$K>0$, from (2.9) results $K\leqslant 0$, contradiction. Similarly $c\leqslant 0$ if $K<0$, which contradicts $K\geqslant 0$ as it results from the above equality.

Let D be the connection (1.3), ω being the solution of the equations (2.2)(2.3)($c\neq 0$, $c>0$ if $K>0$ and $c<0$ if $k<0$). The connection is semi-symmetric S-concircular with $f=(ce^{h}-r)/[2n(n-1)]$. From (1.28) and (2.10) results $R=ce^{h}$ and $R\neq$ct. If $K>0$ then $R>0$. If $K<0$ then $R<0$. Or.

Proposition (2.2). *If the Riemannian manifold (L_n, g, ∇) is of constant curvature, then there exists, in L_n, a semi-symmetric metric connection, whose D-concircular curvature tensor vanishes, and the scalare curvature $R>0$ if $K>0$ or $R<0$ id $K<0$.*

This proposition generalises the result of K. Yano [13] and the result from [11], obtained for $c=1$.

REFERENCES

1. Eisenhart, L. P. — *Non Riemannian Geometry*. American Math. Soc. New-York 27 (1927)
2. Eisenhart, L. P. — *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press (1949)
3. Kobayaschi, S., Nomizu, K. — *Foundations of Differential Geometry* I. Interscience Publishers. New-York (1953)
4. Dieudonné, J. — *Eléments d'analyse*. Gauthier Villars. Editeur Paris t. IV (1971)
5. Gheorghiez, Gh., Oproiu, V. — *Geometrie diferențială*. Ed. didactică și pedagogică. București. 1977
6. Miron, R. — *Introducere în geometria diferențială*. Univ. Al. I. Cuza — Iași (1971)
7. Papuc, D., Albu, A. — *Elemente de geometrie diferențială globală*. Ed. didactică și pedagogică. București, 1973
8. Stavre, P. — *Asupra formei canonice a unei conexiuni*. St. și cercet. mat., București, t. 22 nr. 1. (1970) 73—80
9. Stavre, P. — *On the S-concircular and S-coharmonic connection Tensor N.S.* (to appear)
10. Stavre, P. — *On the D-concircular and D coharmonic transformations* (to appear)
11. Stavre, P. — *Asupra conexiunilor semi-simetrice, metrice, cu curbură scalară pozitivă* (va apare)
12. Stavre, P. — *Asupra unui sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi pe varietăți diferențiabile*. Colocviul Național de analiză funcțională și ecuații. Craiova, 7.XI.1981
13. Yano, K. — *On semi-symmetric-metric connection*. Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl. București 9 (1970) 1579—1586
14. Yano, K. — *Concircular Geometry I*. Math. Inst. Tokyo Proc., vol. 16, (1940) 195—200

Received 8.I.1982

Department of Mathematics
University of Craiova
Craiova, R. S. România

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXX — 2, s. I a Matematică

CONFRONTO ED EQUIVALENZE TRA LE DIVERSE GENERALIZZAZIONI DELLA DERIVAZIONE TORSIONALE DI A. G. WALKER

DI

M. PAOLA PIU

Dedicato al Professore Ettore Picasso

Introduzione. Sia M una varietà differenziabile m-dimensionale, e sia J un campo di endomorfismi che definisce su M una struttura *quasi complessa* ($J^2=-I$).

Alla torsione della struttura quasi complessa A. G. Walker ha associato un operatore differenziale di grado 2 da lui chiamato *derivazione torsionale* [W1]. Con metodi e in contesti diversi, la derivazione di Walker è stata estesa a strutture definite da campi tensoriali di tipo (1,1) diverse e più generali della struttura quasi complessa (a K. Yano [Y], da T.J. Willmore [WL], da Th. Hangan [HN], dallo stesso Walker [W2] e da C. J. Hsu [H2].

Questa Nota è costituita essenzialmente da tre parti. Nella prima parte dimostreremo innanzitutto che la derivazione trovata da Yano può essere ridescritta in forma invariante in termini di derivazioni di Lie. Quindi, tenendo conto delle formule che si trovano in [P], saremo in grado di mettere agevolmente a confronto i risultati di Yano, di Willmore, di Hangan e di Walker, e di riconoscere che la derivazione trovata da Hangan è diversa dalle altre.

