3. Agarwal, R. P. — *Oscillation and asymptotic behaviour of solutions of differential equations with nested arguments*, Boll. U.M.I. (to appear).
4. Bykov Ya. V. and Ševcov E. I. — *Sufficient conditions for oscillation of solutions of nonlinear finite difference equations* (in Russian). Differencial'nye Uravnenija 9 (1973), 2241–2244.
5. Bykov Ya V. and Živogladova, L. V. — *On the oscillation of solutions of nonlinear finite difference equations* (in Russian), Differencial'nye Uravnenija, 9 (1973), 2080–2081.
6. Bykov, Ya. V., Živogladova, L. V. and Ševcov, E. I. — *Sufficient conditions for oscillation of solutions of nonlinear finite difference equations* (in Russian), Differencial'nye Uravnenija 9 (1973), 1523–1524.
7. Bykov, Ya. V., Merzljakova G. D. and Ševcov E. I. — *The oscillation of the solutions of nonlinear difference equations* (in Russian), Differencial'nye Uravnenija, 11 (1975), 1460–1473.
8. Hartman, P. — *Difference equations. Disconjugacy, Principal solutions, Green's functions,* Complete monotonicity, Trans. Amer. Math. Soc. 246 (1978), 1–30.
9. Kartsatos, A. G. — *On oscillation of solutions of even order nonlinear differential equations*, J. Diff. Equs. 6 (1969), 232–237
10. Onose, H. — *Oscillatory property of certain non-linear ordinary differential equations*, Proc. Japan Acad. 44 (1968), 232–237.
11. Onose, H. — *Oscillatory property of certain non-linear ordinary differential equations II*, Proc., Japan Acad. 44 (1968), 876–878.
12. Onose, H. — *Oscillatory property of certain non-linear ordinary differential equations* SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), 715–719.
13. Onose, H. — *Oscillatory property of ordinary differential equations of arbitrary order*, J. Diff. Equs. 7 (1970), 459–472.
14. Szmanda, B. — *Oscillation theorems for nonlinear second-order difference equations* J. Math. Anal. Appl. 79 (1981), 90–95.
15. Thandapani E. and Agarwal, R. P. — *Asymptotic behaviour and oscillation of solutions of differential equations with deviating arguments*, Boll. U.M.I. 17-B (1980), 82–93.

Received 13.IV.1982

Department of Mathematics
National University of Singapore
Kent Ridge, Singapore 0511

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 2

LE PROBLÈME DE DARBOUX POUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES MULTIVOQUE

PAR

GEORGETA TEODORU

Le but de cette Note est de donner un résultat d'existence locale pour le problème de Darboux défini pour une équation hyperbolique multivoque.

Supposons satisfaites les hypothèses suivantes :

(H_1) $F : D\times\Omega\to 2^{R^n}$ est une fonction multivoque à valeurs compactes, convexes, non vides dans R^n, $D=[0, a]\times[0, b]$, Ω un ensemble ouvert dans R^n,

(H_2) Pour tout $(x, y)\in D$, l'application $z\to F(x, y, z)$ est semi-continue supérieurement sur Ω,

(H_3) Pour tout $z\in\Omega$, l'application $(x, y)\to F(x, y, z)$ est mesurable Lebesgue dans D,

(H_4) Il existe une fonction $g : D\to R_+$, $g\in \mathcal{L}^1(D ; R_+)$ telle que $\| u \|\leq g(x, y)$, $\forall u\in F(x, y, z)$, $\forall(x, y)\in D$, $\forall z\in\Omega$,

(H_5) Il existe un ensemble convexe, compact, $M\subset\Omega$ et un point $(x_0, y_0)\in\,]0, a]\times]0, b]$, tel que

$$\int_0^{x_0}\int_0^{y_0} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\leq d(M, C_\Omega),$$

où $d(M, C_\Omega)$ est la distance de M à $C_\Omega=R^n-\Omega$.

