3. Hammell, M. — *Nonoscillation properties of a nonlinear differential equations*. Proc. Amer. Mat. Soc. 30 (1971), 92—96.
4. Fink, A. and Mary, D. — *A generalized Sturm comparison theorem and oscillation coefficients*, Monatsh Math. 73 (1969), 207—212.
5. Komkov, V. — *A technique for the detection of oscillation of second order ordinary differential equations*, Pacific J. Math. 42 (1972), 105—115.
6. Kwang, M. — *On certain comparison theorems for second order linear differential equations*. Proc. Amer. Mat. Soc. vol. 84 (1982), 539—542.
7. Leighton, W. — *On detection of oscillation of solutions of second order linear differential equations*. Duke Math. J. Vol. 17 (1950), 57—61.
8. Macki, J. — *Application of change of variable in qualitative theory of second order linear order differential equations*, SIAM Review, 18 (1976), 269—274.
9. Yan, J. — *A note on oscillation chriterion for an equation with damp term*. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 90 (1984), 277—280.

Received 14.V.1990

Mathematics Department
Faculty of Science
Al-Azhar University
P.O. Box 9019
Nasr City, Cairo 11765
Egypt

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI
Tomul XXXVII, fasc. 2, 1991, secţ. I — Matematică

SUBMERSIONS MÉTRIQUES PRESQUE DE CONTACT DONT L'ESPACE TOTAL EST UNE VARIÉTÉ DE KENMOTSU

PAR

T. TSHIKUNA-MATAMBA

Introduction. S'inspirant des travaux de Watson [15] et de Watson et Vanhecke [19], D. Chinea [2, 3, 4] s'est intéressé à l'étude des submersions riemanniennes sur les variétés métriques presque de contact ; il les appelle submersions métriques presque de contact et y obtient plusieurs résultats analgues à ceux des submersions presque hermitiennes.

Poursuivant l'étude des submersions riemanniennes qui commutent avec les tenseurs de structure, B. Watson [16] a défini et étudié deux types des submersions métriques presque de contact ; submersions dont l'espace total est une variété métrique presque de contact. Selon que l'espace de base est une variété métrique presque de contact ou une variété presque hermitienne, il définit les submersions de type I ou de type II respectivement. Précisons que par tenseur de structure nous entendons un champ de tenseurs qui définit une certaine classe des variétés riemanniennes ; l'exemple le plus familier étant celui du champ de tenseurs J qui définit la classe des variétés presque hermitiennes. Parmi les problèmes auxquels Watson s'est intéressé, il y a celui du transfert de la structure de l'espace total à l'espace de base ou sur les fibres ainsi que celui de la minimalité des fibres, problèmes déjà abordés dans [15], [17] et [18].

Ce papier est une petite contribution aux études déjà amorcées par Chinea et Watson. Nous avons choisi d'étudier, de manière descriptive, les submersions dont l'espace total est une variété étudiée par K. Kenmotsu [8] et élucidée par D. Janssens et L. Vanhecke [7]. L'intérêt qu'il y aurait à examiner une telle situation réside en ceci :

1°. Dans l'étude des submersions métriques presque de contact, il ne semble pas que l'on soit toujours certain qu'une variété donnée puisse se prêter comme espace total de fibration. Par exemple, Chinea [3] a pu montrer que l'espace total ne peut pas être une variété sasakienne, contact, K-contact, nearly-sasakienne ou quasi K — sasakienne ; une remarque que l'on retrouve également dans [16].

2°. Avec Chinea [4], on sait que si l'espace total est une variété semi-sasakienne ou semi-cosymplectique, alors l'espace de base hérite la structure de l'espace total à condition que les fibres soient minimales. Ceci montre que dans ce genre de fibrations, le transfert de la structure de l'espace total à l'espace de base n'est pas automatique.