Nella seconda parte si dimostra che, sulla base dei risultati ottenuti, è possibile far vedere che le funzioni h^{i}_{jkl}, di cui Hangan fa uso per costruire una derivazione torsionale [HN], possono ricondursi, nel caso di una struttura quasi complessa, alle componenti h^{i}_{jkl} introdotte da Walker in [W1].

Infine, la derivazione di Hsu viene messa in forma invariante. Essa risulta contenere tutte le altre, ad eccezione di quella di Hangan, come casi particolari.

1. Sia M una varietà differenziabile di classe C^∞ e sia $\mathfrak{X}(M)$ l'algebra di Lie dei campi di vettori C^∞ su M. Se $J=(h^i_j)$ è un campo tensoriale di tipo (1,1) su M, la sua *torsione* $H=(H^i_{jk})$ è la 2-forma vettoriale definita per ogni coppia di campi vettoriali $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ dall'espressione (Nijenhuis).

$$(1.1)\qquad 4H(X, Y)=J([JX, Y]+[X, JY]-[JX, JY]-J^2[X, Y]=$$
$$=[J, J](X, Y).$$

Supponiamo che J definisca su M una struttura *quasi complessa* ($J^2=-I$) e *quasi prodotto* con due distribuzioni ($J^2=I$), non integrabile ($H\neq 0$). Su

tali varietà una *derivazione torsionale* è l'operatore differenziale d'ordine 2 la cui azione su funzioni e campi vettoriali di classe C^∞ su M è data da

$$W(f)=\langle df,\ H\rangle,\quad W(Z)=1/2.\ (J\mathcal{L}_{JZ}H+J^2\mathcal{L}_ZH), \tag{1.2}$$

dove con $\mathcal{L}_X$ si denota la derivazione di Lie in direzione del campo di vettori X. Osserviamo che, nel caso quasi complesso, la seconda delle (1.2) si riduce alla formula trovata da Willmore in [WL], mentre nel caso quasi prodotto le (1.2) sono equivalenti alle condizioni che appaiono nella definizione data da Walker in [W2] per strutture quasi prodotto con k distribuzioni ($J^k=I$). Sempre nel caso in cui $J^2=I$, un calcolo diretto, semplice ma lungo, consente di verificare che, in un sistema di coordinate locali, le componenti della derivazione torsionale definita mediante le (1.2) coincidono con quelle trovate da Yano in [Y].

2. Ricorderemo ora brevemente la descrizione invariante [C2] della derivazione torsionale introdotta da Hangan in [HN].

Osserveremo innanzitutto che, se M è una varietà quassi prodotto con due distribuzioni, una derivazione torsionale è una applicazione $W: Z\to W_{X\wedge Y}Z$ **R**-lineare negli argomenti e soddisfacente le proprietà [C1]

$$\text{(i)}\quad W_{X\wedge Y}fZ=fW_{X\wedge Y}Z+(\mathcal{L}_{H(X,Y)}f)\,Z,\qquad \text{(ii)}\quad W_{fX\wedge Y}Z=fW_{X\wedge Y}Z,$$

dove $f\in C^\infty(M)$.

Se $P=(1/2)\,(I+J)$ e $Q=1/2\,(I-J)$ sono i proiettori canonici associati alla struttura, le applicazioni V^P e V^Q definite da

$$V^P(X,\ Z)=P[QX,\ PZ],\quad V^Q(X,\ Z)=Q[PX,\ QZ],\quad \forall X,\ Z\in X(M)$$

sono l'espressione invariante delle due connessioni parziali complementari scoperte da G. Vranceanu in [V] nello studio dei gruppi separabili di trasformazioni di congruenze. Esse definiscono un trasporto parallelo di campi vettoriali interni a $P(TM)$ lungo cammini normali (interni a $Q(TM)$) ed un trasporto parallelo di campi vettoriali di $Q(TM)$ lungo cammini interni a $P(TM)$ rispettivamente. Se ∇ é una connessione lineare simmetrica che estende simultaneamente V^P e V^Q, siano A' e B' le funzioni definite da

$$A'(X,\ Y\ ;\ Z)=P\{\nabla_{H'(QX,QY)}PZ-(\nabla_{PZ}H')\,(QX,\ QY)\}, \tag{2.1}$$

