i)}\to x_i^0\\ x^{(i)}\neq x_0}} \sup \frac{\|f(x^{(i)}) - f(x_0)\|}{\|x^{(i)} - x_0\|} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\| f(x) - f(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = D^+ f(x_0).$$

On montre, de la même manière, que

$$D^- f_i(x_i^0) \geqslant D^- f(x_0).$$

Par conséquent $f_i$ est non-dégénérée sur $D_i$ et

$$\frac{D^+ f_i(x_i^0)}{D^- f_i(x_i^0)} \leqslant \frac{D^+ f(x_0)}{D^- f(x_0)} \leqslant K,$$

c'est-à-dire $f_i$ est $K$-quasi-conforme sur $D_i$ dans le sens de la définition avec des dérivées scalaires.

Ensuite pour établir les conditions dans lesquelles la quasi-conformité des applications $f_i : D_i \to D_i^0$, $i = \overline{1, n}$ implique la quasi-conformité de l'application produit, donnons quelques résultats auxiliaires.

**Proposition. 2.** *Soit le n-uple d'applications*

$$f_i : D_i \to D_i^0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

*Pour* $x_0 \in D = \prod_{i=1}^{n} D_i$ *et* $r > 0$ *suffisamment petit, il existe* $i_1$, $i_2$ *qui dépendent de* $r$ *et de* $x_0$ *tels que*

$$\frac{L(x_0, f, r)}{l(x_0, f, r)} \leqslant \frac{L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r)}{l(x_{i_2}^0, f_{i_2}, r)} \tag{2}$$

*Démonstration* Soit $r > 0$ tel que $S(x_0, r) \subset D$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire Il existe $x_\varepsilon$, $y_\varepsilon$ tels que

$$\| x_\varepsilon - x_0 \| = \| y_\varepsilon - x_0 \| = r$$

et

$$L(x_0, f, r) - \varepsilon < \| f(x_\varepsilon) - f(x_0) \|, \tag{3}$$

$$l(x_0, f, r) + \varepsilon > \| f(y_\varepsilon) - f(x_0) \|. \tag{4}$$

Mais,

$$\| f(x_\varepsilon) - f(x_0) \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| f_i(x_i^\varepsilon) - f_i(x_i^0) \| =$$

$$= \| f_{i_1}(x_{i_1}^\varepsilon) - f_{i_1}(x_{i_1}^0) \| \leqslant L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r_{i_1});$$

$x_{i_1}$ est l'élément de $\| x_\varepsilon - x_0 \| = r$ où le maximum est ateint et soit $r_{i_1} = \| x_{i_1}^\varepsilon - x_{i_1}^0 \|$ et $0 < r_{i_1} \leqslant r$. Si on observe que

$$L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r_{i_1}) = \sup \{ \| f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_1}(x_{i_1}^0) \| ; \| x_{i_1} - x_{i_1}^0 \| = r_{i_1} \} =$$

$$= \sup \{ \| f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_1}(x_{i_1}^0) \| ; \| x_{i_1} - x_{i_1}^0 \| \leqslant r_{i_1} \} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \{ \| f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_1}(x_{i_1}^0) \| ; \| x_{i_1} - x_{i_1}^0 \| \leqslant r \} = L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r),$$



il résulte que,

$$\| f(x_\varepsilon) - f(x_0) \| \leqslant L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r).$$

et en utilisant (3),

$$L(x_0, f, r) - \varepsilon < L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r). \tag{3'}$$

Dans le raisonnement ci-dessus $x_\varepsilon$ dépend de $x_0$ et de $r$, donc $i_1$ dépend de $x_0$ et de $r$.

On considère maintenant l'inégalité (4). Pour au moins un $i$, noté $i_2$, on a

$$\| y_\varepsilon - x_0 \| = \| y_{i_2}^\varepsilon - x_{i_2}^0 \| = r,$$

et

$$\| y_i^\varepsilon - x_i^0 \| = r_i \leqslant r, \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors,

$$\| f(y_\varepsilon) - f(x_0) \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| f_i(y_i^0) - f_i(y_i^0) \| \geqslant$$

$$\geqslant \| f_{i_2}(y_{i_2}^\varepsilon) - f_{i_2}(x_{i_2}^0 \geqslant l(x_{i_2}^0) \|, f_{i_2}, r),$$

c'est-à-dire,

$$l(x_0, f, r) + \varepsilon > l(x_{i_2}^0, f_{i_2}, r). \tag{4'}$$

De l'inégalité (3') et de l'inégalité (4'), $\varepsilon$ étant arbitraire, on obtient la conclusion.