Les deux considérations que nous venons d'évoquer exigent que chaque classe des variétés métriques presque de contact soit examinée de manière particulière dans l'étude des submersions métriques presque de contact. C'est pour cela que nous traitons le cas où l'espace total est une variété qui n'a été examinée ni par Chinea ni par Watson. Nous avons remarqué que les variétés de Kenmotsu correspondent aux variétés kählériennes tandis que les variétés presque de Kenmotsu correspondent aux variétés presque kählériennes. Le transfert de la structure de l'espace total à l'espace de base n'exige aucune condition. Lorsque l'espace total est une variété de Kenmotsu, les fibres sont minimales.

Au premier paragraphe nous rappelons quelques notions préliminaires sur les variétés presque hermitiennes et les variétés métriques presque de contact, la terminologie des submersions riemanniennes selon O'Neill [9].

Le deuxième paragraphe est consacré à l'étude des submersions de type I, tandis que le troisième étudie les submersions de type II.

Au dernier paragraphe nous donnons quelques exemples assez simples de ces deux types de submersions.

A travers tout ce texte, nous convenons de noter par D, E, et G les champs de vecteurs quelconques, par X, Y et Z les champs de vecteurs horizontaux tandis que U, V et W désigneront les champs de vecteurs verticaux.

Au cours de la préparation de ce texte, nous avons bénéficié des conseils des Professeurs L. Vanhecke et Nzitakera Sebugeni. Nous leur en exprimons notre profonde gratitude.

1. **Preliminaires** 1.1. *Variétés presque hermitiennes et variétés métriques presque de contact*

On appelle *variété presque hermitienne* la donnée d'un triplet (M, g, J) qui vérifie les conditions suivantes :

(i) (M, g) est une variété riemannienne,

(ii) J est un champ de tenseurs de type (1, 1) sur M tel qne $J^2D=-D$,

(iii) $g(D, E)=g(JD, JE)$, $\forall D, E\in \mathscr{X}(M)$ où $\mathscr{X}(M)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M.

Sur une variété presque hermitienne on définit une 2-forme différentielle Ω, appelée *forme de Kähler*, par $\Omega(D, E)=g(D, JE)$. De manière complète, les différentes classes des variétés presque hermitiennes ont été caractérisées par A. Gray et L. M. Hervella [6]. Dans la présente étude, deux seulement de ces classes nous intéresseront ; nous rappelons leurs définitions, On dit qu' une variété presque hermitienne (M, g, J) est :

(i) *kählérienne* si $\nabla\Omega=0$; ce qui revient à prendre $\nabla J=0$;

(ii) *presque kählérienne* si $d\Omega=0$, où ∇ est la connexion riemannienne et $d\Omega$ est la différentielle de Ω.

Une *variété métrique presque de contact*, au sens de Sasaki et Hatakeyama [13] et [14], est la donnée d'un quintuplet $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) (M, g) est une variété riemannienne,

(ii) ξ est un champ de vecteurs unitaires sur M,

(iii) η est une 1-forme différentielle sur M telle que $\eta(\xi)=1$,

(iv) φ est un champ de tenseurs de type (1, 1) sur M tel que

$$\varphi^2 D=-D+\eta(D)\xi,\ \forall D, E\in \mathscr{X}(M),$$

(v) $g(\varphi D, \varphi E)=g(D, E)-\eta(D)\eta(E)$.

Comme dans le cas des variétés presque hermitiennes, on définit également une 2-forme différentielle Φ par $\Phi(D, E)=g(D, \varphi E)$, appelée *forme de Sasaki* ou *forme fondamentale* sur une variété métrique presque de contact. Utilisant la dérivée covariante de cette forme fondamentale, D. Chinea et C. Gonzalez [5] ont pu établir une classification complète des variétés métriques presque de contact. D'autres classes ayant déjà été caractérisées par J. A. Oubiña [10, 11, 12] ; elles ne vont pas nous intéresser.

