6. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V. — *Despre G-structuri remarcabile şi structuri de ordin superior*, Mem. Sect. St. Ed. Acad. R.S.R., seria IV, Tom III, 1, 1980.
7. Munteanu, Gh. — *On almost tangent structures and connections* (to appear).
8. Munteanu, Gh. — *Integrability conditions for almost semiquaternion structures*, Riv. Matem. Univ. Parma, 1988 (to appear).
9. Munteanu, Gh. — *Metric almost semiquaternion structure*, Bull. Math. Acad. R.S.R., 4, 1988 (to appear).
10. Munteanu, Gh. — *Representations regulier des algebres associatives*, Bull. Univ. Braşov, 1985.
11. Oproiu, V. — *Some remarkable structures and a connections defined on tangent bundle*, Rend. di Matem., vol. VI, 1973.
12. Oproiu, V. — *Integrability of almost quaternal structures*, An. şt. Univ. Iaşi, s. I a, f. 5, 1984.
13. Tricerri, F. — *Sulle varieta dotate di due structuri quasi complesse linearmente indipendenti*, Riv. Mat. Univ. Parma 3, 1974.
14. Tricerri, F. — *Connessioni lineari e metriche hermitiene sopro varieta dotate di due structure quasi complesse*, Riv. Mat. Univ. Parma 4, 1975.
15. Wakakuwa, H. — *On lineary independent almost complex structures*, Tohoku Math. J. 13, 1961.
16. Yano, K., Ako, M. — *Integrability conditions for almost quaternion structures*, Hokkaido Math. J, 1, 1972.
17. Yano, K., Ako, M. — *Almost quaternion structure of the second kind and almost tangent structures*, Kodai Math. Sem. Rep. 25, 1973.
18. Yano, K., Ako, M. — *An affine connection in an almost quaternion manifold*, J. Diff. Geom. 8, 1973.
19. Yano, K., Davies, E. T. — *Differential geometry on almost tangent manifolds*, Ann. Math. Puro. Appl. 103, 1975.

Received 20.09.1986

Department of Mathematics
University of Braşov
2200, Braşov, Romania

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI
Tomul XXXIV, s. I a, Matematică, 1988, f. 2

SULLE PROPRIETA' DELLA JACOBIANA DI UN SISTEMA LINEARE DI QUADRICHE

LANDO DEGOLI

1. Nello spazio complesso lineare S_r riferito a coordinate proiettive omogenee $x_i (i=0, 1, \dots, r)$ scegliamo $d+1$ quadriche linearmente indipendenti:

$$f_0=0,\ f_1=0,\ \dots,\ f_d=0,$$

con:

$$f_q=\sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \qquad (a_q^{ik}=a_q^{ki}).$$

Il sistema lineare L_d di dimensione d, che ne risulta, è espresso dall'equazione:

$$\sum_{q=0}^{d} \lambda_q f_q=0. \tag{1}$$

Supponiamo che la matrice Jacobiana ad $r+1$ righe e $d+1$ colonne:

$$J=\| \partial f_q/\partial x_i \|, \qquad q=0, 1, \dots, d,\ i=0, 1, \dots, r,$$

sia di caratteristica $r \leqslant d$.

La varietà Jacobiana data dalla matrice precedente uguagliata a zero rappresenta il luogo dei vertici dei coni del sistema (1). Supponiamo che il sistema lineare L_d sia *irriducibile di prima specie* (vedi 10). Ciò significa che L_d non possiede *sistemi subordinati essenziali*, ossia sistemi $L_{g/c}$ di dimensione g e Jacobiana di caratteristica c con:

$$2 \leqslant g \leqslant d-1, \quad 2 \leqslant c \leqslant r-1, \quad c \leqslant g.$$

In tal caso abbiamo dimostrato il teorema (vedi 6): „*Le quadriche di L_d che passano per un punto hanno in comune una retta.*"