**Proposition 3.** *Soit* $D = \prod_{i=1}^{n} D_i$ *et* $x_0 \in D$. *Pour toute suite* $(x_k)_k \cap D$, $x_k \neq x_0$ *et* $x_k \to x_0$, *il existe un* $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *et une sous-suite* $(k_p) \cap (k)$ *tels que*

$$\| x_k - x_0 \| = \| x_i^k - x_i^0 \|,$$

*quel que soit* $k \in (k_p)$.

*Démonstration*. Pour chaque $k \in (k)$ il existe au moins un $i$, noté $i_k$, tel que

$$\| x_k - x_0 \| = \| x_{i_k}^k - x_{i_k}^0 \|.$$

Si on considère la suite $(x_{i_k}^k)$. on peut réordonner les termes de la suite en considérant tous les termes de la forme $x_i^k$, puis $x_2^k$, etc.

Pour un $i$ doné, $k$ prend seulement une partie des valeurs de $(k)$, notée $(k_i)$. De plus,

$$(x_{i_k}^k) = \{ x_1^k ; k \in (k_1) \} \cup \ldots \cup \{ x_n^k ; k \in (k_n) \}.$$

Donc pour au moins un $i$ noté $i_0$, l'ensemble $\{ x_{i_0}^k ; k \in (k_{i_0}) \}$ est infin et par conséquent, représente la sous-suite de $(x_k)$ désirée, car évidemment, on a l'égalité

$$\| x_k - x_0 \| = \| x_{i_0}^k - x_{i_0}^0 \|$$

quel que soit $k \in (k_{i_0})$.

**Proposition 4.** *Soit le n-uple d'applications*

$$f_i : D_i \to D_i^*, \quad i=\overline{1, n}.$$

*Si les $f_i$ sont non-dégénérées sur $D_i$, alors l'application*

$$f : D=\prod_{i=1}^{n} D_i \to D^*=\prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est non-dégénérée et pour tout $x \in D$, il existe $i_1$, $i_2$ qui dépendent de $x$, tels que*

$$D^+f(x) \leqslant D^+f_{i_1}(x_{i_1}), \quad D^-f(x) \geqslant D^-f_{i_2}(x_{i_2}). \tag{5}$$

*Démonstration.* On montre d'abord que pour tout $x \in D$, $D^+ f(x) < \infty$. Supposons qu'il y aurait $x_0 \in D$ pour lequel $D^+f(x_0)=\infty$. Pour $k \in N$ arbitraire, il existe $x_k \in D$ avec $x_k \to x_0$, $x_k \neq x_0$ et

$$\frac{\| f(x_k)-f(x_0) \|}{\| x_k - x_0 \|} > k, \tag{6}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \| f_i(x_i^k)-f_i(x_i^0) \|}{\| x_k - x_0 \|} > k.$$

On va montrer qu'il y a au moins un $i$ et une sous suite $(k') \subset (k)$ tels que

$$\frac{\| f_i(x_i^{k'})-f_i(x_i^0) \|}{\| x_{k'} - x_0 \|} > k'.$$

En effet, si pour n'importe quel $i$ fixé, il y a tout au plus un nombre fini de termes de la suite ayant le rang maximum $k_i$, pour lesquels

$$\frac{\| f_i(x_i^k)-f_i(x_i^0) \|}{\| x_{k'} - x_0 \|} > k,$$

en prenant $k_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i$, pour $k > k_0$ on aurait

$$\frac{\| f_i(x_i^k)-f_i(x_i^0) \|}{\| x_k - x_0 \|} \leqslant k,$$

quel que soit $i=\overline{1, n}$. Donc

$$\frac{\| f(x_k)-f(x_0) \|}{\| x_k - x_0 \|} \leqslant k.$$

fait qui contredit l'inégalité (6). Il existe donc, au moins un $i$, noté $i_0$, et $(k') \subset (k)$, tels que

$$\frac{\| f_{i_0}(x_{i_0}^{k'})-f_{i_0}(x_{i_0}^0) \|}{\| x_{k'} - x_0 \|} > k'$$



