COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. V. BARBU, Prof. I. CREANGĂ, Prof. GH. GHEORGHIEV,
Prof. A. HAIMOVICI, Prof. D. IEȘAN, Prof. C. IGNAT,
Prof. R. MIRON, Conf. T. PRECUPANU
Prof. A. HAIMOVICI — *Redactor responsabil*
Prof. D. IEȘAN — *Secretar de redacție*
V. DUMISTRĂCEL — *Tehnoredactor*

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXX—2, s. I a Matematică

L'ORBITE DANS UN TOPOS ÉLÉMENTAIRE

PAR

MIRCEA GEANĂU

Soit G un groupe qui opère sur un ensemble M. Sur l'ensemble M il y a une relation d'équivalence ρ, induite par l'action du groupe G définie par : $y\rho x$ si et seulement s'il y a $g \in G$ tel que $y = gx$.

Par définition l'orbite de M est l'ensemble quotient M/ρ.

Soit $\mathcal{E}$ un topos élémentaire, soit G un objet groupe de $\mathcal{E}$ et soit $G\mathcal{E}$ le topos des G-objets à gauche de $\mathcal{E}$, c'est à dire les objets de $G\mathcal{E}$ sont les objets de $\mathcal{E}$ sur lesquels G opère (à gauche) et dont les morphismes sont les homomorphismes des G-objets. (Pour la définition d'un topos élémentaire et pour celle d'un G-objet voir : [2], [3] et [5]).

Dans ce qui suit nous allons essayer de traiter la notion d'orbite dans le topos élémentaire $G\mathcal{E}$.

Soit $(X, W_X : G \times X \to X)$ un G-objet de $\mathcal{E}$. On désigne par R l'image inverse de X par le morphisme $W_X \times l_X$, c'ést à dire R est le produit fibré suivant :

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "b"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\Delta_X"] \\ G \times X \times X \arrow[r, "W_X \times l_X"] & X \times X \end{tikzcd}$$

Soit $p = \langle p_2, p_3 \rangle$ le morphisme $G \times X \times X \to X \times X$, ($p_i$, $i = 1, 2, 3$, sont les projections canoniques de $G \times X \times X$). On désigne par $\exists_p(R)$ l'image du morphisme pi. Donc il résulte que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads] \arrow[d, "i"'] & \exists_p(R) = \mathrm{Im}(pi) \arrow[d, "j"] \\ G \times X \times X \arrow[r, "p = \langle p_2, p_3 \rangle"] & X \times X \end{tikzcd}$$

Dans le topos des ensembles, cela signifie : $\exists_p(R) = \{(x, y), \exists g \in G (g, x, y) \in R\} = \{(x, y), \exists g \in G, (gx, y) \in \Delta_X\} = \{(x, y), \exists g \in G, y = gx\}$.

Définition. *Soit X un G-objet. On appelle orbite de X et on la désigne par X/G le conoyau des morphismes $\pi_i j$, $i = 1, 2, \ldots$ où $\pi_i : X \times X \to X$, $i = 1, 2$ sont les projections canoniques de $X \times X$.*

$$\begin{tikzcd} \exists_p(R) \arrow[r, shift left, "\pi_1 j"] \arrow[r, shift right, "\pi_2 j"'] & X \arrow[r, two heads, "\mu"] & X/G. \end{tikzcd}$$

Proposition 1. *Soient $(X/G, \mu : X \to X/G)$ et $(Y/G, \lambda : Y \to Y/G)$ les orbites des G-objets X et respectivement Y et soit $F : X \to Y$ un morphisme de $G\mathcal{E}$. Alors il y a un seul morphisme $\overline{F} : X/G \to Y/G$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "F"'] & X/G \arrow[d, "\overline{F}"] \\ Y \arrow[r, "\lambda"] & Y/G \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit R' l'image inverse de Y par le morphisme $W_Y \times \times l_Y$ et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[rr, "b'"] \arrow[d, hook, "i'"'] & & Y \arrow[d, hook, "\Delta_Y"] \\ G\times Y\times Y \arrow[rr, "W_Y\times I_Y"'] & & Y\times Y \\ & R \arrow[ul, dashed, "(1_G\times F\times F)i"] \arrow[ur, "Fb"'] & \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif, c'est à dire on a $(W_Y \times l_Y)(l_G \times F \times F)i = (F \times F)(W_X \times l_X)i = (F \times F)\Delta_X b = (F \times F) < b, b > = < Fb, Fb > = \Delta_Y Fb$.