Poichè la Jacobiana ha caratteristica r, tutti i minori di ordine $r+1$ estratti da J sono identicamente nulli. Ricordando che è: $r \leqslant d$, consideriamo il determinante individuato da $r+1$ quadriche qualsiasi lin. ind. del sistema (1). Potremo scegliere, senza nuocere alla generalità, le prime $r+1$ quadriche: $f_0, f_1, \dots, f_r$ e si avrà:

$$D=| \partial f_i/\partial x_j |=0. \qquad (i, j=0, 1, \dots, r).$$

D è dunque identicamente nullo, però non sono tutti nulli i minori di ordine r estratti da J. Indichiamo con:

$$A_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, r$$

il complemento algebrico di: $\partial f_i / \partial x_j$ in D.
Gli A_{ij} risultano delle forme algebriche di ordine r, che, uguagliate a zero, rappresentano delle ipersuperficie di S_r. Supponiamo che non sia nullo il minore A_{rr}. Ne deriva che non sarà identicamente nulla nemmeno la matrice:

$$H = \| \partial f_s / \partial x_i \| \qquad (s = 0, 1, \ldots, r-1, \; i = 0, 1, \ldots, r),$$

i cui minori di ordine r sono le forme A_{rj} $(j = 0, 1, \ldots, r)$.

Consideriamo il sistema lineare di quadriche contenuto in (1):

$$\sum_{s=0}^{r-1} \lambda_s f_s = 0. \tag{2}$$

Abbiamo dimostrato (vedi 11) il:

Teorema A. *Se una delle forme A_{rj}, per esempio A_{r0}, è identicamente nulla, le forme A_{rs} $(s = 1, 2, \ldots, r)$ estratte dalla matrice H differiscono per un fattore constante e sono definite dalla formula:*

$$A_{rs} = h_s \beta^b \gamma^c \ldots \mu^m \qquad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

dove h_s sono constanti non nulle, $\beta, \gamma, \ldots, \mu$ sono forme omogenee irriducibili fra loro mentre $a, b, \ldots, m$, sono numeri interi positivi.

2. Teorema B. *Se il sistema lineare (2) è privo di punti base doppi nessuna delle forme A_{rj} $(j = 0, 1, \ldots, r)$ è identicamente nulla.*

Il sistema (2) può considerarsi associato alla matrice H. Ora poichè un punto generico $P(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ di S_r non annulla la matrice H, consideriamo gli iperpiani polari di P rispetto alle quadriche del sistema (2):

$$\sum_{j=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_j} x_j = 0 \qquad (q = 0, 1, \ldots, r-1),$$

i quali si segano nel punto Q di coordinate:

$$\rho x'_j = A_{rj}(P), \tag{3}$$

essendo $A_{rj}(P)$ il valore della forma A_{rj} nel punto P e ρ un fattore di proporzionalità. Se una delle forme A_{rj}, per esempio: A_{r0}, è identicamente nulla, per il Teorema A si ha:

$$A_{rt} = h_t \beta^b \gamma^c \ldots \mu^m \quad (t = 1, 2, \ldots, r).$$

(Dovremo anche avere $A_{rt} \neq 0$, altrimenti se uno solo degli A_{rt} fosse identicamente nullo per un noto teorema di Kronecker sarebbero tutti nulli e quindi sarebbe nulla la matrice H, il che è assurdo). Quindi per le (3) si avrebbe:

$$\rho x'_0 = 0, \qquad \rho x'_t = h_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, r).$$

Ciò significa che Q risulterebbe indipendente da P e perciò punto doppio per la varietà base del sistema (2) contro l'ipotesi. Se ne deduce che nessuna delle forme A_{rj} è identicamente nulla

Indichiamo con Ω la varietà Jacobiana del sistema (2). Essa è il luogo dei punti di S_r che annullano la matrice H.

Corollario B₁. *Un punto P di S_r appartenente all'ipersuperficie $A_{r0} = 0$, ma non alla varietà Ω, giace su tutte le ipersuperficie di ordine r: $A_{s0} = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, r-1)$ che non siano indeterminate.*

Consideriamo il sistema lineare:

$$\sum_{q=0}^{r} \lambda_q f_q = 0. \tag{1}$$

che contiene il sistema (2) ed à contenuto nel sistema (1). Derivando rispetto ad $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$, sostituendo le coordinate di P in tali derivate e risolvendo il sistema, che ne risulta, rispetto ai rapporti $\lambda_0/\lambda_r, \lambda_1/\lambda_r, \ldots, \lambda_{r-1}/\lambda_r$ si ottiene:

$$\lambda_s / \lambda_r = A_{s0}(P) / A_{r0}(P) \qquad (s = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{5}$$

Poichè P non giace su Ω e la quadrica f_r non appartiene al sistema (2) sarà: $\lambda_r \neq 0$. Ora se P appartiene all'ipersuperficie $A_{r0} = 0$, dalle (5) si deduce: $A_{s0}(P) = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, r-1)$, il che mostra che P appartiene a tutte le ipersuperficie A_{s0}, che non risultino indeterminate.

