REFERENCES

1. Beckenbach E. F. and Bellman R. — *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
2. Beesack P. R. — *Gronwall Inequalities*, Carleton University Mathematical Lecture Notes No. 11, 1975.
3. Bondge B. K. and B. G. Pachpatte — *On nonlinear integral inequalities of the Wendroff type*, J. Math. Anal. Appl. 70 (1979), 161—169.
4. Bondge B. K. and Pachpatte B. G. — *On some fundamental integral inequalities in two independent variables*, J. Math. Anal. Appl. 72 (1979), (to appear).
5. Bondge B. K. and Pachpatte B. G. — *On two independent variable generalizations of certain integral inequalities*, Tamkang Jour. Math. (to appear).
6. Bondge B. K. and Pachpatte B. G. — *On Wendroff type integral inequalities in n independent variables*, Chinese Jour. Math. 7 (1979), 37—46.
7. Bondge, B. K. Pachpatte B. G. and W. Walter — *On generalized Wendroff type inequalities and their applications*, J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 3. (1979), to appear).
8. Courant R. and Hilbert D. — *Partial Differential Equations*, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Wiley, New York, 1962.
9. Lakshmikantham V. and Leela S. — *Differential and integral inequalities*, Vol. II, Academic Press, New York, 1969.
10. Pachpatte B. G. — *On some integral inequalities similar to Bellman-Bihari inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 49 (1975), 794—802.
11. Pachpatte B. G. — *On some generalizations of Bellman's Lemma*, J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), 141—150.
12. Pachpatte B. G. — *On some fundamental integral inequalities of the Bellman-Bihari type*, Chinese Jour. Math. 5 (1977), 71—80.
13. Pachpatte B. G. — *On some new integral and integrodifferential inequalities in two independent variables and their applications*, J. Differential Equations, 33(1979), 279—272.
14. Pachpatte B. G. — *On some fundamental partial integral inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 73 (1980), (to appear).
15. Pachpatte B. G. — *On some integrodifferential inequalities similar to Wendroff's inequality*, An. şt. Univ., Iaşi ,25 (1979), 127—136.
16. Pachpatte B. G. — *On Wendroff type partial integral inequalities*, Tamkang Jour. Math. (to appear).
17. Snow D. R. — *A two independent variable Gronwall type inequality*, *Inequalities* III, Proc, Symposion inequalities, Academic Press, New York, 1971, 330—340.
18. Snow D. R. — *Gronwall's inequality for systems of partial differential equations in two independent variable* Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972), 46—54.
19. Walter, W. — *Differential and integral inequalities*, New York, Heidelberg, Berlin, 1970.
20. Young E. C. — *Gronwall's inequality in n independent variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 241—244.

Received 9. II. 1980

Department of Mathematics
and Statisics
Marathwada University
Aurangabad — 431004, India

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al.I.Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s.I a, 1981, f.2

L'HOMOGENEISATION D'UN PROBLEME NON-LINEAIRE

PAR

GELU PAŞA

Dans ce qui suit on considère une équation elliptique non linéaire, de type Navier-Stokes, dont les coefficients a_{ijkh} sont Y periodiques, Y étant un parallélipipède de R^3. On fait l'homogéneisation de cette équation et l'on démontre un théorème de convergence, bien que le terme nonlinéaire soit présent.

1. Introduction. On considère l'équation :

$$(1)\qquad \begin{cases} u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial X_k} + \dfrac{\partial}{\partial X_j}(p\delta_{ij} - \sigma_{ij}) = f_i \text{ dans } \Omega \subset R^3, \\ \operatorname{div} u = 0,\ u/_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

où u est la vitesse, p est la pression, $\sigma_{ij} = a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(u)$,

$$\varepsilon_{kh}(u) = \left(\frac{\partial u_h}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_h}\right),\ (\exists)\alpha > 0 \text{ et } a_{ijkh}\xi_{ij}\xi_{kh} \geqslant \alpha\xi_{ij}\xi_{kh},$$

$$a_{ijkh} = Y\text{-}périodiques,\ a_{ijkh} \in L_\infty(Y),\ a_{ijkh} = a_{ijhk} = a_{khij}$$

