11. Sade A. — *Quasigroupes de Cardoso et pseudogroupes de Zelmer*. An. St. Univ. Iaşi, s. I a Mat., 13 (1967), 5—15.
12. Stein S. K., — *On the foundations of quasigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 228—256.
13. Ward M. — *Postulates for the inverse operations in a group*, Trans. Amer. Math. Soc., 32 (1930), 520—526.
14. Whittaker, J. V. — On the postulates defining a group, Amer. Math. Monthly, 62 (1955), 636—640.
15. Whittaker J. V. — *On the structure of half-groups*. Canad. J. Math., 11 (1959), 651—659.

Received 17 IX 1985

University of Zagreb
Yugoslavia

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXII, s. I a, Matematică, 1986, f. 2

CERTAINS PROBLÈMES OUVERTS DE LA THÉORIE DES TREILLIS NON-COMMUTATIFS

PAR

GH. FARCAŞ

Comme on con ait bien, la notion de treillis peut-être introduite par deux voies distinctes, mais logiquement équivalentes : soit à l'aide d'un ensemble doté de deux opérations bi aires qui satisfont certaines conditions concrétisées sous forme d'axiomes, soit à l'aide d'un ensemble doté d'une relation d'ordre, qui est soumise à la condition que tous sous-ensembles constitués de deux éléments possède une marge inférieure et une marge supérieure par rapport à cette relation.

Les treillis non-commutatifs ont été introduits pour la première fois par P. Jordan [5]. Ensuite, en [1], [3] et [4] ont été introduites d'autres classes de treillis non-commutatifs, celles-ci définies dans le langage des opérations binaires. On a constaté que les propriétés de ces classes de treillis non-commutatifs sont semblabes à celles rencontrées dans la théorie des treillis. En ces conditions-là on peut se poser la question si les treillis non-commutatifs ne puissent être définis aussi dans le langage des relations binaires. La réponse à cette question constitue un problème ouvert presque pour toutes les classes de treillis non-commutatifs connues jusqu'à présent. Il existe, pourtant, deux exceptions : la première est due à M. D. Gerhardts [4] et la deuxième est présentée pour la première fois en ce travail.

Considérons donc un ensemble M doté de deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$, qui pour tout $a, b, c \in M$ vérifie les axiomes :

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \\ (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} a \wedge (a \vee b) = a, \\ a \vee (a \wedge b) = a, \end{cases} \qquad \text{(S)} \qquad \begin{cases} a \wedge (b \wedge c) = a \wedge (c \wedge b), \\ a \vee (b \vee c) = a \vee (c \vee b). \end{cases}$$

Le triplet $(M, \wedge, \vee)$, où M est un ensemble non-vide, et $\wedge$ et $\vee$ sont deux opérations binaires définies en M qui vérifient les axiomes (A), (B) et (S) s'appelera un *treillis non-commutatifs de type superplat*. Nous nous proposons d'étudier les propriétés des treillis non-commutatifs de type superplat et de démontrer que ceux-ci peuvent être caractérisés aussi dans le langage des relations binaires.

1. Remarquons que si $(M, \wedge, \vee)$ est un treillis non-commutatif de type superplat, alors dans l'ensemble M on peut définir huit relations binaires engendrées par les opérations $\wedge$ et $\vee$, à savoir :

$$a\rho_1 b \Leftrightarrow a=a\wedge b, \qquad a\rho_5 b \Leftrightarrow a=a\vee b,$$

$$a\rho_2 b \Leftrightarrow b=b\wedge a, \qquad a\rho_6 b \Leftrightarrow b=b\vee a,$$

$$a\rho_3 b \Leftrightarrow a=b\wedge a, \qquad a\rho_7 b \Leftrightarrow a=b\vee a,$$

$$a\rho_4 b \Leftrightarrow b=a\wedge b, \qquad a\rho_8 b \Leftrightarrow b=a\vee b.$$

On constate immédiatement que $\rho_2=\rho_1^{-1}$ et $\rho_1=\rho_3^{-1}$, ρ_5 est la duale de ρ_1, ρ_6 est la duale de ρ_2, ρ_8 est la duale de ρ_3 et ρ_8 est la duale de ρ_4. Par conséquent, en prenant en considération aussi le fait que le système d'axiomes définissant les treillis non-commutatifs de type superplat est autodual, il sera suffisant d'étudier seulement les propriétés des relations ρ_1 et ρ_3.

