BIBLIOGRAPHIE

1. Blair D. E. — *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
2. Chinea D. — *Quasi-K-cosymplectic submersions*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 33 (1984), 319—330.
3. Chinea D. — *Almost contact metric submersions*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 34 (1985), 89—104.
4. Chinea D. — *Almost contact submersions and structure equations*, Publicationes Mathematicae, 34 (1987), 207—213.
5. Chinea D. & Gonzalez C. — *A classification of almost contact metric manifolds*, (à paraître)
6. Gray A. & Hervella L. M. — *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura ed Appl., 123 (1980), 35—58.
7. Janssens D. & Vanhecke L. — *Almost contact structures and curvature tensors*, Kodai Math. J., 4 (1981), 1—27.
8. Kenmotsu K. — *A class of almost contact Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J., 24 (1972), 93—103.
9. O'Neill B. — *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459—469.
10. Oubiña J. A. — *New classes of almost contact metric structures*, Publicationes Mathematicae, 32 (1985), 187—193.
11. Oubiña J. A. — *A classification for almost contact structures*, à paraître.
12. Oubiña J. A. — *A classification for almost contact structures II, examples*, à paraître.
13. Sasaki S. — *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures* I, Tôhoku Math. J., 12 (1960), 459—476.
14. Sasaki S. & Hatakeyama Y. — *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures II*, Tôhoku Math. J., 13 (1961), 281—294.
15. Watson B. — *Almost Hermitian submersions*, J. Differential Geometry, 11 (1976), 147—165.
16. Watson B. — *The differential geometry of two types of almost contact metric submersions*, à paraître.
17. Watson D. & Vanhecke L. — *J-symetrics and J-linearties of the configuration tensors of an almost Hermitian submersion*, Simon Stevin, 3 (1977), 139—156.
18. Watson B. & Vanhecke L. — *K_t-curvatures and almost Hermitian submersions*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, 36 (1977—1978), 205—224.
19. Watson B. & Vanhecke L. — *The structure equation of an almost semi-Kähler submersion*, Houston J. Math. 5 (1979), 295—305.

Reçu le 28.II.1990

Departement de Mathematiques
Institut Superieur Pedagogique
B.P. 282 Kananga
Zaire

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI
Tomul XXXVII, fasc. 2, 1991, secţ. I — Matematică

CONNEXIONS PRESQUE TANGENTES NATURELLES

PAR

GHEORGHE ATANASIU et GHEORGHE MUNTEANU

Introduction. Les structures presque tangentes ont été définies et étudiées par R. S. Clark et M. R. Bruckheimer [1], M. A. Eliopoulos [2], J. Grifone [3], J. Lehman — Lejeune [5], et autres. Elles sont intimement liés aux structures presque quaternionnes de deuxième espèce définies par P. Libermann [6] et étudiées par K. Yano et M. Ako [8], P. M. Gadea [4] etc. Dans la Note ci-présente on établit toutes les connexion compatibles en même temps à une structure presque tangente et à sa réciproque, connexions qu'on désignera par le nom de presque tangentes naturelles. A l'aide de ces connexions on détermine l'ensemble des connexions compatibles à une structure métrique presque tangente qui dépend seulement de cette structure.

1. **Une structure presque tangente** (sigle — s.p.t.) sur une C^∞-varitété M, paracompacte, de dimension $2n$, est donnée par une 1-forme vectorielle f, de rang constant n, de manière que $f\circ f=0$, [1].

On note par $V=\operatorname{Ker} f=\operatorname{Im} f$ la distribution verticale et soit H une distribution horizontale complémentaire arbitraire. Si h et v sont les projecteurs supplémentaires sur H et V, on sait [8], qu'il existe une 1-forme vectorielle f^*, qui dépend de H, de maniére que

$$f^*\circ f=h,\quad v\circ f^*=0,\quad f^*\circ h=0. \tag{1.1}$$

f^* détermine une s.p.t. sur M dénommée *la réciproque de* f. Evidemment f est la réciproque de f^*.