En définissant : $a^\varepsilon_{ijkh}(x) = a_{ijkh}(x/\varepsilon)$, (1) se transforme en une famille de problèmes pour $\varepsilon \to 0$. Alors nous avons le *problème* ε

$$(2)\qquad \begin{cases} u^\varepsilon_k \dfrac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial X_k} + \dfrac{\partial}{\partial X_i}(p^\varepsilon\delta_{ij} - \sigma^\varepsilon_{ij}) = f_i, \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0,\ u^\varepsilon/_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

En définissant $\xi^\varepsilon_{ij} = a^\varepsilon_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u^\varepsilon)$, (2) devient :

$$(2')\qquad \left(u^\varepsilon_k \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial X_k},\ w_i\right) + (\xi^\varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij}(w)) - (p^\varepsilon \operatorname{div} w) = (f_i,\ w_i),$$

$(\forall)$ $w \in \mathring{w}^1_2(\Omega)$, où $(.,.)$ est le produit scalaire dans $L_2(\Omega)$.

Les conditions d'existence et unicité pour (2) sont démontrées dans [3]. L'équation homogéneisée est obtenue par les procédées classiques comme dans [2]. On suppose que u^ε, p^ε, σ^ε_{ij} ont un développement de la forme :

$$u^\varepsilon = u^0(x,\ y) + \varepsilon u^1(x,\ y) + \dots$$

$$p^\varepsilon = p^0(x, y) + \varepsilon p^1(x, y) + \dots$$

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = \sigma^0_{ij}(x, y) + \varepsilon\sigma^1_{ij}(x, y) + \dots, \; y = x/\varepsilon \; ,$$

où u^k, p^k, σ^k_{ij} sont Y-périodiques en y.

En identifiant les termes en $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$, ε^0, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{ijkh}\varepsilon^y_{kh}(u_0)) = 0, \; \mathrm{div}_x\, u^0 + \mathrm{div}_y\, u^1 = 0, \tag{3}$$

$$u^0_k \frac{\partial u^0_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial y_i}(p^0\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) = 0\,, \tag{4}$$

$$u^1_k \frac{\partial u^0_i}{\partial y_k} + u^0_k\left(\frac{\partial u^0_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u^1_i}{\partial y_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(p^0\delta_{ij} - \sigma^0_{ij}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(p^1\delta_{ij} - \sigma^1_{ij}) = 0. \tag{5}$$

L'équation (3) montre que $u^0 = u^0(x)$, donc les termes en $\partial u^0_i/\partial y_k$ disparaissent. En appliquant l'opérateur moyenne dans (5) et en exprimant $\tilde{\sigma}^0_{ij}$ en fonction de u^0 à l'aide de (4), on obtient, en notant $\tilde{\ } = [1/\mu(Y)] \cdot \int_Y \cdot\, d\mu$

$$u^0_k \frac{\partial u^0_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial x_i} + A_{ijkh}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{kh}(u^0)) = f_i\,, \tag{6}$$

$$A_{ijkh} = \frac{1}{\mu(y)}\int_Y (a_{ijkh} + a_{ijlm}\varepsilon_{lm}(\rho^{kh}))\,,$$

où ρ^{kh} est la solution *du problème local*

$$\int_Y a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\rho^{lm}) = -\int_Y a_{ijkh}\varepsilon_{ij}(w) \quad (\forall) w \in V_Y, \tag{7}$$

$$V_Y = \{u \in W^1_2(Y),\; u = Y\text{-périodique},\; \mathrm{div}\, u = 0\}.$$

2. Théorème de convergence. Nous allons démontrer le Théorème suivant :

Soit u^ε, p^ε *la solution du problème (2),* u^0, p^0 *la solution du problème (6). Alors, pour* $\varepsilon \to 0$, *et pour* $\|f\|_{L_2}$ *suffisamment petit, indépendamment de* ε, *nous avons :*