(H_6) Les fonctions $\sigma\in AC([0, a] ; R^n)$, $\tau\in AC([0, b] ; R^n)$, où $AC([\alpha_1, \alpha_2] ; R^n)$ est l'espace des fonctions absolument continues $f: [\alpha_1, \alpha_2]\subset R\to R^n$, avec la norme

$$|f|=\sup_{t\in[\alpha_1,\alpha_2]}\|f(t)\|+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\|f'(t)\|\, dt,$$

satisfont à la condition $\sigma(0)=\tau(0)$, et la fonction $\alpha : D\to R^n$, définie par

$$\alpha(x, y)=\sigma(x)+\tau(y)-\sigma(0) \tag{1}$$

a les valeurs dans M pour $(x, y)\in[0, x_0]\times[0, y_0]$.

Il résulte que la fonction α est absolument continue au sens de Carathéodory sur D : $\alpha\in C^*(D ; R^n)$, ([1], p. 651).

Définition 1. *On appelle problème de Darboux pour l'équation hyperbolique multivoque*

(2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \in F(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in D \times \Omega.$$

la détermination d'une solution de cette équation, qui satisfait aux conditions

(3) $$z(x, 0) = \sigma(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$
$$z(0, y) = \tau(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Le sens de la notion de solution est donné par la

Définition 2. *On appelle solution locale du problème de Darboux*
$(2)+(3)$, *une fonction univoque* $Z : [0, x_0] \times [0, y_0] \to \Omega$, *absolument continue*
au sens de Carathéodory [1], *qui satisfait à l'équation* (2) *presque partout pour*
$(x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$ *et aux conditions* (3) *pour tout* $x \in [0, x_0]$ *et* $y \in [0, y_0]$.

Théorème. *Supposons que* $(H_1)-(H_6)$ *soient vérifiées. Alors, il existe*
au moins une solution locale Z du problème de Darboux $(2)+(3)$. *De plus,*
l'ensemble S_α *des solutions locales Z est compact dans l'espace de Banach*
$C([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$ *et l'application multivoque* $\alpha \to S_\alpha$ *est semi-continue*
supérieurement sur $AC([0, x_0] ; R^n) \times AC([0, y_0] ; R^n)$ *à valeurs dans*
$C([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$.

Démonstration. Soit $\mathscr{Z}_M$ l'ensemble des fonctions $Z : [0, x_0] \times [0, y_0] \to$
$\to R^n$, $Z \in C^*([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$, qui satisfont à l'inégalité

(4) $$\left\| \frac{\partial^2 Z(x, y)}{\partial x \partial y} \right\| \leqslant g(x, y), \text{ p.p. pour } (x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$$

et aux conditions (3).

Alors, pour tout $Z \in \mathscr{Z}_M$ et pour tout $(x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$, il ré-
sulte $Z(x, y) \in \Omega$, en vertu de l'hypothèse (H_3) et de la relation (4). L'en-
semble $\mathscr{Z}_M$ est convexe et compact dans $C([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$. La com-
pacité résulte en utilisant le théorème d'Arzelà -- Ascoli et l'hypothèse (H_3).

Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des triplets $(\alpha, Z, U) \in C^*([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n) \times$
$\times \mathscr{Z}_M \times \mathscr{Z}_M$ avec la propriété.

(5) $$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} \in F(x, y, Z(x, y)), \text{ p.p. dans } [0, x_0] \times [0, y_0].$$

Pour chaque $\alpha \in C^*([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$, avec $\alpha(x, y) \in M$ pour
$(x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$, l'ensemble des (Z, U) tels que $(\alpha, Z, U) \in \mathscr{G}$ est non
vide et $\mathscr{G}$ est fermé. En effet, soit $Z \in \mathscr{Z}_M$. En vertu du théorème 1 [2], il
existe une fonction multivoque mesurable Γ définie sur $[0, x_0] \times [0, y_0]$ à
valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de R^n, telle que $\Gamma(x, y) \subset$
$\subset F(x, y, Z(x, y))$, pour tout $(x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$. Alors, en vertu du
théorème 2 ou 3 [3], il existe une sélection mesurable λ pour Γ. Soit la fonc-
tion $U : [0, x_0] \times [0, y_0] \to R^n$, définie par