Donc on a

$$\frac{\| f_{i_0}(x_{i_0}^{k'})-f_{i_0}(x_{i_0}^0) \|}{\| x_{i_0}^{k'} - x_{i_0}^0 \|} = \frac{\| f_{i_0}(x_{i_0}^{k'})-f_{i_0}(x_{i_0}^0) \|}{\| x_k - x_0 \|} \cdot \frac{\| x_{k'} - x_0 \|}{\| x_{i_0}^{k'} - x_{i_0}^0 \|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\| f_{i_0}(x_{i_0}^{k'})-f_{i_0}(x_{i_0}^0) \|}{\| x_{k'} - x_0 \|} > k'.$$

Mais $x_k' \to x_0$, implique $x_{i_0}^{k'} \to x_{i_0}^0$ donc on a $D^+f_{i_0}(x_{i_0}^0)=\infty$, ce que contredit le fait que $f_{i_0}$ est non-dégénérée.

On va montrer, ensuite, les inégalités (5). Soit $x_0 \in D$. Il existe $i_1$, $i_2$ avec

$$D^+f_{i_1}(x_{i_1}^0) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} D^+f_i(x_i^0),$$

$$D^-f_{i_2}(x_{i_2}^0) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} D^-f_i(x_i^0),$$

où $x_0=(x_i^0)$ et $i_1$, $i_2$ dépendent de $x_0$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour $r > 0$, il existe $x_r$ tel que

$$0 < \| x_r - x_0 \| < r$$

et

$$D^+f(x_0) - \varepsilon < \frac{\| f(x_r)-f(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = \frac{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \| f_i(x_i^r)-f_i(x_i^0) \|}{\| x_r - x_0 \|} =$$

$$= \frac{\| f_{i_0}(x_{i_0}^r)-f_{i_0}(x_{i_0}^0) \|}{\| x_{i_0}^r - x_{i_0}^0 \|} \cdot \frac{\| x_{i_0}^r - x_0 \|}{\| x_r - x_0 \|} \leqslant \frac{\| f_{i_0}(x_{i_0}^r)-f_{i_0}(x_{i_0}^0) \|}{\| x_{i_0}^r - x_{i_0}^0 \|},$$

où $0 < \| x_{i_0}^r - x_{i_0}^0 \| \leqslant \| x_r - x_0 \| < r$. Soit $\eta > 0$ arbitraire et $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Il existe $r_i(\eta) > 0$ avec

$$\frac{\| f_i(x_i)-f_i(x_i^0) \|}{\| x_i - x_0 \|} < D^+f_i(x_i^0) + \eta,$$

pour tout $x_i \in D_i$ tel que $\| x_i - x_i^0 \| < r_i(\eta)$.

Soit $r_0(\eta) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i(\eta)$ et $r$ avec $0 < r < r_0(\eta)$.

On a les inégalités

$$D^+f(x_0) - \varepsilon < \frac{\| f_{i_0}(x_{i_0}^r)-f_{i_0}(x_{i_0}^0) \|}{\| x_{i_0}^r - x_{i_0}^0 \|} < D^+f_{i_0}(x_{i_0}^0) + \eta \leqslant D^+f_{i_1}(x_{i_1}^0) + \eta$$

parce que

$$0 < \| x_i^r - x_i^0 \| \leqslant \| x_r - x_0 \| < r < r_0(\eta).$$

$\varepsilon$ et $\eta$ étant indépendents de $x_0$ et de $i_1$, on obtient, à la fin, que

$$D^+f(x_0) \leqslant D^+f_{i_1}(x_{i_1}^0).$$

En suivant le même type de raisonnement on obtient l'autre inégalité.

Les inégalités (5) étant établies, il reste à montrer que $f$ est non-dégénérée sur $D$. On a montré déjà que pour n'importe quel $x \in D$, $D^+ f(x) < \infty$. On observe aussi que si les $f_i$ sont non-dégénérés, de l'inégalité (7) il résulte que $D^- f(x) > 0$ pour tout $x \in D$.