1) $u^\varepsilon \to u^0$ *dans* $L_2(\Omega)$ *(fortement convergent)*

2) $p^\varepsilon \to \tilde{p}^0 + \mathrm{ct.}$ *dans* $L_2(\Omega)$ *(faiblement convergent).*

Dans (2) prenons le produit scalaire avec u^ε, dans $L_2(\Omega)$, et en utilisant l'ellipticité de a_{ijkh} et les proprietés de u, on obtient.

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}/\alpha = C \; ; \text{ donc pour } \varepsilon \to 0 : \tag{8}$$

$$u^\varepsilon \to u^* \text{ dans } \mathring{W}^1_2(\Omega)\,,$$

$$u^\varepsilon \to u^* \text{ dans } L_2(\Omega),\; \mathrm{div}\, u^* = 0,\; u^*/_{\partial\Omega} = 0.$$

Dans (2) prenons le produit scalaire dans $L_2(\Omega)$ avec $w \in W^1_2(\Omega)$.

$$\langle \nabla p^\varepsilon,\; w\rangle \equiv \int_\Omega \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_i} w_i \leqslant \|w\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)}(\|f\|_{L_2} + c + c^2),$$

donc —[voir-2-Appendix], nous, avons :

$$p^\varepsilon \to p^* \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ pour } \varepsilon \to 0. \tag{9}$$

Puis, (8) et les propriétés de a_{ijkh} nous montrent que :

$$\xi^\varepsilon_{ij} \to \xi^*_{ij} \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ pour } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Montrons maintenant que le terme non linéaire est faiblement convergent dans $L_2(\Omega)$. Soit $w \in C^\infty_0(\Omega)$:

$$\left(u^\varepsilon_k \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_k} - u^*_k \frac{\partial u^*_i}{\partial x_k},\; w_i\right) = \int_\Omega (u^\varepsilon_k - u^*_k)\frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_k} w_i + \int_\Omega u^*_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u^\varepsilon_i - u^*_i) w_i$$

$$\leqslant \|u^\varepsilon_k - u^*_k\|_{L_2} \cdot \|u^\varepsilon\|_{\mathring{W}^1_2} \|w\|_{L_\infty} - \int_\Omega (u^\varepsilon_i - u^*_i) u^*_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \leqslant$$

$$\leqslant \|u^\varepsilon - u^*\|_{L_2}(\|u^\varepsilon\|_{\mathring{W}^1_2} \cdot \|w\|_{L_\infty} + \|u^*\|_{L_2} \cdot \|\nabla w\|_{L_\infty}).$$

Mais $w \in C^\infty_0$ et $\|w\|_{L_\infty}$ et $\|\nabla w\|_{L_\infty} < \infty$. Donc pour $\varepsilon \to 0$:

$$\left(u^\varepsilon_k \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_k},\; w_i\right) \to \left(u^*_k \frac{\partial u^*_i}{\partial x_k},\; w_i\right) \quad (\forall)\; w \in L_2(\Omega). \tag{11}$$

Le problème local (7) peut être écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\overline{\rho}^{lm})) = -\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ijlm}) - \frac{\partial q^{lm}}{\partial y_i}\,,$$

q^{lm} étant présent par la décomposition de $L_2(Y)$.