La deuxième égalité résulte de la commutativité du diagramme 1 et la première de la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} G\times X\times X \arrow[r, "W_X\times l_X"] \arrow[d, "l_G\times F\times F"'] & X\times X \arrow[d, "F\times F"] \\ G\times Y\times Y \arrow[r, "W_Y\times l_Y"] & Y\times Y \end{tikzcd}$$

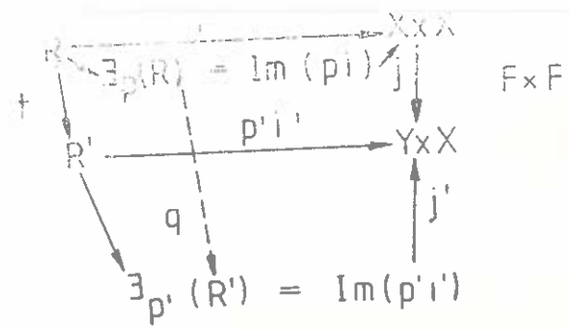
qui est dû au fait que F est un homomorphisme des G-objets.

De la propriété d'universalité du produit fibré dans le diagramme (2) il y a un seul morphisme $t : R \to R'$ tel que $i't = (l_G \times F \times F)i$ et $b't = Fb$.

Dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "t"'] & G\times X\times X \arrow[r, "p=<p_2,p_3>"] \arrow[d, "l_G\times F\times F"'] & X\times X \arrow[d, "F\times F"] \\ R' \arrow[r, "i'"] & G\times Y\times Y \arrow[r, "p'=<p'_2,p'_3>"] & Y\times Y \end{tikzcd}$$

le carré situé à gauche est commutatif d'après ce que nous avons montré dans le produit fibré (2) et celui situé à droite commute évidemment ; donc il résulte que l'extérieur du contour est aussi commutatif. A cause de celà il résulte que dans le diagramme suivant :



grâce à la fonctorialité de l'image, il y a un seul morphisme $q : \exists_p(R) \to \exists_{p'}(R')$ tel que les deux faces latérales soient commutatives, ce qui rend la commutativité de toutes le faces du prisme. Dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \exists_p(R) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q"'] & X\times X \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] \arrow[d, "F\times F"] & X \arrow[d] \\ \exists_{p'}(R') \arrow[r, "j'"] & Y\times Y \arrow[r, shift left, "\pi'_1"] \arrow[r, shift right, "\pi'_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

à cause du fait que les trois carrés sont commutatifs il résulte que les extérieurs du contour sont aussi commutatifs. On a le diagramme suivant dont les carrés situés à gauche et au milieu sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & \exists_p(R) \arrow[r, shift left, "\pi_1 j"] \arrow[r, shift right, "\pi_2 j"'] \arrow[d, "q"] & X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "F"] & X/G = \mathrm{coker}(\pi_1 j, \pi_2 j) \arrow[d, "\overline{F}"] \\ R' \arrow[r] & \exists_{p'}(R') \arrow[r, shift left, "\pi'_1 j'"] \arrow[r, shift right, "\pi'_2 j'"'] & Y \arrow[r, "\lambda"] & Y/G = \mathrm{coker}(\pi'_1 j', \pi'_2 j') \end{tikzcd}$$

d'où, à cause de la fonctorialité du conoyau, il résulte qu'il y a un seul morphisme $\overline{F} : X/G \longrightarrow Y/G$ tel que le carré situé à gauche soit commutatif.