On dit qu'une variété métrique presque de contact M est :

(i) *normale* [11] si $(\nabla_D\varphi)E-(\nabla_{\varphi D}\varphi)\varphi E+\eta(E)\nabla_{\varphi D}\xi=0$;

(ii) *presque de Kenmotsu* [7] si $d\eta=0$ et $d\Phi(D, E, G)=\frac{2}{3}\sigma\{\eta(D)\Phi(E, G)\}$

où σ désigne la somme cyclique sur D, E et G ;

(iii) *de Kenmotsu* [7] si elle est presque de Kenmotsu et normale ; mais Kenmotsu lui-même [8] a retenu comme relation de définition de cette variété

$$(\nabla_D\varphi)E=g(\varphi D, E)\xi-\eta(E)\varphi D.$$

Tout comme Watson [16], nous rassemblons dans la proposition suivante quelques unes d'importantes propriétés établies par Blair et qui nous aideront par la suite.

1.1.1. **Proposition.** *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. On a toujours :*

(a) $\eta\circ\varphi=0$;

(b) $\varphi\xi=0$;

(c) $2g((\nabla_D\varphi)E, G)=3d\Phi(D, \varphi E, \varphi G)-3d\Phi(D, E, G)+g(N^{(1)}(E, G), \varphi D)+$
$+N^{(2)}(E, G)\eta(D)+2d\eta(\varphi E, D)\eta(G)-2d\eta(\varphi G, D)\eta(E)$;

(d) $N^{(2)}(D, E)=d\eta(\varphi D, E)+d\eta(D, \varphi E)$;

(e) $\eta(D)=g(D, \xi)$.

Démonstration. On peut consulter Blair [1]. Rappelons que $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ sont deux champs de tenseurs définis de la manière suivante :

$$N^{(1)}(D, E)=[\varphi, \varphi](D, E)+2d\eta(D, E)\xi ;$$

$$N^{(2)}(D, E)=(\mathscr{L}_{\varphi D}\eta)E-(\mathscr{L}_{\varphi E}\eta)D \text{ où } \mathscr{L} \text{ est la dérivée de Lie.}$$

1.1.2. **Corollaire.** *Si M est une variété presque de Kenmotsu alors :*

$$2g((\nabla_D\varphi)E, G)=3d\Phi(D, \varphi E, \varphi G)-3d\Phi(D, E, G)+g([\varphi, \varphi](E, G), \varphi D).$$

Démonstration. Le fait que $d\eta=0$ entraîne que $N^{(2)}=0$. Ce qui fait que dans l'énoncé (c) de la proposition il ne restera que les termes indiqués.

On sait que si $N^{(1)}=0$ alors la variété est normale ; dans ce cas si on suppose que M est une variété de Kenmotsu, on peut énoncer le corollaire.

1.1.3. **Corollaire.** *Si M est une variété de Kenmotsu alors on aura :*

$$2g((\nabla_D\varphi)E, G)=3d\Phi(D, \varphi E, \varphi G)-3d\Phi(D, E, G).$$

1.2. *Submersions riemanniennes.* Soient M et B deux variétés riemanniennes, on appelle *submersion riemannienne* [9] une application surjective $f: M\to B$ de classe infinie vérifiant les conditions suivantes :

(i) f est de rang maximal (i. e. $\mathrm{rg}(f)=\dim(B)$;

(ii) $f_*(\mathrm{Ker}\, f_*)^\perp$ est une isométrie linéaire.

Lorsque $f: M\to B$ est une submersion riemannienne, on dit que M est l'espace total tandis que B est l'espace de base. Pour chaque point $b\in B$, les variétés $f^{-1}(b)=F_b$ sont appelées des *fibres* de la submersion et on a $\dim F_b=\dim M-\dim B$. Les vecteurs qui sont dans le noyau de f_* sont appelés *vecteurs verticaux* et sont tangents aux fibres ; les vecteurs orthogonaux à la distribution verticale $V(M)$ sont appelés *vecteurs horizontaux*. On notera par $H(M)$ la distribution horizontale. Le fibré tangent (M) de l'espace total admet une décomposition orthogonale du type $T(M)=V(M)\oplus H(M)$. Nous noterons par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ les projections orthogonales de $T(M)$ sur $V(M)$ et $H(M)$ respectivement.