L'équation ci dessus peut être transformée en une équation globale, en possant $y = x/\varepsilon$, donc $\dfrac{\partial}{\partial y_i} = \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\int_\Omega a_{ijkh}(x/\varepsilon)\varepsilon^x_{kh}(\chi^{\varepsilon lm})\varepsilon_{ij}(w) = \int_\Omega q^{\varepsilon lm}\,\mathrm{div}\, w \quad (\forall) w \in W^1_2(\Omega), \tag{12}$$

où $q^{\varepsilon lm}(x) = q^{lm}(x/\varepsilon)$, $\chi^{\varepsilon lm}(x) = \varepsilon\rho^{lm}(x/\varepsilon) + A^{lm}(x)$.

$$A^{lm} = (\overset{l}{\overline{0}}, \dots, 0,\; x_m,\; 0, \dots), \qquad \chi^{lm} = \rho^{lm} + A^{lm}.$$

Nous avons :

$$\chi^{\varepsilon lm} \to A^{lm} \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ pour } \varepsilon \to 0. \tag{12'}$$

Le problème ε sous la forme variationelle s'écrit

$$\int_\Omega a^\varepsilon_{ijkh} \cdot \varepsilon^x_{kh}(u^\varepsilon)\varepsilon_{ij}(w) + \int_\Omega u^\varepsilon_k \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_k} w_i = \int_\Omega p^\varepsilon\,\mathrm{div}\, w + \int_\Omega f_i w_i \tag{13}$$

Soit $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$, prenons $w = \Phi \cdot \chi^{\varepsilon lm}$ dans (13), $w = \Phi u^\varepsilon$ dans (12) et leur différence nous donne :

$$(14)\quad \begin{aligned} &\int_\Omega a_{ijkh}\left\{\varepsilon^\varepsilon_{kh}(\chi^{\varepsilon lm})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}u^\varepsilon_j+\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}u^\varepsilon_i\right)-\varepsilon^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\chi^{\varepsilon lm}_h+\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}\chi^{\varepsilon lm}_k\right)\right\}- \\ &-\int_\Omega u^\varepsilon_k\frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_k}\Phi\chi^{\varepsilon lm}_i=\int_\Omega q^{\varepsilon lm}\operatorname{div}(\Phi u^\varepsilon)-\int_\Omega p^\varepsilon\operatorname{div}(\Phi\chi^{\varepsilon lm})-\int_\Omega f_i(\Phi\chi^{\varepsilon lm}_i). \end{aligned}$$

Le produit scalaire d'une suite faiblement convergente avec une suite fortement convergente converge vers le produit des limites, donc nous avons :

$$\int_\Omega q^{lm}(x/\varepsilon)\operatorname{div}(\Phi u^\varepsilon)\to\int_\Omega(\widetilde{q^{lm}})\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}-u^*_i=0,$$

$$\int_\Omega p^\varepsilon\operatorname{div}(\Phi\chi^{\varepsilon lm})=\int_\Omega p^\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\chi^{\varepsilon lm}_i+\Phi\operatorname{div}(A^{lm})\right)\to\int_\Omega p^*\operatorname{div}(\Phi A^{lm})$$

$$\int_\Omega f_i(\Phi\chi^{\varepsilon lm}_i)\to\int_\Omega f_i\Phi A^{lm}_i=\left(u^*_k\frac{\partial u^*_i}{\partial x_k},\ \Phi A^{lm}_i\right)+$$

$$+(\zeta^*_{ij},\ \varepsilon_{ij}(\Phi A^{lm}))-(p^*,\ \operatorname{div}(\Phi A^{lm})),$$

où nous avons utilisé (8)–(11), (2′) et (12′). Donc la limite de la deuxième partie de (14) pour $\varepsilon\to 0$ est :

$$(15)\quad -\left(u^*_k\frac{\partial u^*_i}{\partial x_k},\ \Phi A^{lm}_i\right)-(\zeta^*_{ij},\ \varepsilon_{ij}(\Phi A^{lm})).$$

La première partie de (14) nous donne, pour $\varepsilon\to 0$:

$$(16)\quad \begin{aligned} &\int_\Omega \overline{a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(\chi^{lm})}\cdot(\varepsilon_{ij}(\Phi u^*)-\Phi\varepsilon_{ij}(u^*))- \\ &-(\zeta^*_{kh},\ \varepsilon_{kh}(\Phi A^{lm}))+(\zeta^*_{kh},\ \Phi\varepsilon_{kh}(A^{lm}))-\left(u^*_k\frac{\partial u^*_i}{\partial x_k},\ \Phi A^{lm}_i\right). \end{aligned}$$