Remarque. L'association

$$\begin{tikzcd} (X, w_X) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "F"'] & X/G \arrow[d, "\overline{F}"] \\ (Y, w_Y) \arrow[r, squiggly] & Y/G \end{tikzcd}$$

définit un foncteur $\tau : {}_G\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Proposition 2. *Le foncteur $\tau : {}_G\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est un adjoint à gauche du foncteur $T : \mathcal{E} \to {}_G\mathcal{E}$ défini par $T(A) = (A, p_2 : G \times A \to A)$ (G opère trivialement sur A).*

Démonstration. Quel que soit $X \in |{}_G\mathcal{E}|$, $Y \in |\mathcal{E}|$ on a un isomorphisme fonctoriel :

$\mathcal{E}(\tau(X), Y) \xrightarrow{\Phi(X, Y)} {}_G\mathcal{E}(X, T(Y))$ défini par $\Phi(f) = f\mu$, où, $f : \tau(X) = X/G \to Y$. Le morphisme $f\mu$ est un homomorphisme des G-objets, parce qu'on vérifie aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[r, "l_G\times f\mu"] \arrow[d, "w_X"] & G\times Y \arrow[d, "d_2"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

L'inverse de $\Psi(X, Y)$, $\Phi(X, Y)$, est défini par : F : si $X \to T(Y) = (Y)$ est un homomorphisme il y a un seul morphisme $\overline{F} : X/G \longrightarrow Y$ tel que $F = \overline{F}\mu$; on met $\Psi(F) = \overline{F}$. On a les relations :

$$\Psi(X, Y)\,\Phi(X, Y)(f) = \Psi(X, Y)(f\mu) = f,$$

$$\Phi(X, Y)\Psi(X, Y)(F) = \Phi(X, Y)(\overline{F}) = \overline{F}\mu = F.$$

Nous allons montrer la fonctorialité de Ψ. Soit $\alpha : X_1 \longrightarrow X$ un monomorphisme ; il y a un seul morphisme $\overline{\alpha} : X_1/G \longrightarrow X/G$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & X/G \arrow[d, "\overline{\alpha}"] \\ X_1 \arrow[r, "\mu_1"] & X_1/G \end{tikzcd}$$

Il faut vérifier la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} {}_G\mathcal{E}(X, T(Y)) \arrow[r, "\Psi(X_1, Y)"] \arrow[d, "\overline{h}_y(\alpha)"] & \mathcal{E}(X/G, Y) \arrow[d, "h_y(\overline{\alpha})"] \\ {}_G\mathcal{E}(X_1, T(Y) \arrow[r, "\Psi(X, Y_1)"] & \mathcal{E}(X_1/G, Y_1) \end{tikzcd}$$

Soit $F : X \longrightarrow T(Y)(=Y)$ un monomorphisme ; les relations suivantes sont vraies :

$$h_y(\overline{\alpha})\Psi(X, Y)(F) = h_y(\overline{\alpha})(\overline{F}) = \overline{F}\overline{\alpha}$$

$$\Psi(X_1, Y)\ h_y(\alpha)(F) = \Psi(X_1, Y)(F\alpha) = \overline{F\alpha} = \overline{F}\overline{\alpha},$$

Parce que le morphisme $\overline{F\alpha} : X_1/G \longrightarrow Y$ est l'unique morphisme tel que $F\alpha = \overline{F\alpha}\mu_1$ et le morphisme $\overline{F}\overline{\alpha}$ vérifie l'égalité $\overline{F}\overline{\alpha}\mu_1 = \overline{F}\mu\alpha = F\alpha$, il résulte l'égalité $\overline{F\alpha} = \overline{F}\overline{\alpha}$ ce qui montre la commutativité du diagramme de plus haut.

