the relations $\mathrm{dr}(C) \leq 3$, $C \in \mathbf{RA}(1+\max(2, n))$ and $[C, 1, 2, \ldots, n, 0, f]$ holds. Therefore $f \in \mathbf{NRF}^n(3, 1+\max(2, n))$.

The $n+1$-ary function φ is *universal* for $\mathbf{RF}^n$ if, for every $f \in \mathbf{RF}^n$, there exists a natural number a such that

$$\forall x_1 x_2 \ldots x_n \; \varphi(a, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

and conversely, for every a there exists a function $f \in \mathbf{RF}^n$ satisfying the above relation.

The theorem 2 allows to give an easy proof on the existence of recursive universal functions. Indeed, by this theorem, for any $f \in \mathbf{RF}^n$ we may construct an algorithm

$B =$ **while** $y > 0$ do $[u_1, v_1, w_1]\ [u_2, v_2, w_2] \ldots [u_t, v_t, w_t]$ **end** where y is the register 0, so that for arbitrary $a_1, a_2, \ldots, a_n$ the relation $(1, a_1, a_2, \ldots, a_n, 1, 0, 0, \ldots) . B . (0, f(a_1, a_2, \ldots, a_n), 0, 0, \ldots)$ holds. Now, look to the algorithm U:

while $e(0, m) > 0$ do $i := 1$;
  while $i < e(0, q)$ do
    end $m := f(m, q, i)$; $i := i+3$
end

where $f(m, q, i) = [m / p_{e(i+1,q)}^{e(e(i+1,q),m)}]\, p_{e(i,q)}^{e(e(i+2,q),m)} \cdot p_{e(i+1,q)}^{e(e(i+1,q),m) \dot{-} e(e(i+2,q),m)}$

We observe that

$$m, q, i : (2p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} p_{n+1}, \rho(B), 0) . U . (3^{f(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \ldots, \rho(B), 3t+1)$$

if

$$\rho(B) = p_0^{3t} p_1^{u_1} p_2^{v_1} p_3^{w_1} \ldots p_{3t-2}^{u_t} p_{3t-1}^{v_t} p_{3t}^{w_t}$$

and therefore the algorithm

begin $m := 2p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_n^{x_n} p_{n+1}$; U; $y := e(1, m)$ **end**

computes in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and y an universal recursive function for $\mathbf{RF}^n$.

By means of the universal recursive functions and previous theorems, some new results may be obtained. For example, from theorem 2 it results

Corollary 6. If $n > 0$ then there is an algorithm $B = (\bar{y})^{\cdot} y (\bar{y} V_1 V_2 \ldots V_s)^{\cdot}$ with V_i of the form $a := 0$, $a := a+1$, $a := a+b$ or $a := a \dot{-} b$ and so that all recursive n-ary functions are computable by algorithms from the set $\{$**begin** $u := c$; B **end** $\mid c \in \mathrm{N}\}$.

REFERENCES

1. Baredin, Ya. M. — *Ob odnom klasse maşin Tiuringa*, Algebra i logica, 1, 1963.
2. Börger, E. — *Recursively unsolvable algorithmic problems and related questions reexamined.* Lect. Notes in Math., 499, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
3. Cazacu, C. and Cazacu, M. — *Teoria algoritmilor*, University of Iassy, 1977.
4. Maltev, A.I. — *Algoritmi i rekursivnie funkţii*, Izd, Nauka, Moskva, 1965.
5. Rogers, H. jr. — *Theory of recursive functions and effective calculability*, Mc. Graw-Hill Book Comp., New-York, 1967.