Définition 1.1. *On appelle des opérateurs Obata du couple* (f, f^*), *les applications* $\underset{1}{Q}, \underset{2}{Q}: \tau_1^1(M)\to\tau_1^1(M)$ *données par*

$$\begin{aligned} \underset{1}{Q}(w)&=(1/2)(w-w\circ v-v\circ w+f\circ w\circ f+f^*\circ w\circ f^*+2v\circ w\circ v)\\ \underset{2}{Q}(w)&=(1/2)(w+w\circ v+v\circ w-f\circ w\circ f-f^*\circ w\circ f^*-2v\circ w\circ v). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Proposition 1.1. $\underset{1}{Q}$ *et* $\underset{2}{Q}$ *sont des projecteurs supplémentaires sur* $\tau_1^1(M)$.

La démonstration est immédiate.

Si ∇ est une connexion linéaire sur M, on notera par D la connexion associée : $D_X u=\nabla_X\circ u-u\circ\nabla_X$, $u\in\tau_1^1(M)$, $\forall X\in\mathcal{X}(M)$.

Définition 1.2. *Une connexion linéaire* ∇ *sur* M *est dénommée presque tangente naturelle (sigle — c.p.t.n.) si :* $D_X f=0$, $D_X f^*=0$, *c'est-à-dire*

$$\nabla_X \circ f - f \circ \nabla_X = 0, \quad \nabla_X \circ f^* - f^* \circ \nabla_X = 0, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M). \tag{1.3}$$

Il est évident que pour tout c.p.t.n., ∇, on a

$$D_X h = \nabla_X \circ h - h \circ \nabla_X = 0, \quad D_X v = \nabla_X \circ v - v \circ \nabla_X = 0, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M), \tag{1.4}$$

et on observe que ∇ réalise la commutation avec $\underset{1}{Q}$ et $\underset{2}{Q}$.

La théorème d'existence suivant a lieu :

Théorème 1.1. *Il existe des c.p.t.n. ; l'une d'entre elles est donnée par*

$$\nabla_X = \mathring{\nabla}_X + \frac{1}{2}\{f \circ \mathring{D}_X f^* + f^* \circ \mathring{D}_X f - \mathring{D}_X v + 2 v \circ \mathring{D}_X v\}, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M), \tag{1.5}$$

où $\mathring{\nabla}$ est une connexion linéaire fixée sur M et D est sa connexion associée.

Démonstration. Un calcul direct montre que (1.5) vérifie (1.3).

L'ensemble de toutes les c.p.t.n. présente intérêt. On prend

$$\bar{\nabla}_X = \nabla_X + A_X, \quad A \in \tau_2^1(M), \quad A_X(Y) = A(X, Y) ; \quad X, Y \in \mathscr{X}(M), \tag{1.6}$$

où ∇ est (1.5). On détermine le champ A de la condition qui exige que $\bar{\nabla}$ satisfasse à (1.3). On obtient le système $A_X \circ f - f \circ A_X = 0$, $A_X \circ f^* - f^* \circ A_X = 0$, qui est échivalent à $\underset{2}{Q} \circ A_X = 0$. Il résulte $A_X = \underset{1}{Q}(W_X)$, $\forall W \in \tau_2^1(M)$. Par conséquent

Théorème 1.2. *L'ensemble des c.p.t.n. est donné par*

$$\bar{\nabla}_X = \nabla_X + \underset{1}{Q}(W_X), \quad \forall W \in \tau_2^1(M), \tag{1.7}$$

où ∇ a l'expression (1.5).

On peut considérer (1.7) comme une transformation de c.p.t.n. et on a

Théorème 1.3. *L'ensemble des transformations de c.p.t.n. et le produit d'applications est un groupe abélien, noté par G, isomorphe avec le groupe additif des champs $W \in \tau_2^1(M)$ qui ont la propriété $W_X \in \operatorname{Ker} \underset{1}{Q}$, $\forall X \in \mathscr{X}(M)$.*

Proposition 1.2. (*i*) *Les tenseurs d'intégrabilité $N(f)$ et $N(f^*)$ des structures f et f^* sont les invariants de G ;*