(1.1) Si $(M, \wedge, \vee)$ est le treillis non-commutatif de type superplat, alors pour tout $a, b \in M$ sont vraies les égalités :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a\wedge a=a, \\ a\vee a=a, \end{cases} \qquad \text{(P)} \quad \begin{cases} a\wedge b\wedge a=a\wedge b, \\ a\vee b\vee a=a\vee b. \end{cases}$$

Démonstration. En utilisant les axiomes (B) de la définition du treillis non-commutatif de type superplat, on obtient $a\wedge a=a\wedge(a\vee(a\wedge b))=a$ et $a\vee a=a\vee(a\wedge(a\vee b))=a$, donc en $(M, \wedge, \vee)$ les égalités (I), c'est-à-dire les lois de l'idempotence sont vraies. Ensuite, en utilisant les axiomes (S) et les lois de l'idempotence on obtient $a\wedge b\wedge a=a\wedge(b\wedge a)=a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge a)\wedge b=a\wedge b$ et $a\vee b\vee a=a\vee(b\vee a)=a\vee(a\vee b)=(a\vee a)\vee b=a\vee b$, donc en $(M, \wedge, \vee)$ sont vraies aussi les égalités (P).

(1.2) Si $(M, \wedge, \vee)$ est un treillis non-commutatif de type superplat alors pour tout $a, b, c \in M$ la relation binaire ρ_1 possède les propriétés :

(1) ρ_1 est une relation de préordre en M,

(2) $a\wedge b\rho_1 a$ et $a\wedge b\rho_1 b$,

(3) $a\rho_1 a\vee b$,

(4) $c\rho_1 a$ et $c\rho_1 b \Rightarrow c\rho_1 a\wedge b$ et $c\rho_1 b\wedge a$,

(5) $a\rho_1 c$ et $b\rho_1 c \Rightarrow a\wedge b\rho_1 c$ et $b\wedge a\rho_1 c$,

(6) $c\rho_1 a$ et $c\rho_1 b \Rightarrow c\rho_1 a\vee b$ et $c\rho_1 b\vee a$,

(7) $a\rho_1 b \Rightarrow a\wedge c\rho_1 b\wedge c$ et $c\wedge a\rho_1 c\wedge b$.

Démonstration. (1) La propriété de reflexivité de la relation ρ_1 est une conséquence immédiate de la lois d'idempotence démontrée en (1.1). Alors, si pour $a, b, c \in M$ on a $a\rho_1 b$ et $b\rho_1 c$, alors $a=a\wedge b$ et $b=b\wedge c$, donc $a=a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c=a\wedge c$, c'est-à-dire $a\rho_1 c$ et donc ρ_1 possède aussi la propriété de transitivité.

(2) En utilisant de nouveau la lois d'idempotence on apperçoit que pour tout $a, b \in M$ on a $(a\wedge b)\wedge a=a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge a)\wedge b=a\wedge b$ et $(a\wedge b)\wedge b=a\wedge(b\wedge b)=a\wedge b$, donc $a\wedge b\rho_1 a$ et respectivement $a\wedge b\rho_1 b$.

(3) Cette propriété est une conséquence évidente de la première axiome de (B).

(4) Si pour $a, b, c \in M$ on a $c\rho_1 a$ et $c\rho_1 b$, alors $c=c\wedge a$ et $c=c\wedge b$, donc $c=c\wedge b=(c\wedge a)\wedge b=c\wedge(a\wedge b)$ et $c=c\wedge a=(c\wedge b)\wedge a=c\wedge(b\wedge a)$, c'est-à-dire $c\rho_1 a\wedge b$ et respectivement $c\rho_1 b\wedge a$.

(5) Si pour $a, b, c \in M$ on a $a\rho_1 c$ et $b\rho_1 c$, alors $a=a\wedge c$ et $b=b\wedge c$, donc $a\wedge b=a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$ et $b\wedge a=b\wedge(a\wedge c)=(b\wedge a)\wedge c$, c'est-à-dire $a\wedge b\rho_1 c$ et respectivement $b\wedge a\rho_1 c$.