Corollario B₂. *Le ipersuperficie $A_{rj} = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ sono tutte riducibili ed ammettono una sottomultipla comune. Lo stesso accade per le ipersuperficie: $A_{s0} = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$.*

Se, per esempio, fosse irriducibile A_{r0}, il punto generico di questa ipersuperficie se giace sulla varietà Jacobiana Ω, giacerebbe su tutte le ipersuperficie A_{rt} $(t = 1, 2, \ldots, r)$ poichè Ω risulta varietà individuata dal sistema algebrico formato dai minori di ordine r estratti dalla matrice H, uguagliati a zero e cioè da:

$$A_{r0} = 0, \qquad A_{r1} = 0, \ldots, A_{rr} = 0.$$

In questo caso le A_{rt} coinciderebbero tutte con A_{r0}, perchè A_{r0} è irriducibile e si avrebbero le identità:

$$A_{rt} = k_t A_{r0} \qquad (t = 1, 2, \ldots, r),$$

con k_t constanti non tutte nulle. Ma allora per le (3) esisterebbe un punto base doppio contro l'ipotesi del Teorema B valide naturalmente anche per il presente corollario. Se poi il punto generico non giace sulla Jacobiana Ω, per il corollario precedente giacerebbe su tutte le ipersuperficie $A_{s0} = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ che non siano indeterminate e coinciderebbero con $A_{r0} = 0$. Ma essendo questa ipersuperficie irriducibile esisterebbero le identità:

$$A_{s0} = k_s A_{r0} \qquad (s = 0, 1, \ldots, r-1),$$

con K_s constanti non tutte nulle. Allora sviluppando il determinante $D = 0$, si dimostra (vedi 7) che esiste l'identità.

$$\sum_{i=0}^{r} A_{i0} f_i = 0, \qquad \text{e quindi:} \qquad \sum_{i=0}^{r} k_i f_i = 0,$$

dal che si deduce che le quadriche non sarebbero lin. ind. il che è assurdo.

Consideriamo ora l'ipersuperficie A_{rm} $(0 \leq m \leq r)$ del sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^{r} \mu_j A_{rj} = 0. \tag{6}$$

Se A_{rm} possiede una componente multipla β^h, essendo β una forma irriducibile, ed h un numero intero >1, quest'ultima non può variare quando A_{rm} descrive il sistema (6), perchè, per un noto teorema di Bertini (vedi 1), giace sulla varietà base del sistema. Pertanto anche β^h non può variare al variare di A_{rm}. Ne deriva che ogni componente multipla di una qualsiasi delle ipersuperficie $A_{rj}=0$ è componente di tutte le rimanenti e possiede la stessa molteplicità. Se le forme A_{rj} fossero prime tra loro, il generico punto di una qualsiasi componente $\beta^k=0$, per esempio della A_{r0}, non giacerebbe sulle varietà base del sistema (6), cioè sulla varietà Jacobiana del sistema (2) e perciò per il Corollario B_1 giacerebbe su tutte le $A_{s0}=0$ che non siano indeterminate. Inoltre dovrebbe essere $k=1$, perchè tali componenti non sono mai multiple. Pertanto le forme A_{s0} differirebbero dalla forma A_{r0} soltanto per constanti non tutte nulle e per una dimostrazione analoga alla precedente le quadriche non sarebbero lin. ind. Quindi le A_{rj} non sono prime tra loro.

Indicando con θ_r il massimo comun divisore delle forma A_{rj}, si ottengono le identità:

$$A_{rj} = \theta_r \Psi_j \qquad (j=0,\ 1,\ \dots,\ r), \tag{7}$$

in cui le Ψ_j sono forme di ugual grado, prime tra loro.