$$B'(X,\ Y\ ;\ Z)=Q[P[QX,\ QY],\ QZ], \tag{2.2}$$

dove H' é la 2-forma vettoriale definita da

$$H'(X,\ Y)=P[QX,\ QY]. \tag{2.3}$$

Si può verificare agevolmente che, mentre le funzioni A', B', e quelle A'' e B'' che si ottengono da A' e B', rispettivamente, scambiando tra loro P e Q e H' con H'', $H''(X,\ Y)=Q[PX,\ PY]$ non sod disfano la (i), e quindi non sono derivazioni torsionali, le funzioni $w'=A'+B'$, $w''=A''+B''$ e $L=w'+w''$ sono derivazioni torsionali. In conclusione, per ogni coppia di arbitrari campi di vettori X e Y la derivata torsionale del campo di vettori Z data da Hangan risulta essere

$$L_{X\wedge Y}Z=A'(X,\ Y\ ;\ Z)+B'(X,\ Y\ ;\ Z)+A''(X,\ Y\ ;\ Z)+ +B''(X,\ Y\ ;\ Z). \tag{2.4}$$

Vogliamo ora confrontare la (1.2) con la (2.4). In termini di derivazione di Lie la (2.4) assume l'espressione

$$\begin{aligned} L_{X\wedge Y}Z=&-P\{(\mathcal{L}_{PZ}H')\,(QX,\ QY)+\mathcal{L}_{PZ}H''(X,\ Y)\}-\\ &-Q\{\mathcal{L}_{QZ}H'(X,\ Y)+(\mathcal{L}_{QZ}H'')\,(PX,\ PY)\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

oppure

$$\begin{aligned} L_{X\wedge Y}Z=&1/2(J\mathcal{L}_{JZ}H+\mathcal{L}_ZH)\,(X,\ Y)+(\mathcal{L}_{PZ}H'+\mathcal{L}_{QZ}H'')\,(QX,\ PY)+\\ &+(\mathcal{L}_{PZ}\,H'+\mathcal{L}_{QZ}\,H')\,(PX,\ QY), \end{aligned} \tag{2.6}$$

dove H'' è la 2-forma vettoriale definita da $H''(X,\ Y)=Q[PX,\ PY]$. In conclusione la (1.2) e la (2.4) in generale non coincidono. La loro differenza è data dall'espressione

$$\begin{aligned} D(X,\ Y,\ Z)=\mathcal{L}_{X\wedge Y}Z-W_{X\wedge Y}Z=&(\mathcal{L}_{PZ}\,H'+\mathcal{L}_{QZ}\,H'')\,(PX,\ QY)\\ &+(\mathcal{L}_{PZ}\,H'+\mathcal{L}_{QZ}\,H'')\,(QX,\ PY). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Per ogni $f\in C^\infty(M)$ si ha: $D(fX,\ Y,\ Z)=D(X,\ fY,\ Z)=D(X,\ Y,\ fZ)=fD(X,\ Y,\ Z)$, cioè D è una applicazione tensoriale.

Si può verificare facilmente che rispetto alla somma di quantità tensoriali, la totalità delle derivazioni torsionali é invariante. In conclusione, *a partire da una derivazione torsionale se ne possono ottenere un'infinità mediante l'aggiunta di tensori arbitrari.*

Nella costruzione appena descritta non si richiede che la struttura J sia parallela rispetto alla derivazione L, condizione che invece veniva utilizzata da Yano. Al fine di dimostrare che $LJ=0$ estendiamo l'azione della derivazione torsionale W a 1-forme vettoriali ω ponendo

$$(W_{X\wedge Y}\,\omega)\,Z=W_{X\wedge Y}\,(\omega(Z))-\omega(W_{X\wedge Y}Z). \tag{2.8}$$

Si verifica facilmente, mediante le proprietà (i) e (ii) che caratterizzano una derivazione torsionale, che la (2.8) definisce ancora una derivazione torsionale. Sempre dalla (2.8) si ricava immediatamente che il tensore di struttura J è parallelo rispetto a W se e solo se

$$W\cdot J=J\cdot W. \tag{2.9}$$

Applicando a J la (2.8) e tenendo conto della (2.5) risulta subito che la (2.9) è verificata e che quindi $(L_{X\wedge Y}J)\ (Z)=0$.