(6) $$U(x, y) = \alpha(x, y) + \int_0^x \int_0^y \lambda(\xi, \eta) d\xi \, d\eta.$$

Alors, $(\alpha, Z, U) \in \mathscr{G}$, ce qui prouve la première affirmation. Considérons
une suite $\{(\alpha_n, Z_n, U_n)\} n \in N$ de $\mathscr{G}$ convergente à (α, Z, U) dans $(AC([0, x_0] ;$
$R^n) \times AC([0, y_0] ; R^n)) \times C([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n) \times L^1([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$.
Il s'agit de prouver que Z et U vérifient les relations (3) et (5).
L'ensemble $\{\partial^2 U_n(x, y)/\partial x \, \partial y\} n \in N$ est relativement faiblement com-
pact dans $L^1([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$, en vertu du théorème de Dunford- Pet-
tis ([4], p. 274).
Donc $\{\partial^2 U_n(x, y)/\partial x \, \partial y\} n \in N$ est une suite faiblement convergente à une
certaine fonction $V \in L^1([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$. Alors, pour tout $(x, y) \in$
$\in [0, x_0] \times [0, y_0]$ on a

(7) $$U(x, y) = w - \lim_{n \to \infty} U_n(x, y) = \alpha(x, y) + \int_0^x \int_0^y V(\xi, \eta) d\xi \, d\eta$$

En vertu du théorème de Mazur [5], p. 36, la convergence faible $\partial^2 U_n(x, y)/$
$\partial x \, \partial y \to V(x, y)$, $(x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$, implique l'existence d'une suite de
combinaisons convexes $\{W_k\} k \in N$ de l'ensemble $\{\partial^2 U_k/\partial x \, \partial y, \partial^2 U_{k+1}/\partial x \, \partial y,$
$\dots\}$ fortement convergente à V dans $L^1([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$ et de la suite
$\{W_k\} k \in N$ on peut extraire une sous-suite convergente p.p. à V.

Pour tout ensemble $A \subset R^n$, soit $K(A)$ son enveloppe convexe. Vu que
$F(x, y, z)$ est convexe, compact pour tout $(x, y) \in D$ et pour tout $z \in \Omega$, il
résulte de ce qui précède et du lemme 2 [2], qu'on a

(8) $$V(x, y) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{K\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \partial^2 U_n(x, y)/\partial x \, \partial y\right)} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{K\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} F(x, y, Z_n(x, y))\right)} \subset$$

$\subset F(x, y, Z(x, y))$, p.p. pour $(x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$, ce qui prouve que $\mathscr{G}$
est fermé.

Soit $\alpha \in C^*(D ; R^n)$, avec $\alpha(x, y) \in M$ pour $(x, y) \in [0, x_0] \times [0, y_0]$.
A tout $Z \in \mathscr{Z}_M$ on fait correspondre l'ensemble $\Phi(Z) \subset \mathscr{Z}_M$ de la manière
suivante :

$$U \in \Phi(Z) \Leftrightarrow U \in \mathscr{Z}_M, \ \partial^2 U(x, y)/\partial x \, \partial y \in F(x, y, Z(x, y)), \text{ p.p.}$$