(*ii*) *si T est le champ de torsion d'une c.p.t.n. alors*

$$\begin{aligned} N(f)(X, Y) &= -T(fX, fY) + fT(fX, Y) + fT(X, fY), \\ N(f^*)(X, Y) &= -T(f^*X, f^*Y) + f^*T(f^*X, Y) + f^*T(X, f^*Y), \quad \forall X, Y \in \mathscr{X}(M). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Théorème 1.4. *S'il existe une c.p.t.n. semi-symétrique (symétrique, en particulier) alors les structures f et f^* sont intégrables.*

En effet, $T(X, Y) = \sigma(X)Y - \sigma(Y)X$, $\sigma \in \mathscr{X}^*(M)$, implique $T(fX, fY) = \sigma(fX)fY - \sigma(fY)fX$, $fT(fX, Y) = \sigma(fX)fY$, $fT(fX, fY) = -\sigma(fY)fX$, (analogue en f^*), qui substituées en (1.8) donnent $N = 0$, $N^* = 0$, $\forall X, Y \in \mathscr{X}(M)$.

Remarque. Les c.p.t.n. sont des connexions compatibles à la structure presque quaternionne de deuxième espéce (φ, p, q), [6], où $\varphi = f^* - f$, $p = f^* + f$, $q = f^* \circ f - f \circ f^*$.

2. Soit g une structure riemannienne sur M. On considère g comme une 1-forme $X^*(M)$-valuée, $g : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}^*(M)$. On note $g : X \to g_X$ par $g_X(Y) = g(X, Y)$. Si $u \in \tau_1^1(M)$ on note par ${}^t u$ sa transposèe, notamment

Définition 2.1. *Un couple (f, g) formé d'une structure presque tangente f et une structure riemanienne g pour laquelle*

$$ {}^t f \circ g \circ f = g \circ h \Leftrightarrow \quad (2.2) \begin{cases} {}^t v \circ g \circ h = 0 \\ {}^t f \circ g \circ f = {}^t h \circ g \circ h, \end{cases} \tag{2.1}$$

on considère qu'elle constitue une structure métrique presque tangente (sigle — s.m.p.t.).

De (2.1) et (2.2) il résulte immédiatement

Proposition 2.1. *Les relations suivantes ont lieu*

$$g \circ f = {}^t f^* \circ g, \quad f^* \circ g^{-1} = g^{-1} \circ {}^t f, \quad g \circ v = {}^t v \circ g, \quad v \circ g^{-1} = g^{-1} \circ {}^t v. \tag{2.3}$$

Si on prend en considération les opérateurs Obata de g :

$$\underset{1}{\wedge}(u) = (1/2)(u - g^{-1} \circ {}^t u \circ g), \quad \underset{2}{\wedge}(u) = (1/2)(u + g^{-1} \circ {}^t u \circ g), \tag{2.4}$$

alors on peut démontrer par calcul direct :

Proposition 2.2. (*a*) *$\underset{1}{\wedge}$ et $\underset{2}{\wedge}$ sont des projecteurs supplémentaires sur $\tau_1^1(M)$;*

b) *$\underset{1}{Q}$ et $\underset{2}{Q}$ sont permutables avec $\underset{1}{\wedge}$ et $\underset{2}{\wedge}$: $\underset{a}{Q} \circ \underset{b}{\wedge} = \underset{b}{\wedge} \circ \underset{a}{Q}$ $(a, b = 1, 2)$;*

c) *$\underset{1}{Q} \circ \underset{1}{\wedge}$ et $\underset{2}{Q} \circ \underset{2}{\wedge}$ sont des projecteurs sur $\tau_1^1(M)$.*

Si ∇ est une connexion linéaire, alors la connexion associée qui opère sur les 1-formes $g : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}^*(M)$ sera notée par

$$\tilde{D} : \tilde{D}_X g = {}^t\nabla_X \circ g - g \circ \nabla_X, \quad \text{où } {}^t\nabla_X \eta = \nabla_X \circ \eta - \eta \circ \nabla_X, \quad \forall \eta \in \mathscr{X}^*(M).$$

Définition 2.2. *Une connexion linéaire ∇ sur M s'appelle connexion métrique presque tangente (sigle — c.m.p.t.) par rapport au couple (f, g), (2.1) [ou (2.2)] si :*

$$D_X f = 0 \quad (2.6) \quad \tilde{D}_X g = 0, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M). \tag{2.5}$$