3. I risultati appena descritti consentono di comprendere il significato della affermazione, contenuta in [HN] secondo la quale le funzioni

$$\begin{aligned} h'^i_{jkl}=&P^i_uQ^r_kQ^w_l\{P^r_j\partial_r[Q_w,\ Q_r]^u+[P_j,\ P_r]^u\ \partial_{[w}Q^r_{l]}+\\ &+Q^s_r(\partial_{[s}P^u_{[k]}\partial_{w]}P^r_j+\partial_sQ^u_{[w}\partial_{w]}P^r_j)\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

di cui Hangan fa uso per costruire una derivazione torsionale, possono ricondursi, nel caso di strutture quasi complesse, alle componenti h^i_{jkl} introdotte da Walker [W1].

Su una varietà quasi prodotto le $\bar{h}^i_{jkl}$, che si ricavano dalla (2.5), differiscono dalle r^i_{jkl} di Yano-Walker [Y] per il coefficiente d^i_{jkl} di Z^j che si ottienne coefficiente scrivendo in coordinate locali la (2.7).

Dal momento che le Γ^i_{jkl} si riducono alle h^i_{jkl} di Walker nel caso di strutture quasi complesse, avremo risolto il nostro problema una volta che saremo riusciti a stabilire il legame tra le h'^i_{jkl} e le $\tilde{h}^i_{jkl}$.

Se si scrive la funzione A' in coordinate locali, e si denotano con l'^i_{jkl} il coefficiente di Z^l e con δ^i_{jkl} la differenza tra l'^i_{jkl} e h'^i_{jkl}, risulta

$$\tilde{h}^i_{jkl} = h'^i_{jkl} + \delta^i_{jkl} + k'^i_{jkl} + l''^i_{jkl} + k''^i_{jkl}$$

dove l'^i_{jkl}, k'^i_{jkl}, l''^i_{jkl}, k''^i_{jkl} provengono da A' B' A'' e B'' rispettivamente.

4. Sia J una r-π-struttura ($J^r = \lambda^r$, $\lambda \in \mathbf{C}$) non integrabile su M; essa induce una partizione di $\mathbf{C} \otimes TM$ determinata dagli r proiettori

$$P_\alpha = (1/r) \sum_{s=0}^{r-1} 1/((\lambda w_\alpha)^s) J^s, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{4.1}$$

dove le w_α sono le radici r-me dell'unità.

In coordinate locali, una derivazione torsionale per r-π-strutture è stata data da H s u in [H2]. Mostreremo ora innanzitutto come ad una tale struttura sia possibile associare una derivazione di W a l k e r in modo invariante. Verificheremo poi che in un sistema di coordinate locali il nostro risultato e quello di H s u coincidono.

Tenendo conto della (1.1), la torsione della r-π-struttura assume l'espressione

$$T(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha [P_\alpha, P_\alpha] (X, Y). \tag{4.2}$$

Allora, per ogni campo di vettori $Z \in \mathfrak{X}(M)$, la 2-forma vettoriale W, definita dalla formula

$$W(Z) = -\sum_{\alpha} P_\alpha (\mathcal{L}_{P_\alpha Z} T). \tag{4.3}$$

soddisfa le (i) e (ii) e quindi è una derivazione torsionale. D'altra parte, se si denotano con H^i_{jk} le componenti locali di T e si introducono le notazioni

$$\overset{s}{h}{}^i_j = h^i_{k_1} h^{k_1}_{k_2} \ldots h^{k_{s-1}}_j, \quad \overset{0}{h}{}^i_j = \delta^i_j, \quad \Phi = \sum_\alpha P_\alpha \otimes P_\alpha,$$

$$(W(Z))^i_{jk} = -\sum_\alpha (P^i_{\alpha r} P^\rho_{\alpha\beta} Z^\beta \partial_\rho H^r_{jk} - P^i_{\alpha r} H^s_{jk} \partial_s (P^r_{\alpha\beta} Z^\beta) + P^i_{\alpha r} H^r_{sk} \partial_j (P^s_{\alpha\beta} Z^\beta) +$$