Nel caso $j=0$, si ha: $A_{r0}=\theta_r\Psi_0$. Dimostriamo che θ_r e Ψ_0 sono prime tra loro. Infatti se avessero un divisore comune β, multiplo secondo $h>0$ per θ_r e secondo $k>0$ per Ψ_0, la A_{r0} per le (7) avrebbe la componente multipla $\beta^{h+k}=0$ $(h+k \geq 2)$, la quale per la dimostrazione precedente sarebbe contenuta in tutte le $A_{rt}(t=1,\ 2,\ \dots,\ r)$. Ne seguirebbe che θ_r sarebbe divisibile per β^{h+k} anzichè solo per β^h. Da ciò ne segue che ogni divisore di $\Psi_0=0$ non può essere multiplo; altrimenti comparirebbe in tutte le $A_{rt}=0$ e perciò anche in $\theta_r=0$.
Ne deriva che $\Psi_0=0$ per il Corollario B_1 giace in tutte le $A_{s0}=0$ che non siano indeterminate e quindi si hanno le identità:

$$A_{s0} = \theta_s \Psi_0 \qquad (s=0,\ 1,\ \dots,\ r). \tag{8}$$

3. Consideriamo il determinante aggiunto E formato coi complementi algebrici degli elementi di D:

$$E = |\, A_{ij} \,|, \qquad i,\ j=0,\ 1,\ \dots,\ r.$$

In ogni sua colonna uno solo degli elementi A_{ij} può essere nullo perchè se due lo fossero sarebbero tutti nulli per un teorema di Kronecker e quindi il sistema L_d possederebbe un sistema subordinato essenziale $L_{r-1}/_{r-1}$ di dimensione $r-1$ e Jacobiana di caratteristica $r-1$ contro l'ipotesi che esso sia irriducibile di prima specie. Però se è nullo uno degli A_{ij} e nessun altro della sua colonna, per una nota proprietà del determinante aggiunto, saranno nulli tutti quelli appartenenti alla sua riga. Scambiando opportunamente le righe o le colonne si può fare assumere all'elemento nullo il posto di A_{r0} e quindi

determinare tutti gli altri elementi della stessa colonna mediante la formula del Teorema A:

$$A_{rs} = h_s\ \beta^b\ \gamma^c \dots \mu^m, \qquad s=1,\ 2,\ \dots,\ r,$$

che risulta essere un caso particolare delle formule (7) ed (8). Quindi in generale si avrà:

$$E = |\, \theta_i\ \Psi_j \,|, \qquad i,\ j=0,\ 1,\ \dots,\ r.$$

Teorema C. *Se le ipersuperficie del sistema lineare:*

$$\sum_{j=0}^{r} \mu_j A_{rj} = \sum_{j=0}^{r} \mu_j \theta_r \Psi_j = 0 \tag{9}$$

che passano per un punto generico P di S_r passano anche per un altro punto Q. Nel caso invece che il sistema risulta composto con una congruenza lineare. Nel caso invece che il sistema (9) sia semplice, l'ipersuperficie generica di detto sistema risulta il luogo dei punti coniugati di un iperpiano rispetto alle singole quadriche del sistema (2).

Supponiamo, se possibile, che le ipersuperficie del sistema suddetto che passano per il punto generico P di S_r non situato sulla varietà Jacobiana Ω del sistema (2) passino per un punto Q pur esso non situato su Ω. Questa risulta anche la varietà base del sistema (9), perciò saranno soddisfatte le due condizioni:

$$\sum_{j=0}^{r} \mu_j A_{rj}(P) = 0, \qquad \sum_{j=0}^{r} \mu_j A_{rj}(Q) = 0.$$

Di conseguenza il punto R coniugato di P rispetto alle quadriche del sistema (2) le cui coordinate sono date dalle formule (3):

$$\rho x'_j = A_{rj}(P), \qquad j=0,\ 1,\ \dots,\ r,$$

risulta coniugato con la retta PQ e quindi le ipersuperficie del sistema (9) che passano per P contengono tutte la retta PQ. Ne deriva che il sistema dato è composto con una congruenza di spazi lineari. Se invece il sistema è semplice, esso risulta omaloidico (vedi 1).