(6) Si pour $a, b, c \in M$ on a $c\rho_1 a$ et $c\rho_1 b$, alors $c=c\wedge a$ et $c=c\wedge b$, donc $c=c\wedge a=c\wedge(a\wedge(a\vee b))=(c\wedge a)\wedge(a\vee b)=c\wedge(a\vee b)$ et $c=c\wedge b=c\wedge(b\wedge(b\vee a))=(c\wedge b)\wedge(b\vee a)=c\wedge(b\vee a)$, c'est-à-dire $c\rho_1 a\vee b$ et respectivement $c\rho_1 b\vee a$.

(7) Si pour $a, b \in M$ on a $a\rho_1 b$, alors $a=a\wedge b$, donc $a\wedge c=(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)=a\wedge(c\wedge b)=a\wedge(c\wedge b\wedge c)=(a\wedge c)\wedge(b\wedge c)$ et $c\wedge a=c\wedge(a\wedge b)=(c\wedge a)\wedge b=(c\wedge a\wedge c)\wedge b=(c\wedge a)\wedge(c\wedge b)$, c'est-à-dire $a\wedge c\rho_1 b\wedge c$ et respectivement $c\wedge a\rho_1 c\wedge b$.

(1.3) Si $(M, \wedge, \vee)$ est le treillis non-commutatif de type superplat, alors pour tout $a, b, c \in M$, la relation binaire ρ_3 possède les propriétés :

(1) ρ_3 est relation d'ordre en M,

(2) $a\wedge b\rho_3 a$,

(3) $c\rho_3 a$ et $c\rho_3 b \Rightarrow c\rho_3 a\wedge b$ et $c\rho_3 b\wedge a$.

(4) $a\rho_3 c$ et $b\rho_3 c \Rightarrow a\wedge b\rho_3 c$ et $b\wedge a\rho_3 c$,

(5) $a\rho_3 b \Rightarrow a\wedge c\rho_3 b\wedge c$ et $c\wedge a\rho_3 c\wedge b$.

Démonstration. (1) La propriété de réflexivité de la relation ρ_3 est aussi une conséquence de la lois d'idempotence. Ensuite, si pour $a, b, c \in M$ on a $a\rho_3 b$ et $b\rho_3 c$, alors $a=b\wedge a$ et $b=c\wedge b$, donc $a=b\wedge a=(c\wedge b)\wedge a=c\wedge(b\wedge a)=c\wedge a$, c'est-à-dire $a\rho_3 c$ et ainsi ρ_3 est transitif. Enfin, si pour $a, b \in M$ on a $a\rho_3 b$ et $b\rho_3 a$, alors $a=b\wedge a$ et $b=a\wedge b$, donc $a=b\wedge a=(a\wedge b)\wedge a=a\wedge b=b$, c'est-à-dire ρ_3 possède la propriété d'antisymétrie.

(2) En utilisant la lois de l'idempotence on constate que pour tout $a, b \in M$ on a $a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge a)\wedge b=a\wedge b$, donc $a\wedge b\rho_3 a$.

(3) Si pour $a, b, c \in M$ on a $c\rho_3 a$ et $c\rho_3 b$, alors $c=a\wedge c$ et $c=b\wedge c$, donc $c=a\wedge c=a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$ et $c=b\wedge c=b\wedge(a\wedge c)=(b\wedge a)\wedge c$, c'est-à-dire $c\rho_3 a\wedge b$ et $c\rho_3 b\wedge a$.

(4) Si pour $a, b, c \in M$ on a $a\rho_3 c$ et $b\rho_3 c$, alors $a=c\wedge a$ et $b=c\wedge b$, donc $a\wedge b=(c\wedge a)\wedge b=c\wedge(a\wedge b)$ et $b\wedge a=(c\wedge b)\wedge a=c\wedge(b\wedge a)$, c'est-à-dire $a\wedge b\rho_3 c$ et $b\wedge a\rho_3 c$.