**Théorème** 3. *Soit le n-uple*

$$f_i : D_i \to D_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

*de homéomorphismes $K_i$-quasi-conformes dans le sens de la définition métrique. Si pour tout $x \in D$, $x = (x_i)$, on a*

$$l_i(f_i, x_i, r) \leqslant L_j(f_j, x_j, r), \tag{8}$$

*quels que soient $r > 0$ et $i$, $j$ avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$, alors l'application*

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est un homéomorphisme K-quasi-conforme dans le sens de la même définition avec*

$$K = (\max_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i)^2 .$$

*Démonstration*. On a montré (la proposition 1) que l'application $f$ est un homéomorphisme sur $D$. Soit $x_0 \in D$. Il existe $i_1$, $i_2$ avec $1 \leqslant i_1 \leqslant n$, $1 \leqslant i_2 \leqslant n$, tels que l'inégalite (2) soit vérifiée pour tout $r > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $r_i(\varepsilon)$ tel que, pour tout $r$ avec $0 < r < r_i(\varepsilon)$, on ait

$$\frac{L(x_i^0, f_i, r)}{l(x_i^0, f_i, r)} < K_i + \varepsilon.$$

Soient $r_0(\varepsilon) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i(\varepsilon)$ et $r$ avec $0 < r < r_0(\varepsilon)$. On a

$$1 \leqslant \frac{L(x_0, f_i, r)}{l(x_0, f_i, r)} \leqslant \frac{L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r)}{l(x_{i_2}^0, f_{i_2}, r)} =$$

$$= \frac{L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r)}{l(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r)} \cdot \frac{L(x_{i_2}^0, f_{i_2}, r)}{l(x_{i_2}^0, f_{i_2}, r)} \cdot \frac{l(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r)}{L(x_{i_1}^0, f_{i_1}, r)} \leqslant$$

$$\leqslant (K_{i_1} + \varepsilon)(K_{i_2} + \varepsilon) \leqslant (K_{i_0} + \varepsilon)^2$$

où $K_{i_0} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i$. En faisant d'abord $r \to 0$ et puis $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\delta_L(x_0, f) \leqslant K_{i_0}^2$$

où $K_{i_0}^2$ ne dépend pas de $x_0$. Donc $f$ est $K_{i_0}^2$-quasi-conforme dans le sens de la définition métrique.

**Théorème 4.** *Soit le n-uple*

$$f_i : D_i \to D_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$



*de homémorphismes $K_i$-quasi-confomes dans le sens de la définition avec des dérivées scalaires. Si pour tout $x \in D$, $x = (x_i)$, on a*

$$D^-(f_i(x_i) \leqslant D^+ f_j(x_j), \tag{9}$$

*quels que soient $i$, $j$, avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$, alors*

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

*est un homéomorphisme K-quasi-conforme dans le sens de la définition avec des dérivées scalaries avec $K = (\max_{1 \leqslant i \leqslant n}(K_i)^2$.*

*Démonstration*. Soit $x_0 \in D$ arbitraire. On a montré dans la proposition 4 que

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*$$

est une application non-dégénérée sur $D$ et qu' il existe $i_1$, $i_2$ qui dépendent de $x_0$ avec

$$\frac{D^+ f(x_0)}{D^- f(x_0)} \leqslant \frac{D^+(f_{i_1}(x_{i_1}^0)}{D^-(f_{i_2}(x_{i_2}^0)}$$

ou

$$\frac{D^+ f(x_0)}{D^- f(x_0)} \leqslant \frac{D^+ f_{i_1}(x_{i_1}^0)}{D^- f_{i_2}(x_{i_1}^0)} \cdot \frac{D^+ f_{i_2}(x_{i_2}^0)}{D^- f_{i_2}(x_{i_2}^0)} \cdot \frac{D^- f_{i_1}(x_{i_1}^0)}{D^+ f_{i_2}(x_{i_2}^0)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D^+ f_{i_1}(x_{i_1}^0)}{D^- f_{i_1}(x_{i_1}^0)} \cdot \frac{D^+ f_{i_2}(x_{i_2}^0)}{D^- f_{i_2}(x_{i_2}^0)} \leqslant K_{i_1} \cdot K_{i_2} \leqslant (\max_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i)^2$$

où $K = (\max_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i)$ ne dépend pas de $x_0$.