Consideriamo perciò la totalità degli iperpiani di S_r dati dal sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^{r} \theta_j x_j = 0. \tag{10}$$

Tra il sistema (9) e il sistema (10) possiamo stabilire la proiettività:

$$\sigma \mu_j = \theta_j, \quad j=0,\ 1,\ \dots,\ r.$$

Assunti sull'iperpiano generico r generici punti P_t $(t=1,\ 2,\ \dots,\ r)$ di coordinate $(x_0^{(t)},\ x_1^{(t)},\ \dots,\ x_r^{(t)})$, consideriamo i loro iperpiani polari rispetto alla quadrica variabile del sistema (2), cioè gli iperpiani di equazioni:

$$\sum_{i=0}^{r} \left(\sum_{s=0}^{r-1} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \right) x_i^{(t)} = 0, \qquad t=1,\ 2,\ \dots,\ r. \tag{11}$$

L'equazione del luogo cercato si ottiene eliminando i λ_s dalle equazioni precedenti. Essendo il sistema (11) omogeneo rispetto ai λ_s si ottiene:

$$(12)\qquad \Sigma\, x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_r}^{r} \begin{vmatrix} \partial f_0/\partial x_{i_1} & \partial f_1/\partial x_{i_1} & \dots & \partial f_{r-1}/\partial x_{i_1} \\ \partial f_0/\partial x_{i_2} & \partial f_1/\partial x_{i_2} & \dots & \partial f_{r-1}/\partial x_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_0/\partial x_{i_r} & \partial f_1/\partial x_{i_r} & \dots & \partial f_{r-1}/\partial x_{i_r} \end{vmatrix} = 0,$$

dove $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ rappresenta una disposizione qualsiasi di classe r dei numeri: $0, 1, \dots, r$.

Ora il determinante del termine generico della sommatoria (12) è identicamente nullo quando due degli indici i, k sono uguali, ed è uguale ad una delle forme A_{rj} se gli indici sono diversi. Quindi la sommatoria (12) è una combinazione lineare ed omogenea a coefficienti constanti delle A_{rj} ed i coefficienti sono proporzionali ai coefficienti omologhi delle variabili dell'equazione dell'iperpiano considerato, cioè ai minori di ordine r estratti dalla matrice:

$$\begin{Vmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \dots & x_r^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & \dots & x_r^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(r)} & x_1^{(r)} & \dots & x_r^{(r)} \end{Vmatrix},$$

formata con le coordinate dei punti P_i. Perciò il teorema è dimostrato.

Dividendo la (9) per la componente fissa θ_r delle A_{rj} si ottiene il sistema lineare:

$$(13)\qquad \sum_{j=0}^{r} \mu_j \Psi_j = 0.$$

Corollario C. *Sempre nell'ipotesi che il sistema* (9) *sia semplice, tra il sistema lineare* (13) *e la totalità degli iperpiani di S_r esiste una proiettività, che genera in S_r una transformazione birazionale, la cui varietà dei punti uniti giace sulla varietà base del sistema* (1) *e viceversa.*

Il sistema (13) deriva dal sistema semplice (9) con l'eliminazione della componente fissa Θ_r, perciò anche (13) risulterà semplice ed omaloidico. E' quindi possibile introdurre tra detto sistema e quello generato dalla totalità degli iperpiani di S_r:

$$\sum_{j=0}^{r} \theta_j x_j = 0,$$

una proiettività, indicando come corrispondenti l'iperpiano e l'ipersuperficie che hanno parametri proporzionali:

$$\sigma\mu_j = \theta_j, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

tale proiettività dà origine alla transformazione birazionale:

$$(14)\qquad \rho x_i' = \Psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

Per determinare i punti uniti della transformazione basterà porre: $x_i' = x_i$. Detto ρ' un particolare valore di ρ si avrà:

$$\rho' x_i = \Psi_i(x_0, x_1, \dots, x_r). \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

Eliminando ρ' si ottiene:

$$(15)\qquad \Psi_0/x_0 = \Psi_1/x_1 = \dots = \Psi_r/x_r,$$

che costituiscono un sistema di $\binom{r+1}{2}$ ipersuperficie, la cui varietà base è formata dai punti uniti della corrispondenza (14).

Consideriamo ora le identità che scaturiscono dal determinante D, identicamente nullo in S_r:

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \Psi_i = 0, \qquad q = 0, 1, \dots, r.$$

Sostituendo alle Ψ_i i valori dati dalle (15) si ha:

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} x_i = 0, \qquad q = 0, 1, \dots, r,$$

ossia:

$$f_q = 0, \qquad q = 0, 1, \dots, r.$$

Ne segue che detta varietà è contenuta in tutte le $r+1$ quadriche scelte. Ma siccome la scelta è stata operata in modo arbitrario, il ragionamento può ripetersi per tutte le quadriche del sistema L_d, perciò si avrà:

$$f_s = 0, \qquad s = 0, 1, \dots, d,$$

cioè tutte le quadriche del sistema (1) contengono la varietà dei punti uniti della transformazione birazionale (14).