Proposition 2.3. Une c.m.p.t. possède les propriétés

$$D_X h = 0, \quad D_X v = 0, \quad D_X f^* = 0, \quad \tilde{D}_X g^{-1} = 0, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M). \tag{2.7}$$

Démonstration. De (2.5) et $f \circ v = 0$ il resulte $f \circ D_X v = f \circ \nabla_X \circ v = 0$ et comme $f^* \circ f = h$, on a $h \circ \nabla_X \circ v = 0$. Cette égalité, avec (2.6) et (2.2) nous conduit à $v \circ \nabla_X \circ h = 0$. Alors $D_X h = \nabla_X \circ h - h \circ \nabla_X = h \circ \nabla_X \circ h + v \circ \nabla_X \circ h - h \circ \nabla_X \circ h - h \circ \nabla_X \circ v = 0$. Evidemment il résulte $D_X v = 0$. A ce moment de $f \circ f^* = v$, on obtient $h \circ D_X f^* = 0$, et de $v \circ f^* = 0$ on obtient $v \circ D_X f^* = 0$. Donc $D_X f^* = 0$. La relation $\tilde{D}_X g^{-1} = 0$ résulte de $g^{-1} \circ g = I$.

Le résultat suivant très important a lieu

Théorème 2.1. (*a*) *Une c.m.p.t. est une c.p.t.n. ;*

(*b*) *si $\overset{c}{\nabla}$ est la connexion Levi-Civita de g, alors c.p.t.n. donnée par*

$$\mathring{\nabla}_X = \overset{c}{\nabla}_X + \frac{1}{2}\{f \circ \overset{c}{D}_X f^* + f^* \circ \overset{c}{D}_X f - \overset{c}{D}_X v + 2 v \circ \overset{c}{D}_X v\}, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M), \tag{2.8}$$

a les propriétés : (i) est une c.m.p.t. ; (ii) $\mathring{\nabla}$ dépend seulement de la s.m.p.t.

Démonstration. L'assertion (a) est contenue dans la proposition 2.3, par (2.5) et (2.7). Pour démontrer l'assertion (b) on tient compte que (1.5) avec $\overset{*}{\nabla}=\nabla$ a la propriètè (2.5). Vu que $\tilde{D}_X g=0$, un calcul direct montre que (2.8) a aussi la propriété (2.6).

On appellera $\overset{*}{\nabla}$ donné par (2.8) c.m.p.t. *canonique.*

Si on cherche toutes les c.m.p.t. sous la forme $\nabla_X=\overset{*}{\nabla}_X+A_X$, on obtient facilement le systéme d'équations $\underset{1}{Q}\circ A=0$, $\underset{2}{\wedge}\circ A=0$, qui est évidemment compatible et donc on peut formuler

Théorème 2.2. *L'ensemble des c.m.p.t. est donné par*

$$\nabla_X=\overset{*}{\nabla}_X+(\underset{1}{Q}\circ\underset{1}{\wedge})(W_X),\qquad W\in\tau_2^1(M). \tag{2.9}$$

où $\overset{*}{\nabla}$ *est la c.m.p.t. canonique.*

3. Soit $R\in\tau_3^1(M)$ le champ de tenseurs de courbure de la connexion linéaire ∇. Alors pour tout $a\in\tau_2^0(M)$, $u\in\tau_1^1(M)$, $X, Y, Z, U, V\in\mathcal{X}(M)$ on a

$$([D_X, D_Y]u)(Z)=u(R(X, Y)Z)-R(X, Y)(uZ)-(D_{[X,Y]}u)(Z), \tag{3.1}$$

$$([\tilde{D}_X, \tilde{D}_Y]a)(U, V)=-a(R(X, Y)U, V)-a(U, R(X, Y)V)+(D_{[X,Y]}a)(U, V). \tag{3.2}$$

Les relations (3.1) et (3.2) nous permettent de formuler

Théorème 3.1. *Pour toute c.m.p.t. on a*

$$\underset{2}{Q}D_{X_p}\dots D_{X_1}R(X, Y)=0,\qquad \underset{2}{\wedge}\tilde{D}_{X_p}\dots\tilde{D}_{X_1}R(X, Y)=0 \tag{3.3}$$
$$p=0, 2, \dots, X, Y, X_1, \dots, X_1\in\mathcal{X}(M).$$

Remarques 1°. Pour l'intégrabilité de la s.m.p.t. on peut consulter [5], [7], [8]. 2°. Si on renonce à ce que $q\in\tau_2^0(M)$ soit positivement défini, alors on prendre en consideration la s.m.p.t. pour laquelle (2.1) est remplace par: (2.1) $^t f\circ g\circ f=-g\circ h$. Leur étude se fait de la même maniére.