*Remarque*. Pour montrer que les conditions (8), (9) sont nécessaires et que la constante $K = (\max_{1 \leqslant i \leqslant n} K)$ est la meilleure possible, nous allons reproduire deux exemples construits par M. Dr. Petru Caraman qui a donné en plus, afin de faciliter le calcul pour ces exemples, une démonstration (non-publiée) propre au théorème 4. Commençons par cette démonstration. Soit $x_0 \in D$ et $\{x_k\}$ une suite de points de $D$ telle que $x_k \to x_0$ et

$$D^+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0,\ x \neq x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = \lim_{k \to \infty} \frac{\| f(x_k) - f(x_0) \|}{\| x_k - x_0 \|} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| f_i(x_i^k) - f_i(x_i^0) \|}{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x_i^k - x_i^0 \|} = \lim_{k \to \infty} \frac{\| f_{i_k}(x_{i_k}^k) - f_{i_k}(x_{i_k}^0) \|}{\| x_{j_k}^k - x_{j_k}^0 \|} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k \to \infty} \frac{\| f_{i_k}(x_{i_k}^k) - f_{i_k}(x_{i_k}^0) \|}{\| x_{i_k}^k - x_{i_k}^0 \|}.$$

où l'on a noté par $i_k$ et $j_k$ les indices $i$ pour lesquels le maximum du numérateur, respectivement du dénominateur de la troisième fraction ci-dessus est atteint. Choisissons maintenant une sous-suite de $\{x^k_{i_k}\}$ (que nous allons noter pour simplifier toujours par $\{x^k_{i_k}\}$) et telle que la limite supérieure du dernier rapport des relations précédentes soit égale à la limite de ce rapport selon cette sous-suite. Ceci implique

$$D^+f(x_0) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\| f_{i_k}(x^k_{i_k}) - f_{i_k}(x^k_{i_k}) \|}{\| x^k_{i_k} - x^0_{i_k} \|}.$$

Mais évidemment, il y a au moins un indice $i_0 (1 \leqslant i_0 \leqslant n)$ tel que l'on ait $i_k = i_0$ pour une infinité d'indices $k$, de sorte que

$$D^+f(x_0) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\| f_{i_k}(x^k_i) - f_{i_k}(x^0_{i_k}) \|}{\| x^k_{i_k} - x^0_{i_k} \|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\| f_{i_k}(x^{k_n}_{i_0}) - f_{i_0}(x^0_{i_0}) \|}{\| x^{k_n}_{i_0} - x^0_{i_0} \|} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\substack{x_{i_0}\to x^0_{i_0} \\ x_{i_0} \neq x^0_{i_0}}} \frac{\| f_{i_0}(x_{i_0} - f_i(x^0_{i_0}) \|}{\| x_{i_0} - x^0_{i_0} \|} = D^+f_{i_0}(x^0_{i_0}) \leqslant \max D^+f_i(x^0_i).$$

En raisonnant de la même manière pour la dérivée scalaire $D^-f(x_0)$, nous obtenons

$$D^-f(x_0) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} D^-f_i(x\ ),$$

ce qui implique, en tenant compte de la $K_i$-quasi-conformité de $f_i$ et du fait que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} D^-f_i(x^0_i) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} D^+f_i(x^0_i),$$

$$D^+f(x_0) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} D^+f_i(x^0_i) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} K_i D^-f_i(x^0_i) \leqslant K \max_{1\leqslant i\leqslant n} D^-f_i(x^0_i) \leqslant$$

$$\leqslant K \min D^+f_i(x^0_i) \leqslant K \min_{1\leqslant i\leqslant n} K_i D^-f_i(x^0_i) \leqslant K^2 \min_{1\leqslant i\leqslant n} D^-f_i(x^0_i) \leqslant$$

$$\leqslant K^2 \min_{1\leqslant i\leqslant n} D^-f(x)$$

où $K = \max_{1\leqslant i\leqslant n} K_i$.