$$+ P^i_{\alpha r} H^r_{js} \partial_k (P^s_{\alpha\beta} Z^\beta) = H^s_{jk} \partial_s Z^i + Z^\beta \Big\{ -\Phi^{i\rho}_{r\beta} \partial_\rho H^r_{jk} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=1}^{r-1} \frac{1}{r} \Big(\frac{1}{r} H^s_{js} \frac{1}{(\lambda w_\alpha)^{s+t}} \overset{t}{h}{}^i_a \overset{t}{h}{}^a_\beta + - \frac{1}{r} H^a_{sk} \frac{1}{(\lambda w_\alpha)^{s+t}} \overset{s}{h}{}^i_a \partial_j \overset{t}{h}{}^s_\beta -$$

$$- \frac{1}{r} H^a_{js} \frac{1}{(\lambda w_\alpha)^{s+t}} \overset{s}{h}{}^i_a \partial_k \overset{t}{h}{}^s_\beta \Big) \Big\}.$$

Ricordando che $\sum_{\alpha=1}^{r} 1/(\lambda w_\alpha)^{s+t} \neq 0$ solo per $s+t=r$ e che $\sum_{\alpha=1}^{r} 1/(\lambda w_\alpha)^r = r/\lambda^r$ si ha per $s=r-t$.

$$(W(Z))^i_{jk} = H^s_{jk} \partial_s Z^i + Z^\beta \Big\{ -\Phi^{i\rho}_{r\beta} \partial_\rho H^r_{jk} + \frac{1}{r\lambda^r} H^a_{jk} \overset{r-t}{h}{}^i_a \sum_{t=1}^{r-1} \overset{t}{h}{}^a_\beta +$$

$$- \frac{1}{r\lambda^r} \Big(H^i_{sk} \sum_{t=1}^{r-1} \partial_j \overset{t}{h}{}^s_\beta - H^a_{sj} \partial_k \overset{t}{h}{}^s_\beta \Big) \overset{r-t}{h}{}^i_a \Big\}.$$

e i coefficienti di Z coincidono con le componenti della derivazione torsionale introdotta da H s u in [H2]. In conclusione, *la (4.3) rappresenta la forma invariante della derivazione torsionale associata a una r-π-struttura*. Inoltre si verifica facilmente che per $\lambda = 1$ la r-π-struttura si riduce alla struttura quasi prodotto con r distribuzioni considerata da W a l k e r in [W2], e che per $r=2$ e $\lambda = i$ si ottiene la struttura quasi complessa; in tali situazioni la (4.3) coincide con le derivate torsionali associate rispettivamente a tali strutture.

BIBLIOGRAFIA

[C1] C a d e o, R. — *Alcune considerazioni sulla derivazione torsionale*, Rév. Roum. Math. Pures et Appl. 1977, XXII, 1, 31—38

[C2] C a d e o, R. — *Connessioni parziali*, Rév. Roum. Math. Pures et Appl. 1979, XXIII, 7

[HN] H a n g a n, Th. — *Asupra diferențierilor formelor tensoriale asociate unui tensor mixt de ordinul al doilea*. An. Univ. București, 1961, X, 29.

[H1] H s u, C. J. — *On some properties of π-structures on differentiable manifold*, Tôhoku Math. Journ. 12, 1960, 429—454

[H2] H s u, C. J. — *On Walker differentiation in differentiable manifold with r-π-structure*, Tôhoku Math. Journ, 1962.

[P] P i u, P. M, — *Confronto ed equivalenze tra le diverse generalizzazioni della derivazione torsionale di Walker*, Tesi di laurea

[V] V r a n c e a n u, G. — *Sur l'équivalence en géométrie*. Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sciences, 42 (1941)

[W1] W a l k e r, A. G. — *Dérivation torsionnelle et seconde torsion pour une structure presque complèxe*. Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 1957, 245, 1213—1215

[W2] W a l k e r, A. G. — *Almost-product structures*. Proc. Symp. Math. Vol. III, Diff. Geom. A.M.S. 1961

[WL] W i l l m o r e, T. J. — *Generalized torsional derivation*. Atti della Accad. Naz. dei Lincei, 1959, 26, 5

[Y] Y a n o, K. — *On Walker differentiation in almost product or almost complex space*, Indagationes Math. 1958, 20

Received 4.IX.1982

Istituto Matematico
Via Ospedale 72
09100 Cagliari (Italia)