Received 25. VII. 1980

Faculty of Mathematics University of Iaşi, R.S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s. I a, 1981 f. 2

SUR UN INVARIANT DANS UN TOPOS ÉLÉMENTAIRE

PAR

MIRCEA GEANĂU

Soit G un groupe qui opère sur un ensemble A. Les éléments $a \in A$ ayant la propriété $\sigma a = a$, $\forall \sigma \in G$, sont appelés éléments invariants de l'ensemble A et on les désigne par G-ensembles et on les note A^G. L'association $A \to A^G$ définit un foncteur $(\ )^G : \mathrm{Act}\, G \to \mathrm{Ens}$, où $\mathrm{Act}\, G$ est la catégorie dont les objets sont les G-ensembles et les morphismes sont les homomorphismes des G-ensembles.

Dans cet ouvrage on essaye de traiter cette question dans un topos élémentaire et on lui donne un caractère fonctoriel.

Définition 1. *Un topos élémentaire est une catégorie $\mathcal{E}$ qui vérifie les conditions suivantes:*

(*i*) $\mathcal{E}$ a des limites projectives finies c.à.d. $\mathcal{E}$ a des produits fibrés et un objet final 1.

(*ii*) pour chaque objet X on a un foncteur exponentiel $(-)^X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui est adjoint à droite au foncteur $(-)\ xX$.

(*iii*) $\mathcal{E}$ a un sousobjet classifiant Ω et un morphisme $1 \xrightarrow{v} \lambda$ tel que $\forall A$ et $A' \xrightarrow{i} A$ monomorphisme, il y a un seul $\varphi_i : A \to \lambda$ tel que le diagramme suivant soit un produit fibré:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 1 \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "\varphi_i"'] & \lambda \end{tikzcd}$$

Exemple. Le topos des ensembles, le topos des faisceaux sur un espace topologique, sont des catégories $\mathcal{E}$.

Soit (G, m) un objet groupe de $\mathcal{E}$ et soit A un objet de $\mathcal{E}$.

Définition 2. *Une opération à gauche de l'objet G sur A est un morphisme $W : G \times A \to A$ qui vérifie les conditions suivantes:*

(*i*) le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} G \times G \times A \arrow[r, "m \times 1A"] \arrow[d, "1G \times W"'] & G \times A \arrow[d, "W"] \\ G \times A \arrow[r, "W"'] & A \end{tikzcd}$$

(*ii*) $w < \varepsilon\eta, 1_A > = 1_A$

où $\eta : A \to 1$ est le seul morphisme, et $\mathcal{E} : 1 \to G$ est le morphisme ayant la propriété que quel que soit l'objet Y et le morphisme $\alpha : Y \to 1$, $\mathcal{E}\alpha$ est l'élément neutre du groupe $\mathrm{Hom}(Y, G)$.

Définition 3. *Soit A et A' deux objets sur lesquels opère G. Un homomorphisme de A dans A' est un morphisme f tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} G\times A \arrow[r, "W"] \arrow[d, "1\times f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ G\times A' \arrow[r, "W'"] & A' \end{tikzcd}$$

Pour tout morphisme $f: A\to B$ de $\mathcal{E}$, on désigne par f^{-1} : Sub $(B)\to$Sub(A) la fonction qui associe à chaque sousobjet $J\to B$, le sousobjet $f^{-1}(J)\to A$ tel que le diagramme suivant soit un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(J) \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Le sousobjet $f^{-1}(J)\to A$ de A est par définition l'image reciproque par f du sousobjet $J\to B$,

Pour tout morphisme $f: A\to B$ de $\mathcal{E}$, on désigne par $\exists f$: Sub$(A)\to$ $\to$Sub(B) la fonction qui associe à chaque sousobjet $I\xrightarrow{i}A$ de A, le sousobjet $I_m(f\times i)\to B$ de B. Le sousobjet Im$(f\times i)\to B$ de B est par la définition l'image directe par f du sousobjet $I\to A$ de A et on le désigne par $\exists f(I)\to B$. Pour tout morphisme $f: A\to B$ de $\mathcal{E}$, $\exists_f$ est un foncteur covariant, adjoint à gauche du foncteur f^{-1}.