*Exemples*. 1. Nous allons montrer que la condition (9) est indispensable. En effet, prenons comme homéomorphismes $K_i$-quasi-conformes $f_i$ $(i=1, 2)$ les homothéties

$$y_1 = Mx_1,\ y_2 = \varepsilon x_2$$

et supposons pour simplifier $x_0 = 0$. Alors en prenant $\{x^k\} = \left\{\frac{1}{k}, 0\right\}$ nous aurons



$$D^+f(0) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\max\left(\frac{M}{k}, 0\right)}{\max\left(\frac{1}{k}, 0\right)} = M = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{M}{k}}{\frac{1}{k}} = D^+f_1(0) = \max_{1\leqslant i\leqslant 2} D^+f_i(0),$$

tandis que

$$D^-f(0) = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\max\left(0, \frac{\varepsilon}{k}\right)}{\max\left(0, \frac{1}{k}\right)} = \varepsilon = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\varepsilon}{k}}{\frac{1}{k}} = D^-f_1(0) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} D^-f_i(0),$$

de sorte que $D^+f(0) = (M/\varepsilon) D^-f(0)$. Donc $f_1$ et $f_2$ sont conformes, tandis que $f$ est $\frac{M}{\varepsilon}$-quasi-conforme, car la relation précédente est valable dans n'importe quel point de l'espace.

Si on considère la définition métrique de la quasi-conformité pour $f_1$ et $f_2$, alors $L(0, f_1, r) = l(0, f_1, r) = M$, $L(0, f_2, r) = l(0, f_2, r) = \varepsilon$ et par conséquent la condition (7) n'est pas vérifiée. Soient $x^1 = (x_1, 0)$, $x^2 = (0, x_2)$ tels que $\| x_1 \| = \| x_2 \| = r$. Alors,

$$L(0, f, r) \geqslant \| f(x^1) \| = \max(\| f_1(x_1) \|, \| f_2(0) \|) = \max(Mr, 0) = Mr$$

$$l(0, f, r) \leqslant \| f(x^2) \| = \max(\| f_1(0) \|, \| f_2(x_2) \|) = \max(0, \varepsilon r) = \varepsilon r$$

et par conséquent,

$$\frac{L(0, f, r)}{l(0, f, r)} \geqslant \frac{M}{\varepsilon} > 1$$

quel que soit $r > 0$. Si $r \to 0$, il s'ensuit $\delta_L(0, f) > 1$, donc $f$ ne peut pas être conforme.

2. Nous allons montrer que la constante $K = (\max_{1\leqslant i\leqslant n} K_i^2)$ est la meilleure possible. Considérons cette fois-ci les homéomorphismes $K$-quasi-conformes suivants du plan :

$$\begin{cases} (y_1)_1 = (x_1)_1 \\ (y_1)_2 = (1/K)(x_1)_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (y_2)_1 = (x_2)_1 \\ (y_2)_2 = K(x_2)_2 \end{cases}$$

$$D^+f(0) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\| f(x^m) \|}{\| x^m \|} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant 2} \| f_i(x^m_i) \|}{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \| x^m_i \|} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{K}{m}}{\frac{1}{m}} = K.$$

De la même manière, on montre que $D^-f_1(0) = \frac{1}{K} D^+f_1(0) = 1$, $D^-f_2(0) = 1$ $D^+f_2(0) = K$ et $D^-f(0) = \frac{1}{K}$, ce qui implique

$$D^+f(0)=\max_{1\leqslant i\leqslant 2} D^+f_i(0)=K=K\max_{1\leqslant i\leqslant 2} D^-f_i(0)=$$

$$=K\min_{1\leqslant i\leqslant m} D^+f_i(0=K^2\min_{1\leqslant i\leqslant m} D^-f_i(0)=K^2D^-f(0).$$

Considérons maintenant la définition métrique de la quasi-conformité. Soit $r>0$ et $x_1$ tel que $\|x_1\|=\max_{1\leqslant i\leqslant 2}(\|(x_i)_i\|)=r$. On a

$$\|f_1(x_1)\|=\max(\|(y_1)_i\|)=\begin{cases} r \text{ si } 0\leqslant\|(x_1)_2\|\leqslant\|(x_1)_1\|=r, \\ \max\left(\|(x_1)_1\|,\frac{1}{K}r\right) \text{ şi } 0<\|(x_1)_1\|<\|(x_2)_2\|=r \\ \frac{1}{K}\cdot r \quad \text{şi} \quad (x_1)_1=0,\ \|(x_1)_2\|=r, \end{cases}$$

où $\frac{1}{K}\cdot r\leqslant\max\left(\|(x_1)_1\|,\frac{1}{K}\cdot r\right)\leqslant r$, donc $L(0,f_1,r)=r$, $l(0,f_1,r)=\frac{1}{K}\cdot r$ et $\delta_L(0,f_1)=K$. De la même manière, on montre que $L(0,f_2,r)=Kr$, $l(0,f_2,r)=r$ et $\delta_L(0,f_2)=K$. Soit maintenant l'application produit $f=(f_1,f_2)$ et soit $x=(x^1,x^2)$ tel que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2}(\|x^i\|)=\max_{1\leqslant i\leqslant 2}(\|(x_i)_i\|)=r.$$