On définit ainsi une fonction multivoque $\Phi : \mathscr{Z}_M \to 2^{\mathscr{Z}_M}$. L'ensemble $\Phi(Z)$ est
convexe, compact et non vide et l'application multivoque Φ est semi-con-
tinue supérieurement, car Φ est de graphe fermé, d'après de ce qui précède.
En vertu du théorème de Kakutani-Ky Fan ([4], p. 167, [6], p. 72), Φ admet
au moins un point fixe Z, qui est une solution du problème $(2)+(3)$. L'en-
semble S_α des solutions Z est compact et non vide, puisque c'est l'ensemble
des points fixes de Φ. Le graphe H de l'application multivoque $\alpha \to S_\alpha$, dé-
finie sur $C^*([0, x_0] \times [0, y_0] ; R^n)$ et à valeurs dans $2^{\mathscr{Z}_M} (S_\alpha \subset \Phi(\mathscr{Z}_M) \in 2^{\mathscr{Z}_M})$
est fermé dans $AC([0, x_0] ; R^n) \times AC([0, y_0] ; R^n) \times 2^{\mathscr{Z}_M}$, puisque H est l'image
de l'ensemble compact H_1 des triplets $(\alpha, Z, U) \in \mathscr{G}$, tels que $Z = U$, par
l'application $(\alpha, Z, U) \to (\alpha, Z)$. Donc, l'application multivoque $\alpha \to S_\alpha$ est
semi-continue supérieurement sur $AC([0, x_0] ; R^n) \times AC([0, y_0] ; R^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Carathéodory, C. — *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Chelsea Publishing Company 1948.
2. Castaing, Ch. — *Sur les équations différentielles multivoques*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 263, 1966, Série A, p. 63.
3. Castaing Ch. — *Quelques problèmes de mesurabilité liés à la théorie de la commande*, Comptes Rendus, Acad., t. Sci. Paris, t. 262, 1966, Serie A, p. 409.
4. Edwards, R. E. — *Functional Analysis. Theory and Applications*. Holt, Rinehart and Winston, 1965.
5. Hille, E., Phillips, R. S. — *Functional Analysis and Semigroups*. American Mathematical Society. Colloquium Publications, Vol. 31, 1957, Fourth Prenting of Revised Edition, 1981.
6. Rus, I. A. — *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*. Editura Dacia, 1979.
7. Cinquini Cibrario, M., Cinquini, S. — *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*. Edizioni Cremonese, Roma, 1964.
8. Haimovici, A. — *Ecuaţiile fizicii matematice si elemente de calcul variaţional*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.

Reçu le 4.VI.1984

Chaire de Mathématique
Institut Polytechnique Jassy, 6600
République Socialiste de Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 2

SHOCK WAVES IN MICROPOLAR ELASTIC MATERIALS WITH VOIDS

BY

D. IEŞAN

1. **Introduction.** In [1], Nunziato and Cowin have presented a general theory for the behavior of porous solids in which the skeletal or matrix material is elastic and the interstices are void of material. The linear theory of elastic materials with voids has been established by Cowin and Nunziato in [2]. Some applications of this theory were presented in [2—4].

The basic feature of the theory of materials with voids is the concept of a material, for which the bulk density is written as the product of two fields, the matrix material density field and the volume fraction field. This representation of the bulk density of the material introduces an additional degree of kinematic freedom and was employed previously by Goodman and Cowin [5] to develop a continuum theory for flowing granular materials.

The intended applications of the theory of elastic materials with voids are to geological materials like rock and soils and to manufactured porous materials.

In this paper we develop a linear theory of micropolar elastic solids with voids. Micropolar materials, roughly speaking, are continuous media with extra independent degrees of freedom for the local intrinsic rotation. The micropolar continuum mechanics seems to be an adequate tool to describe the behavior of the granular materials (see e.g. [6—8]). It appears that the micropolar continuum posseses promise for entering the Earth sciences because of the fact that most materials of interest are made of granules. Some applications of micropolar mechanics to earthquake problems were presented in [9—11].

In the first part of this paper, we establish the basic equations of the linear theory of micropolar elastic materials with voids. The theory differs from the classical theory of micropolar elasticity [6, 8] in that the volume fraction corresponding to the void volume is taken as an independent kinematical variable. In the second part of the paper we study the shock waves in isotropic micropolar elastic materials with voids. The coupling between the discontinuities in the macroscopic and microscopic fields is studied.

2. **Basic equations.** We refer the motion of the continuum to a fixed system of rectangular Cartesian axes $Ox_i (i=1, 2, 3)$. We shall employ the