Viceversa la quadrica generica del sistema (1) può scriversi:

$$(16)\qquad \sum_{i=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} x_i = 0, \qquad q = 0, 1, \dots, d.$$

Le (16) possono considerarsi un sistema lineare omogeneo nelle x_i, la cui soluzione:

$$x_i/x_0 = \Psi_i/\Psi_0,$$

dà esattamente r ipersuperficie del tipo (15) e quindi tutte le altre. Il che significa che la varietà base delle f_q giace sulla varietà dei punti uniti delle (14). Perciò tale varietà è la stessa in entrambi i sistemi.

4. Diamo ora alcuni esempi significativi di quanto abbiamo dimostrato. Per evitare scritture complicate useremo le coordinate omogenee: (a, b, c, d, e, f) al posto di: $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

I°) Sia il sistema lineare di quadriche dell' S_5:

$$\lambda_0(ac-b^2)+\lambda_1(ac-bd)+\lambda_2(af-be)+\lambda_3(be-cd)+\lambda_4(bf-ce)+\lambda_5(df-e^2)=0,$$

la cui varietà base è data dalle equazioni parametriche:

$$(17)\qquad a=1, \; b=\eta, \; c=\eta^2, \; d=\varphi, \; e=\eta\varphi, \; f=\eta^2\varphi,$$

e risulta la superficie razionale rigata dell' S_5, le cui corde riempiono tutto l' S_5, il che è condizione necessaria e sufficiente perchè la Jacobiana abbia caratteristica 5 (vedi 10).

Scritto il determinante $D=0$, si ottiene:

$$\theta_5 = ac - b^2$$

ed inoltre:

$$\Psi_0 = 2abc + acd - 2b^2d - a^2f, \qquad \Psi_3 = 2bde + adf - 2ae^2 - cd^2,$$

$$\Psi_1 = abf + bcd - 2ace, \qquad \Psi_4 = cde + aef - 2bdf,$$

$$\Psi_2 = 2bce + acf - 2b^2f - c^2d, \qquad \Psi_5 = 2bef + cdf - 2ce^2 - af^2.$$

Il sistema lineare di cubiche:

$$\sum_{q=0}^{5} \lambda \Psi_q = 0 \tag{18}$$

è composto con una congruenza di piani. Ad esempio: per il punto P (1, 1, 0, 1, 0, 0) passano le ultime 5 cubiche, ma non la prima e quindi si ha: $\lambda_0 = 0$. Le altre 5 cubiche hanno in comune il piano di equazione: $c = e = f = 0$, passante per P. Il sistema lineare (18) ha per varietà base i due piani:

$$a = b = c = 0 \quad \text{e} \quad d = e = f = 0$$

ed inoltre la superficie razionale (17), che è varietà base del sistema dato!

II°) Il sistema lineare di quadriche dell' S_5:

$$\lambda_0(ac - b^2) + \lambda_1(ae - bd) + \lambda_2(be - cd) + \lambda_3(af - bf) + \lambda_4(bf - cf) + \lambda_5(df - ef) = 0$$

la cui varietà base, composta da una V_2^3 dell' S_1 di equazioni: $a/b = b/c = d/e$ e dal piano: $a = b$, $b = c$, $d = e$ avente una retta in comune con essa, ha le equazioni parametriche: per la V_2^3:

$$a = 1, \quad b = \eta, \quad c = \eta^2, \quad d = \varphi, \quad e = \eta\varphi, \quad f = 0, \tag{19}$$

ed: $a = b = c = 1$, $d = e = \xi$, $f = \zeta$ per il piano.
Anche le corde di questa varietà riempiono tutto l' S_5.
Sviluppando il determinante D si ricava:

$$\theta_5 = f(ac - b^2)$$

e inoltre:

$$\Psi_0 = f(2b - a - c), \qquad \Psi_3 = c^2 + 2b^2 - 2bc - ac,$$

$$\Psi_1 = ce + 2bd - 2cd - ac, \qquad \Psi_4 = 2ac - bc - ab,$$

$$\Psi_2 = cd + 2ae - 2be - ad, \qquad \Psi_5 = a^2 + 2b^2 - 2ab - ac.$$

Le Ψ_i sono quindi delle quadriche. La Jacobiana del sistema da esse costituito risulta:

$$J = (2b - a - c) \begin{vmatrix} 2b - 2c & c - a \\ c - a & 2a - 2b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -c & 2c - b & 2a - 2b - c \\ 4b - 2c & -a - c & 4b - 2a \\ 2c - 2b - a & 2a - b & -a \end{vmatrix}$$

non è identicamente nulla. Perciò il sistema delle quadriche Ψ_i non può essere composto con una congruenza lineare in virtù di un teorema precedentemente

dimostrato (vedi 6). Quindi si tratta di un sistema semplice e perciò omaloidico. Osserviamo che le prime tre Ψ_i risultano di primo grado rispetto a: d, e, f, mentre le tre successive possiedono solo le variabili a, b, c. Pertanto ponendo:

$$a^2 + 2b^2 - 2ab - ac = \rho\alpha, \qquad 2ac - bc - ab = -\rho\beta, \qquad c^2 + 2b^2 - 2bc - ac = \rho\gamma$$

ed osservando che se $-1/\rho = (2\beta - \alpha - \gamma)^2$, sommando membro a membro dopo aver raddoppiato la seconda uguaglianza, si ha:

$$(2b - a - b)^2 \, (2\beta - \alpha - \gamma)^2 = 1.$$

Si ottiene così una perfetta inversione del sistema:

$$\sigma a = \pm(\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta - \alpha\gamma), \quad \sigma b = \mp(2\alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\beta), \quad \sigma c = \pm(\gamma^2 + 2\beta^2 - 2\beta\gamma - \alpha\gamma)$$

in cui vanno presi solo i segni superiori o inferiori e quindi si ottiene sempre lo stesso punto di S_5. I punti uniti della transformazione omaloidica sono i punti della varietà base del sistema generato dalle ipersuperficie cubiche estratte dalle seguenti proporzioni:

$$\begin{aligned} &(a^2 + 2b^2 - 2ab - ac)/a = (2ac - bc - ad)/(-b) = (c^2 + 2b^2 - 2bc - ac)/c = \\ &= (cd + 2ae - 2be - ad)/(-d) = (ce + 2bd - 2cd - ae)/e = f(2b - a - b)/(-f). \end{aligned} \tag{20}$$

Si tratta di $\binom{6}{2} = 15$ cubiche. Ponendo nelle (20): $a = 1$, $b = \eta$, $d = \varphi$ si ricava: $c = \eta^2$, $e = \eta\varphi$, $f = 0$, cioè le equazioni parametriche (19). Anche: $a = b = c$, $d = e = \xi$, $f = \zeta$ soddisfano le (20) e verificano il Corollario C.

III°) Consideriamo il sistema lineare di quadriche:

$$\lambda_0(ad - bc) + \lambda_1(af - be) + \lambda_2(a^2 - b^2) + \lambda_3(cf - de) + \lambda_4(ac - bd) + \lambda_5(ae - bf) = 0.$$

Questo sistema possiede una varietà base formata da due piani sghembi di equazioni:

$$a - b = 0, \quad d - c = 0, \quad e - f = 0, \quad \text{ed} \quad a + b = 0, \quad d + c = 0, \quad e + f = 0.$$

Ovviamente le corde che congiungono due punti presi sui due piani riempiono tutto l' S_5. Pertanto la Jacobiana del sistema lineare ha caratteristica 5. Costruito il determinante D si trova:

$$\theta_5 = 2\,(ad - bc)\,(b^2 - a^2),$$

e inoltre:

$$\Psi_0 = b, \ \Psi_1 = -a, \ \Psi_2 = d, \ \Psi_3 = -c, \ \Psi_4 = f, \ \Psi_5 = -e.$$

Siamo quindi di fronte a sei iperpiani, il cui sistema lineare è ovviamente semplice ed omaloidico. In questo caso speciale la transformazione birazionale diventa una omografia data dalle seguenti equazioni, in cui si devono scegliere solo i segni superiori od inferiori:

$$b = \pm\rho\alpha, \ a = \pm\rho\beta, \ d = \pm\rho\gamma, \ c = \pm\rho\delta, \ f = \pm\rho\varepsilon, \ e = \pm\rho\varkappa,$$

i cui punti uniti sono dati dalla intersezione delle 15 quadriche estratte dalle proporzioni:

$$b/a = a/b = d/c = c/d = -f/e = -e/f.$$

Ora i piani base: $a = \pm b$, $d = \pm c$, $e = \pm f$ conducono all'identità: $\pm 1 = \pm 1 = \pm 1 = \pm 1 = \pm 1 = \pm 1$, che soddisfa tutte le precedenti proporzioni.