On a

$$\frac{1}{K}r\leqslant\|f(x)\|\leqslant Kr,$$

les bornes étant atteintes pour $x=(x^1,0)$ où $x^1=(0,(x_1)_2)$, $\|(x_1)_2\|=r$ respectivement pour $x=(0,x^2)$ où $x^2=(0,(x_2)_2)$, $\|(x_2)_2\|=r$. Donc $L(0,f,r)=Kr$, $l(0,f,r)=\frac{1}{K}\cdot r$ et $\delta_L(0,f)=K^2$, c'est-à-dire $f$ est $K^2$-quasi-conforme.

Ensuite, nous allons considérer une classe d'applications quasi-isométriques définies sur des espaces normés réels. A la fin de cette Note, on montrera que les applications de cette classe sont quasi-conformes et que l'application produit définie par un $n$-uple de telles applications est aussi conforme.

**Définition 3.** *On dit que $f:D\to E$ est quasi-isométrique sur $D$, s'il existe une constante $C\geqslant 1$ telle que*

$$C^{-1}\|x'-x''\|\leqslant\|f(x')-f(x'')\|\leqslant C\|x'-x''\|$$

*quels que soient $x',x''\in D$.*

**Proposition 5.** *Soit $f:D\to E$. S'il existe $\alpha$ avec $0<\alpha<1$, tel que l'application $F(x)=x-f(x)$ vérifie la relation*

$$\|F(x')-F(x'')\|\leqslant\alpha\cdot\|x'-x''\|$$

*pour tout $x'$ $x''\in D$, alors $f$ est quasi-isométrique sur $D$.*



*Démonstration.* Soient $x',x''\in D$. On a les inégalités

$$|\|x'-x''\|-\|f(x')-f(x'')\||\leqslant\|x'-x''-f(x')+f(x'')\|=$$
$$=\|F(x')-F(x'')\|\leqslant\alpha\|x'-x''\|.$$

D'ici la double inégalité

$$-\alpha\|x'-x''\|\leqslant\|x'-x''\|-\|f(x')-f(x'')\|\geqslant\alpha\|x'-x''\|,$$

ou,

$$(1-\alpha)\|x'-x''\|\leqslant\|f(x')-f(x'')\|\leqslant(1+\alpha)\|x'-x''\|. \tag{10}$$

Soit $C=1/(1-\alpha)\geqslant 1$. En utilisant (10) on obtient

$$C^{-1}\|x'-x''\|\leqslant(1-\alpha)\|x'-x''\|\leqslant\|f(x')-f(x'')\|\leqslant$$
$$\leqslant(1+\alpha)\|x'-x''\|\leqslant C\|x'-x''\|.$$

c'est-à-dire $f$ est quasi-isométrique sur $D$.

**Proposition 6.** *Soit $E$ un espace normé réel et $f:D\to D^*$ un homéomorphisme. S'il existe $\alpha$ avec $0<\alpha<1$ tel que l'application*

$$x\to F(x)=x-f(x)$$

*vérifie l'inégalité*

$$\|F(x')-F(x'')\|\leqslant\alpha\|x'-x''\|$$

*pour tout $x',x''\in D$, alors $f$ est $K$-quasi-conforme dans le sens de la définition métrique avec $K=(1+\alpha)/(1-\alpha)$.*

*Démonstration.* Soient $x_0\in D$ et $\varepsilon<0$ arbitraire. Pour $r>0$, il existe $x',x''\in D$ tels que

$$L(x_0,f,r)-\varepsilon<\|f(x')-f(x_0)\|,$$
$$l(x_0,f,r)+\varepsilon>\|f(x'')-f(x_0)\|,$$

où

$$\|x'-x_0\|=\|x''-x_0\|=r.$$

De l'inégalité (9), de la proposition 5, on a

$$\|f(x')-f(x_0\|\leqslant(1+\alpha)\|x'-x_0\|$$
$$\|f(x'')-f(x_0)\|\geqslant(1-\alpha)\|x''-x_0\|$$

et en conséquence

$$\frac{L(x_0,f,r)-\varepsilon}{l(x_0,f,r)+\varepsilon}<\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

où $K=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ ne dépend pas de $\varepsilon$, $r$ et $x_0$.