(5) Si pour $a, b \in M$ on a $a\rho_3 b$, alors $a=b\wedge a$, donc $a\wedge c=(b\wedge a)\wedge c=b\wedge(a\wedge c)=b\wedge(c\wedge a)=b\wedge(c\wedge a\wedge c)=(b\wedge c)\wedge(a\wedge c)$ et $c\wedge a=c\wedge(b\wedge a)=(c\wedge b)\wedge a=(c\wedge b\wedge c)\wedge a=(c\wedge b)\wedge(c\wedge a)$, c'est-à-dire $a\wedge c\rho_3 b\wedge c$ et $c\wedge a\rho_3 c\wedge b$.

(1.4) Si $(M, \wedge, \vee)$ est un treillis non-commutatif de type superplat, alors pour tout $a, b, c \in M$ les relations binaires ρ_1 et ρ_3 possèdent les propriétés :

(1) $a\rho_3 b \Rightarrow a\rho_1 b$ et $a\rho_8 b$,

(2) $c\rho_3 a$ et $c\rho_1 b \Rightarrow c\rho_3 a\wedge b$.

Démonstration. (1) Si pour $a, b \in M$ on a $a\rho_3 b$, alors $a=b\wedge a$, donc $a=a\wedge a=a\wedge(b\wedge a)=a\wedge b\wedge a=a\wedge b$ et $b=b\vee(b\wedge a)=b\vee a$, c'est-à-dire $a\rho_1 b$ et $a\rho_8 b$.

(2) Si pour $a, b, c \in M$ on a $c\rho_3 a$ et $c\rho_1 b$, alors $c=a\wedge c$ et $c=c\wedge b$, donc $c=a\wedge c=a\wedge(c\wedge b)=a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$, c'est-à-dire $c\rho_3 a\wedge b$.

Les propriétés des relations ρ_6 et ρ_8 sont obtenues de celles des relations ρ_1 et respectivement ρ_3, en considérant que ρ_6 est la duale de ρ_1^{-1} et ρ_8 est la duale de ρ_3^{-1}.

2. Pour les éléments $a, b \in M$ définissons les notions de infimum et supremum par rapport aux relations ρ_1 et ρ_3 et respectivement ρ_6 et ρ_8 la manière suivante :

$$i \in \inf_{(\rho_1, \rho_3)} (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} i \rho_3 a \text{ et } i \rho_1 b, \\ i' \rho_3 a \text{ et } i' \rho_1 b \Rightarrow i' \rho_3 i \, (i' \in M), \\ i' \rho_1 a \text{ et } i' \rho_1 b \Rightarrow i' \rho_1 i. \end{cases}$$

$$s \in \sup_{(\rho_6, \rho_8)} (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} a \rho_8 s \text{ et } b \rho_6 s, \\ a \rho_8 s' \text{ et } b \rho_6 s' \Rightarrow s \rho_8 s' \, (s' \in M), \\ a \rho_8 s' \text{ et } b \rho_6 s' \Rightarrow s \rho_6 s' \end{cases}$$

(2.1) Si $(M, \wedge, \vee)$ est un treillis non-commutatif de type superplat, alors pour tout $a, b \in M$ on a $\inf_{(\rho_1, \rho_3)} (a, b) \neq \emptyset$ et $\sup_{(\rho_6, \rho_8)} (a, b) \neq \emptyset$.

Démonstration. En utilisant les propriétés des relations ρ_1, ρ_3, ρ_6 et ρ_8 démontrées dans les théorèmes précédents on constate que $a \wedge b \in \inf_{(\rho_1, \rho_3)} (a, b)$ et respectivement $a \vee b \in \sup_{(\rho_6, \rho_8)} (a, b)$.

En retenant les propriétés fondamentales des relations ρ_1, ρ_3, ρ_6 et ρ_8 on peut formuler le théorème conclusif suivant :

(2.2) *Si $(M, \wedge, \vee)$ est un treillis non-commutatif de type superplat, alors dans l'ensemble M on peut définir quatre relations binaires ρ_1, ρ_3, ρ_6 et ρ_8 de manière que pour tout $a, b \in M$, le système $(M, \rho_1, \rho_3, \rho_6, \rho_8)$ possède les propriétés :*

(i) ρ_1 et ρ_6 *sont des relations de préordre en* M,

(ii) ρ_3 et ρ_8 *sont des relations d'ordre en* M,

(iii) $\begin{cases} a \rho_3 b \Rightarrow a \rho_1 b \text{ et } a \rho_6 b, \\ a \rho_8 b \Rightarrow a \rho_1 b \text{ et } a \rho_6 b, \end{cases}$

(iv) $\inf_{(\rho_1, \rho_3)} (a, b) \neq \emptyset$, $\sup_{(\rho_6, \rho_8)} (a, b) \neq \emptyset$.