RÉFÉRENCES

1. Clark R. S. et Brucheimer M. R. — C. R. Acad. Sci. Paris, *251* (1960), 627—629.
2. Eliopoulos H. A., C.R. Acad. Sci. Paris, *255* (1962), 1 563—1 565.
3. Grifone J., Ann. Inst. Fourier, Grenoble, I, *22 (1)* (1972), 287—334; II, *22 (3)* (1972), 291—338.
4. Gadea P. M., Tensor, N.S., *34* (1980), 30—34.
5. Lehmann J.-Lejeune J., C. R. Acad. Sci. Paris, *258* (1964), 5 326—5 329.
6. Libermann P., C. R. Acad. Sci. Paris, *234* (1952), 1 030—1 032.
7. Munteanu Gh., Anal. St. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, **XXXIII**, *2* (1987), 151—158.
8. Yano K. and Ako M., Kodai Sem. Rep. *25* (1973), 63—94.

Chaire de Mathématiques
Université de Braşov
2200—Braşov, Roumanie

Reçu le 13.III.1990

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI
Tomul XXXVII, fasc. 2, 1991, secţ. I — Matematică

ON PSEUDO SYMMETRIC AND PSEUDO RICCI SYMMETRIC P-SASAKIAN MANIFOLD

BY

M. TARAFDAR

Introduction. In a previous paper [1], M. C. Chaki introduced a type of non-flat Riemannian manifold (M^n, g) $(n\geqslant 2)$ whose curvature tensor R satisfies the condition

$$(\nabla_X R)(Y, Z)W=2A(X)R(Y, Z)W+A(Y)R(X, Z)W+A(Z)R(Y, X)W+ \tag{1}$$
$$+A(W)R(Y, Z)X+g(R(Y, Z)W, X)P$$

where A is a non-zero 1-form

$$g(X, P)=A(X) \tag{2}$$

for every vector field x and ∇ denotes the operator of covariant differentiation with respect to the metric g. Such a manifold was called a pseudo symmetric manifold, A was called its associated 1-form and an n-dimensional manifold of this kind was denoted by $(PS)_n$. In a subsequent paper [2] Chaki introduced another type of non-flat Riemannian manifold (M^n, g) $(n\geqslant 3)$ whose Ricci tensor S of type (0, 2) satisfies the condition:

$$(\nabla_X S)(Y, Z)=2A(X)S(Y, Z)+A(Y)S(X, Z)+A(Z)S(Y, X) \tag{3}$$

where A and ∇ have meaning already stated. Such a manifold was called a pseudo-Ricci symmetric manifold and an n-dimensional manifold of this kind was denoted by $(PRS)_n$. On the other hand, I Sato [3] and Matsumoto [4] introduced the notion of a P —Sasakian manifold as follows:

Let (M, g) be an n-dimensional Riemannian manifold admitting a 1—form η, a vector field ξ and an (1—1) tensor field Φ which satisfy the following conditions

$$(\nabla_X\eta)(Y)-(\nabla_Y\eta)(X)=0, \tag{4}$$

$$(\nabla_X\nabla_Y\eta)(Z)=-g(X, Z)\eta(Y)-g(X, Y)\eta(Z)+2\eta(X)(Y)\eta(Z), \tag{5}$$

$$g(X, \xi)=\eta(X), \text{ for all vector fields } X, \tag{6}$$

$$\eta(\xi)=1, \tag{7}$$

$$\nabla_X\xi=\Phi X. \tag{8}$$

Such a manifold was called a Para-Sasakian manifold or briefly a P-Sasakian manifold. In the present paper the question whether a Pseudo sym-