Si $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ sont deux morphismes composables de $\mathcal{E}$, alors $\exists gf=$ $=\exists g\,.\,\exists f$ parceque l'adjonction commute avec la composition des foncteurs.

Proposition 1. *Si le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B' \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

est un produit fibré, alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \text{Sub }(A') \arrow[r, "\exists f'"] & \text{Sub }(B') \\ \text{Sub }(A) \arrow[r, "\exists f"] \arrow[u, "u^{-1}"] & \text{Sub }(B) \arrow[u, "v^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Si $i: I\to A$ est un sousobjet de A et si on considère le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} u^{-1}(I) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A' \arrow[d, "u,"] \\ I \arrow[r, "i"] & A \end{tikzcd}$$

alors par hypothèse il y a le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} u^{-1}(I) \arrow[r, "f'i'"] \arrow[d] & B' \arrow[d, "v"] \\ I \arrow[r, "fi"] & B \end{tikzcd}$$

En tenant compte du fait que dans un topos élémentaire les images sont universelles, c'est à dire, elles sont stables à un changement de base, il résulte la relation :

$$\mathrm{Im}(f'i') = v^{-1}(\mathrm{Im}\, fi) \Leftrightarrow \exists f'(u^{-1}(I)) = v^{-1}(\exists f(I)) \text{ c.c.t.d.}$$

Dans un topos $\mathcal{E}$, quel que soit le morphisme $f: A\to B$, le foncteur : f^{-1} Sub$(B)\to$Sub(A) possède un adjoint à droite, $\forall f$: Sub$(A)\to$Sub(B).

Proposition 2. *Tout produit fibré :*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd}$$

induit un diagramme commutatif dans Ens.

$$\begin{tikzcd} \text{Sub }(B') \arrow[r, "v^{-1}"] \arrow[d, "\forall g"'] & \text{Sub }(A') \arrow[d, "\forall f"] \\ \text{Sub }(B) \arrow[r, "u^{-1}"] & \text{Sub }(A) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme une conséquence de la proposition 1, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \text{Sub}'\ (A') \arrow[r, "\exists v"] & \text{Sub }(B') \\ \text{Sub }(A) \arrow[r, "\exists u"] \arrow[u, "f^{-1}"] & \text{Sub}(B) \arrow[u, "g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Parceque u^{-1} est adjoint à droite de $\exists u$ et $\forall g$ est adjoint à droite de g^{-1}, $u^{-1}\forall g$ est adjoint à droite de $g^{-1}\exists u$.

D'autre part, parceque $\forall f$ est adjoint à droite de f^{-1}, et v^{-1} est adjoint à droite de $\exists v$, il résulte que $\forall f v^{-1}$ est adjoint à droite de $\exists v f^{-1}$. De l'égalité $g^{-1}\exists u = \exists v f^{-1}$, il suit : $u^{-1}\forall g = \forall f v^{-1}$.

Soit G un groupe qui opère sur X. On a $\varphi: G\times X\to X$ et soit p_2: $G\times X\to X$, et $(K, k)=$Ker (φ, p_2),

$$K \xrightarrow[k]{} G\times X \underset{p_2}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} X.$$

On désigne par X' le sousobjet $\forall p_2(K)$. Par définition X' est l'invariant de X.

Exemple : Dans le topos des ensembles : $\forall_{p_2}(K) = \{x \in X,\ \forall (g, x') \in p_2^{-1}(x) \Rightarrow (g, x') \in K\} = \{x \in X,\ \forall (g, x) \Rightarrow (g, x) \in K\} = \{x \in X,\ \forall g \in G \Rightarrow gx = x\}$ parce que $p_2^{-1}(x) = Gx\{x\}$. Soit Y un autre G objet de $\mathcal{E}$. On a : $\psi : G \times Y \to Y$

Soit $K' = \mathrm{Ker}(\psi, \pi_2)$ et soit $\forall_{\pi_2}(K')$ l'invariant de Y.