On peut démontrer que l'affirmation inverse de ce théorème est aussi vraie.

(2.3) *Soit M un ensemble non vide doté de quatre relations binaires ρ_1, ρ_3, ρ_6 et ρ_8. Si le système $(M, \rho_1, \rho_3, \rho_6, \rho_8)$ possède les propriétés* (i) — (iv) *mentionnées en* (2.2), *alors dans l'ensemble M on peut définir deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$, de manière que $(M, \wedge, \vee)$ devienne un treillis non-commutatif de type superplat.*

Démonstration. Si $i_1, i_2 \in \inf_{(\rho_1, \rho_3)} (a, b)$, alors de la définition de l'infimum on reçoit $i_1 \rho_3 i_2$ et respectivement $i_2 \rho_3 i_1$, donc étant donné que ρ_3 est la relation d'ordre en M, il résulte que $i_1 = i_2$, par conséquent $\inf_{(\rho_1, \rho_3)} (a, b)$ contient un élément et uniquement un. Par dualité on obtient que $\sup_{(\rho_6, \rho_8)} (a, b)$ contient aussi justement un seul élément. Cette constatation nous permet de définir pour $a, b \in M$ les opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ par :

$$a \wedge b = \inf_{(\rho_1, \rho_3)} (a, b), \qquad a \vee b = \sup_{(\rho_6, \rho_8)} (a, b).$$

On peut aisément démontrer que les opérations binaires ainsi définies en M vérifient les axiomes (A), (B) et (S), c'est-à-dire $(M, \wedge, \vee)$ devient un treillis non-commutatif de type superplat.

On constate ensuite que, si au treillis non-commutatif de type superplat $(M, \wedge, \vee)$, on associe par le procédé ci-dessus le système $(M, \rho_1, \rho_3, \rho_6, \rho_8)$ et, au même système on associe, par le procédé indiqué en (2.3), le treillis non-commutatif de type superplat adéquat, alors les deux treillis non-commutatifs coïncident.

Remarquons que si $(M, \wedge, \vee)$ est un treillis, alors $\rho_1 = \rho_3 = \rho_6 = \rho_8$ et le théorème de spécification dans le langage des relations binaires des treillis non-commutatifs de type superplat, presenté ci-dessus, se transforme en le théorème bien connu de spécification des treillis à l'aide d'un ensemble ordoné.

3. Restent encore comme problèmes ouverts les possibilités de spécification dans le langage des relations binaires d'autres classes de treillis non-commutatifs connus jusqu'à présent, par exemple les 12 classes définies en [1]. Il nous semble qu'il existe une possibilité de spécification de ces classes aussi à l'aide d'un ensemble doté de relations binaires. Le problème peut être abordé de la manière suivante : qu'on associe aux treillis non-commutatifs que nous nous proposons d'étudier les 8 relations binaires qui ont été définies au début du paragraphe précédent en étudiant en détail leurs propriétés. Parmi ces propriétés il faut découvrir celles qui sont capables de caractériser dans le langage des relations binaires la classe respective de treillis non-commutatifs.

BIBLIOGRAPHIE

1. Fărcaş, Gh. — *Sisteme de axiome pentru reticule oblice*. St. Cerc. mat., 24, (1972), 1089—1095.
2. Fărcaş, Gh. — *Proprietăţi ale reticulelor oblice*. St. Cerc. mat., 26, (1974), 1327—1340.
3. Fărcaş, Gh. — *Asupra unei clase speciale de reticule oblice*, St. cerc. mat., 29, (1977), 597—601.
4. Gerhardts, M. D. — *Zerlegungshomomorphismen in Schrägverbänden*, Arh. Math., 21, (1970), 116—122
5. Jordan, P. — *Halbgruppen von Idempotenten und nichtkomutative Verbände*, J. reine angev. Math., 211, (1962), 136—161

Reçu le 26.VII. 1985

Institutul de Învăţămînt Superior Tîrgu-Mureş, R. S. România