Il résulte que

$$\delta_L(x_0, f) \leqslant K .$$

**Proposition 7.** *Soit $E$ un espace normé réel et $f: D \to D^*$ un homéomorphisme. S'il existe $\alpha$ avec $0<\alpha<1$ tel que l'application*

$$x \to F(x) = x - f(x)$$

*vérifie l'inégalité*

$$\| F(x') - F(x'') \| \leqslant \alpha \| x' - x'' \|.$$

*pour tout $x', x'' \in D$, alors $f$ est $K$-quasi-conforme sur $D$ dans le sens de la définition avec des dérivées scalaires avec*

$$K = (1+\alpha)/(1-\alpha).$$

*Démonstration.* Des inégalités (9) pour $x_0 \in D$ arbitraire et $x \in D$ avec $\| x - x_0 \| \neq 0$ on a

$$1-\alpha \leqslant \frac{\| f(x) - f(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} \leqslant 1+\alpha.$$

Donc

$$D^+f(x) \leqslant 1+\alpha, \qquad D^-f(x_0) \geqslant 1-\alpha.$$

c'est-à-dire $f$ est non-dégénérée sur $D$. De plus,

$$\frac{D^+f(x_0)}{D^-f(x_0)} \leqslant \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

où $K = (1+\alpha)/(1-\alpha)$ ne dépend pas de $x_0$ .

**Proposition 8.** *Soit une $n$-uple d'applications*

$$f_i : D_i D_i \to D_i^*, \ i = \overline{1, n}.$$

*Si pour tout $i = 1, 2, \ldots n$, il existe $\alpha_i$ avec $0<\alpha<1$, tel que l'application $F_i : D_i \to E_i$ définitie par*

$$x_i \to F_i(x_i) = x_i - f_i(x_i) \ ,$$

*vérifie l'inégalité*

$$\| F_i(x_i') - F_i(x_i'') \| \leqslant \alpha_i \| x_i' - x_i'' \|,$$

*quels que soient $x_i', x_i'' \in D_i$, alors pour l'application produit*

$$f : D = \prod_{i=1}^{n} D_i \to D^* = \prod_{i=1}^{n} D_i^*,$$

*il existe $\alpha$ avec $0<\alpha<1$ et tel que l'application*

$$x \to F(x) = x - f(x)$$

*vérifie la relation*



$$\| F(x') - F(x'') \| \leqslant \alpha \| x' - x'' \|, \text{ pour tout } x', x'' \in D.$$

*Démonstration.* Soient $x', x'' \in D$ arbitraires. On a

$$\| F(x') - F(x'') \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| F_i(x_i') - F_i(x_i'') \| =$$

$$= \| F_{i_1}(x_{i_1}') - F_{i_1}(x_{i_1}'') \| \leqslant \alpha_{i_1} \| x_{i_1}' - x_{i_1}'' \| \leqslant \alpha \| x' - x'' \|$$

où $\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i$ ne dépend pas de $x', x''$.

**Consequence.** Dans les conditions de la proposition précédente, si $f_i : D_i \to D_i^*$, $i = \overline{1, n}$, sont des homéomorphismes, alors aussi bien $f_i$, que l'application produit sont des homéomorphismes quasi-conformes (dans le sens de n'importe quelle des deux définitions).

L'affirmation est une conséquence directe de la proposition 8 et des propositions 6 et 7.

## BIBLIOGRAPHIE


1. Caraman P. — *Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1968.
2. — *Quasiconformal mappings in real normed spaces*, Revue Roum. Math. Pures et Appl,. Tome 24, Nr, 1, p. 33—78, 1979.
3. Frunză M. — *Contribuţii la studiul reprezentărilor cvasi-conforme*, Teză de doctorat, Bucureşti, 1979.
4. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcţională*, Vol. 1,2, Editura Academiei, Bucureşti, 1970.


*Reçu le 30 VI 1980*

*Institut de Recherches en Metallurgie Bucarest*