$$K' \xrightarrow{k'} G \times Y \underset{\pi_2}{\overset{\psi}{\rightrightarrows}} Y.$$

Théorème. *Soit $f : X \to Y$ un homomorphisme. Alors il y a un seul morphisme : $\alpha : \forall p_2(K) \to \forall_{\pi_2}(K')$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\forall p_2(K) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\forall p_2(K') \arrow[r, "h'"] & Y
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On considère le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
G \times X \arrow[r, "1 \times f"] \arrow[d, "p_2"'] & G \times Y \arrow[d, "\pi_2"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

De la proposition 2, on a la relation :

$$f^{-1} \forall_{\pi_2}(K') = \forall_{p_2}(1 \times f)^{-1}(K'). \tag{1}$$

On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"'] & G \times X \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "1 \times f"] & X \arrow[d, "f"] & \forall_{p_2}(K) \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \\
K' \arrow[r, "k'"'] & G \times Y \arrow[r, shift left, "\pi_2"] \arrow[r, shift right, ""'] & Y & \forall_{\pi_2}(K') \arrow[dl]
\end{tikzcd}$$

On a le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
K \xrightarrow{\varphi} (1 \times f)^{-1}(K') \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "(1 \times f)^{-1}(k')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{pr}\, f"] & K' \arrow[d, "k'"] \\
G \times X \arrow[r, "1 \times f"] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{pr}\, f"] & G \times Y \arrow[d, "\pi_2"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

À cause de la proprieté d'universalité, il y a le morphisme :

$$\varphi : K \to (1 \times f)^{-1}(K').$$

φ est monomorphisme parceque k est monomorphisme.

Donc K est un sousobjet de $(1 \times f^{-1})(K')$. Le foncteur $\forall p_2$ conserve les monomorphismes, donc $\forall p_2(K)$ est un sousobjet de l'objet: $\forall p_2(1 \times f)^{-1}(K') = f^{-1} \forall \pi_2(K')$. (de la relation 1). Donc $\forall p_2(K)$ est un sousobjet de $f^{-1} \forall \pi_2(K')$.

Appliquons le foncteur $\exists f$ qui est adjoint à gauche de f^{-1} : on obtient que $\exists f \forall p_2(K)$ est un sousobjet de $\forall \pi_2(K')$. Par définition on prend $\exists f \forall_{p_2}(K) = \mathrm{Im}(fh)$.

Donc il y a le morphisme : $\theta : \exists f \forall p_2(K) \to \forall \pi_2(K')$.

$$\begin{tikzcd}
\forall p_2(K) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "r"] \arrow[dd, "\theta r"'] & X \arrow[dd, "f"] \\
& \mathrm{Im}(fh) = \exists f(\forall_{p_2} K) \arrow[dl, "\theta"] \arrow[dr, "j"] & \\
\forall \pi_2(K') \arrow[rr, "k'"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

On a les relations :

$$fh = jr,\ h'\theta = j,$$

$$h'(\theta r) = (h'\theta) r = jr = fh.$$

Donc le morphisme α est θr, et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. Schubert H. — *Categories*, New-York, 1972.
2. Bucur I. and A. Deleanu — *Introduction to the theory of Categories and Functors*, John Wiley § Sons.
3. Eckmann B., Hilton P.—*Group-like structures in general categories*, I. Math. Ann 145 (1961/62), 227—244.
4. Eckmann B., Hilton P. — *Group-like structures in general categories*, II. *Equalizers, limits, lengths*. Math. Ann. 151 (1963) 150—186.
5. Eckmann B., Hilton P. — *Group-like structures in general categories*, III *Primitive categories*, Math. Ann. 150 (1963), 165—187.
6. Johnstone P.T. — *Topos theory*, Academie Press.

Reçu e 11. VI. 1980

Str. Sergent Gh. Iorga Nr. 1
Bl. 59B, Et. 6, Sc. 2, Ap. 131
76405—București, 5
R.S. România