BIBLIOGRAFIA

1. Bertini E. — *Sui sistemi lineari*, Rend. Istit. Lombardo — 15 (2) 1880.
2. Bonferroni G. — *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare*, R. Acc. Sc. di Torino — 50 (1914—15).
3. Terracini A. — *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*. Atti R. Acc. Sc. di Torino. Nota II — 51 (1916), III, 55 (1919—20).
4. Muracchini L. — *Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria*, Parte II, Riv. Matem. Univ. di Parma — 3, 75—89 (1952),
5. Xambo' S. — *On projectives varieties of minimal degree*. Collectanea Mathematica — Vol. XXXII. Fasc. 2 (1981).
6. Degoli L. — *Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 17 (1982), 325—330.
7. Degoli L. — *Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*, Collectanea Mathematica, Vol. XXXIII, fasc. 2 (1982).
8. Degoli L. — *Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle*, Demonstratio Mathematica 10 (3) (1983).
9. Degoli L. — *Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*. Mathematica, 26—49 (1) (1984), 33—43.
10. Degoli L. — *Un teorema sui sistemi lineari di quadriche riducibili ed irriducibili* An. şt. Univ. Iaşi, S. I a Matematică 31 (3) (1985).
11. Degoli L. — *Un théorème sur les variétés bases des systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée*. Communications, Serie A.L. 34 (1985).

Ricevuto il 19.VI.1986

Via Berengario n° 82/C
41012 CARPI (Modena)
(Italy)

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI
Tomul XXXIV, s. I a, Matematică, 1988, f. 2

FUNDAMENTAL SOLUTION AND RETARDED POTENTIAL FOR A RIGID THERMAL CONDUCTOR OF CATTANEO TYPE

BY

EUGEN SOÓS

1. **Introduction.** It is well-known that Fourier's model of a rigid heat conductor gives unbounded velocity of propagation for thermal disturbances. In order to avoid this fact, Cattaneo introduced in 1948 [1] a modified version of the Fourier's law for the heat flux by taking into account a kind of „thermal inertia". This model, obtained also by Vernotte in 1958 [2] and by Kaliski in 1965 [3], gives a finite speed for the propagation of thermal effects (for other details see [4], Cap. I and [5]).

In the following I shall obtain the fundamental solution and the retarded potential for Cattaneo's model, because the similar results given by Kaliski and Nowacki in 1969 [6] are erroneus (see further).

The fundamental equations of this model are:

— The local form of the energy balance:

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho_0 r, \tag{1.1}$$

where ρ_0 is the constant mass density, ε represents the specific internal energy per unit mass, $\mathbf{q}$ is the heat flux vector and r represents the external heat source density per unit mass of the rigid heat conducting body.

— The constitutive equation for the specific internal energy:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + c_0 T, \qquad c_0 > 0, \tag{1.2}$$

where ε_0 is the constant specific internal energy corresponding to the constant refference absolute temperature θ_0 of the conductor, c_0 represents the constant specific heat per unit mass corresponding to the refference temperature θ_0 and $T = \theta - \theta_0$ is the variation of the absolute temperature θ due to external thermal actions.

— The evolution equation of Cattaneo type for the heat flux $\mathbf{q}$:

$$\tau \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -\varkappa_0 \operatorname{grad} T, \quad \tau > 0, \ \varkappa_0 > 0, \tag{1.3}$$

where τ is the relaxation time of the heat flux and the material constant $\varkappa_0$ represents the coefficient of heat conductivity (of Fourier type) for the considered rigid conductor.

In the given relations ε, $\mathbf{q}$, r and T are functions on the space variable $\mathbf{x}$ and on the time variable t; the superposed dot stands for the time derivative with respect to t.

As it is clear from the given relations, we have a linear model for an isotropic and homogeneous rigid heat conductor.