En comparant (15) et (16), on voit que le terme non linéaire a disparu, et

$$\int_\Omega A_{ijlm}\varepsilon_{ij}(u^*)\Phi=(\zeta^*_{kh}\varepsilon_{kh}(A^{lm}),\ \Phi);$$

en utilisant $\zeta^*_{kj}=\zeta^*_{jk}$ et $\dfrac{\partial A^{lm}_k}{\partial x_h}=\delta_{km}\delta_{kh}$ on obtient :

$$(17)\quad \zeta^*_{lm}=A_{ijlm}\,\varepsilon_{ij}(u^*).$$

Donc la limite de (2′) pour $\varepsilon\to 0$ est :

$$(18)\quad \begin{aligned} &\left(u^*_k\frac{\partial u^*_i}{\partial x_k},\ w_i\right)+(A_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u^*),\ \varepsilon_{ij}(w))-(p^*,\ \operatorname{div} w)= \\ &=(f_i,\ w_i),\ (\forall)w\in\mathring{W}^1_2(\Omega). \end{aligned}$$

Or, (18) a une solution unique dans les conditions du théorème démontré dans [3, p. 164 et p. 166]. Donc $u^*=u^0$, et $p^*=\tilde{p}^0$ à une constante additive près.

Rémarque. Le théorème du §2 peut être démontré aussi pour une équation de type :

$$(19)\quad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+b_j u^2\frac{\partial u}{\partial x_j}=f \text{ dans } \Omega\subset R^3,\ u/_{\partial\Omega}=0,$$

où $a_{ij}=a_{ji}$, $(\exists)\,\alpha>0$ et $a_{ij}\zeta_i\zeta_j\geqslant\alpha\zeta_i$, $a_{ij}=Y$-périodiques, $a_{ij}\in L_\infty(Y)$, b_j=constantes. La famille de problèmes est obtenue en possant : $a^\varepsilon_{ij}(x)=a_{ij}(x/\varepsilon)$.

L'existence de la solution de (19) peut être démontrée comme dans [4] ou [3] en utilisant (20) et (21) :

$$(20)\quad 4\int_\Omega b_j\frac{\partial u^3}{\partial x_j}=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_j}(b_j u^4)=0,$$

$$(21)\quad u_m\rightharpoonup u^*\text{ dans }\mathring{w}^1_2(\Omega)\Rightarrow\left(b_j\frac{\partial u^3_m}{\partial x_j}-b_j\frac{\partial u^3_*}{\partial x_j},\ \Phi\right)\to 0,\ (\forall)\Phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

La propriété (21) peut être démontrée de la façon suivante :

$$\left(\left(b_j\frac{\partial u^3_m}{\partial x_j}-b_j\frac{\partial u^3_*}{\partial x_j}\right),\ \Phi\right)=\int_\Omega b_j(u_m-u_*)(u^2_m+u_m u^*+u^2_*)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}$$

$$\leqslant\|b_j\|_{L_\infty}\cdot\|u_m-u_*\|_{L_2}\cdot(\|u_m\|^2_{L_4}+\|u_m\|_{L_4}\cdot\|u_*\|_{L_4}+\|u_*\|^2_{L_4})\cdot\|\nabla\Phi\|_{L_\infty}.$$

Montrons maintenant que (19) a une solution unique. Soit $a(u,v)=\int_\Omega a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$; nous avons :

$$(22)\quad a(u,v)+\left(b_j\frac{\partial u^3}{\partial x_j},\ v\right)=(f,v)\,.\ (\forall)v\in\mathring{W}^1_2(\Omega).$$

En prenant en (22) $v=u$, u étant la solution de (19), nous avons

$$(23)\quad \|u\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)}\leqslant\|f\|/\alpha.$$