Soit $\beta : Y \longrightarrow Y_1$; alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} {}_G\mathcal{E}(X, T(Y)) \arrow[r, "\Psi(X, Y)"] \arrow[d, "\overline{h}_X(\beta)"] & \mathcal{E}(X/G, Y) \arrow[d, "\overline{h}_{X/G}(\beta)"] \\ {}_G\mathcal{E}(X, T(Y_1) \arrow[r, "\Psi(X, Y_1)"] & \mathcal{E}(X/G, Y_1) \end{tikzcd}$$

$$\overline{h}_{X/G}(\beta)\Psi(X, Y)(F) = h_{X/G}(\beta)(\overline{F}) = \beta\overline{F}$$

$$\Psi(X, Y_1)\overline{h}_Y(\beta)(F) = \Psi(X, Y_1)(\beta F) = \overline{\beta F} = \beta\overline{F}.$$

Parce que le morphisme $\overline{\beta F}$ est l'unique morphisme tel que $\beta F = \overline{\beta F}\mu$ et le morphisme $\beta\overline{F}$, vérifie l'égalité $\beta F = \beta\overline{F}\mu$ il résulte l'égalité $\overline{\beta F} = \beta\overline{F}$ ce qui montre la commutativité du diagramme de plus haut et donc il résulte que Ψ est un isomorphisme fonctoriel.

BIBLIOGRAPHIE

1. Johnstone P. T. — *Topos theory*, Academic Press, 1962
2. Radu Al. — *Teoria toposurilor*, Vol. I, Editura Academiei R.S.R., 1979
3. Geanău M. — *Sur un invariant dans un topos élémentaire*. An. şt. Univ. Iaşi, T. XXVII s. I a, 1981, f. 2
4. Giraud J. — *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag. Heidelberg, New York
5. Schubert H. — *Categories*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

Reçu le 12.XII.1981

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX—2, s. I a Matematică

ON THE CONSTRUCTION OF BOL LOOPS, II

BY

A. R. T. SOLARIN and B. L. SHARMA

1. **Introduction.** A loop $L(.)$ is a right Bol loop if and only if for all $x, y, z, \in L$,

$$(xy.z)y = x(yz.y). \tag{1}$$

Bol loops had been discussed by Bol [1] and Robinson [5]. Burn [3] has proved that for any prime p, a Bol loop of order $2p$ or p^2 is necessarily a group. In an earlier paper [7], we disproved a conjecture that Bol loops of order $2p^2$, where p is an odd prime are necessarily groups by constructing Bol loops of order $2p^2$ which are non-associative. In continuation of the previous study, we consider existence of non-associative Boll loops of order p^2q where p and q are odd prime integers. We shall establish their existence for two generators. In particular we settle some of the open problems stated by Harald Niederreiter and Karl H. Robinson [4] that Bol loops of orders 18, 35, 50, 70, 77, 85 and 98 can not be determined. Here we settle 18, 50 and 98.

2. In our previous paper [7] we proved the following theorem.

Theorem 1. *Let H be a non abelian subgroup of a group G and let $A = H \times G$. For (h_1, g_1) and (h_2, g_2) in A, define*

$$(h_1, g_1)\circ(h_2, g_2) = (h_1h_2, h_2g_1h_2^{-1}g_2)\ ; \tag{2}$$

then $A(0)$ is a Bol loop.

In the next theorem we shall prove that any Bol loop obtained by the above theorem contains a sub-loop which is also a Bol loop. For example if G is a non abelian group of order pq, where q divides $p-1$, then $A = G \times G$ contains a Bol loop of order p^2q.

Theorem 2. *Let G be a nonabelian group of order pq, and let $A = G \times G$. For (h_1, g_1) and (h_2, g_2) in A, define*

$$(h_1, g_1)\circ(h_2, q_2) = (h_1h_2, h_2g_1h_2^{-1}g_2), \tag{2}$$

then $A(\circ)$ is a Bol loop of order p^2q^2 and A contains a subloop of order p^2q which is also a Bol loop.

Proof. By theorem 1, $A(\circ)$ is a Bol loop and $o(A) = p^2q^2$.