Soit u_1, u_2, solutions de (22). Donc :

$$(24)\quad a(u_1-u_2,w)+\left(b_j\frac{\partial u^3_1}{\partial x_j}-b_j\frac{\partial u^3_2}{\partial x_j},\ w\right)=0\quad(\forall)w\in\mathring{W}^1_2(\Omega).$$

Nous avons :

$$\left(b_j \frac{\partial u_1^3}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial u_2^3}{\partial x_j},\ u_1 - u_2\right) = \int_\Omega b_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2) =$$

$$= \int_\Omega b_j (u_1 - u_2)(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_1 - u_2) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|b_j\|_{L_\infty} \|u_1 - u_2\|^2_{H^1_2} (\|u_1\|^2_{L_4} + \|u_1\|_{L_4} \|u_2\|_{L_4} + \|u_2\|^2_{L_4}).$$

Donc, en prenant $w = u_1 - u_2$ dans (24), on a :

$$\|u_1 - u_2\|^2_{H^1_2} (\alpha - \|b_j\|_{L_\infty} \{\|u_1\|^2_{L_4} + \|u_1\|_{L_4} \|u_2\|_{L_4} + \|u_2\|^2_{L_4}\}) \leqslant 0. \tag{25}$$

Mais nous avons (23) et :

$$\|u_i\|_{L_4} \leqslant K \cdot \|u_i\|_{H^1_2} \leqslant K \frac{\|f\|_{L_2}}{\alpha}.$$

Donc la condition :

$$3K^2 \|f\|^2_{L_4} \cdot \|b_j\|_{L_\infty} \leqslant \alpha^3.$$

nous assure l'unicité de la solution de (22).

L'homogénéisation est alors obtenue par les mêmes procédés, en utilisant la propriété (21), le fait que l'équation en ε^{-1} qui correspond à (4) est la même que celle du cas linéaire, et l'unicité de la solution de (19).

BIBLIOGRAPHIE

1. Lions, T. L., Benssoussan, Papanicolaou — *Asimptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978.
2. Sanchez-Palencia, E. — *Non homogeneous media and vibration theory*. Lectures Notes in Physics, nr. 127, 1980.
3. Temam, R. — *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, 1977.
4. Lions J. L. — *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

Received 28. X. 1980

INCREST
Bd. Păcii 220
11538 București

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s. I a, 1981 f. 2

APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

BY

P. VĂTĂ

Starting with the Newton-Kantorovich method for the approximation of the solution of a nonlinear Volterra integral equation which gives a cvasilinearized algorithm for the determination of the successive approximations, using a variant of the Sokolov method, we obtain an algorithm by means of which the functional corrections may be determined in a simpler way than in the original Sokolov method or other variants, such as, for example, the one in [2].

In a certain way the rapidity of the convergence is also estimated.

I. Presentation of the method. Let

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K[x, t;\ y(t)]\, dt,\quad x \in [a, b], \tag{1}$$

be the Volterra integral equation, where $f(x) \in C([a, b], R)$, $K : D \to R$ is continuous and has derivative with respect to y in D,

$$D = \{(x, t, y) : a \leqslant t \leqslant x \leqslant b,\ |y - f| \leqslant m,\ m > 0\}. \tag{2}$$

As it is known, using the Newton-Kantorovich method, we have the following algorithm for the approximation of solution of the equation (1):

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x \{K[x, t;\ y_n(t)] - K'_y[x, t;\ y_n(t)]\, y_n(t) + \\ + K'_y[x, t;\ y_n(t)]\, y_{n+1}(t)\}\, dt; \\ y_0(x) = f(x) \end{cases} \tag{3}$$

In the paper [2], N. A. Svarichevskaya and M. A. Yagubov showed that if $y_n(x)$ satisfies a condition of the form

$$-m + y_0 \leqslant y_n \leqslant y_0 + m,\quad m > 0,$$

then $y_{n+1}(x)$ satisfies a similar condition.