Pour une submersion riemannienne, O'Neill [9] a défini deux tenseurs T et A de type (1, 2) sur l'espace total de la manière suivante :

$$T_DE=\mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}D}\mathcal{V}E+\mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}D}\mathcal{H}E \quad \text{et} \quad A_DE=\mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}D}\mathcal{H}E+\mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}D}\mathcal{V}E.$$

Le premier tenseur aide à étudier la géometrie des fibres tandis que le second intervient dans l'étude de la distribution horizontale. O'Neill a également introduit la notion de champ de vecteurs *basique ;* c'est un champ de vecteurs horizontal X qui correspond par f à un champ de vecteurs de B que l'on note X_*.

2. **Submersion metriques presque de contact de type I.** Soient $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ et $(B, g' \varphi' \xi' \eta')$ deux variétés métriques presque de contact. On appelle *submersion métrique presque de contact de type I*, au sens de Watson [16], une submersion riemannienne $f: M\to B$ telle que :

(i) $$f_*\varphi E=\varphi' f_*E, \ \forall E\in\mathcal{X}(M);$$

(ii) $$f_*\xi=\xi'.$$

2.1. **Proposition** (Watson). *Si $f: M\to B$ est une submersion métrique presque de contact de type I, alors :*

(a) $f^*\eta'=\eta$; (b) $f^*\Phi'=\Phi$;

(c) $U\in V(M)\Rightarrow\varphi U\in V(M)$ *et de même* $X\in H(M)\Rightarrow\varphi X\in H(M)$;

(d) $\xi\in H(M)$; (e) $U\in V(M)\Rightarrow\eta(U)=0$.

Démonstration. (a) Considérons X basique et calculons $f^*\eta'(X_*)$. Comme $\eta'(X_*)=g'(\xi', X_*)$ alors $f^*\eta'(X_*)=f^*g'(\xi', X_*)=g'(f_*\xi, f_*X)=g(\xi, X)=\eta(X)$.

(b) De même nous considérons X et Y basiques et nous calculons $f^*\Phi'(X_*, Y_*)$. On a $f^*\Phi'(X_*, Y_*)=f^*g'(X_*, \varphi' Y_*)=g'(f_*X, \varphi' f_*Y)=$

$$=g'(f_*X, f_*\varphi Y)=g(X, \varphi Y)=\Phi(X, Y).$$

(c) On sait que si V est vertical alors il est dans le noyau de f_* ; comme $\varphi' f_*V=f_*\varphi V$ et que $f_*V=0$, alors $f_*\varphi V=0$, ce qui montre que φV est dans le noyau de f_* et de ce fait est vertical. Prenons X horizontal et V vetrical. On vient de montrer que φV est vertical, donc $g(X, \varphi V)=0$; mais $g(X, \varphi V)=-g(\varphi X, V)$ et partant $g(\varphi X, V)=0$, ceci montre que φX est orthogonal à V et de ce fait est horizontal.

(d) Pour montrer que ξ est horizontal, Watson [16] procède de la manière suivante: il décompose ξ en une partie verticale ξ_1 et une partie horizontale ξ_2 de telle sorte que $\xi=\xi_1+\xi_2$. Comme $\eta(\xi)=1$ alors $\eta(\xi_1)+\eta(\xi_2)=1$; mais $\eta(\xi_2)=g(\xi_2, \xi_2)=g'(f_*\xi_2, f_*\xi_2)=g'(\xi', \xi')=1$. Donc $\eta(\xi_1)=0$ qui montre que $\eta(\xi)=\eta(\xi_2)$ et prouve que ξ est horizontal.

(e) On sait que $\eta(V)=g(\xi, V)$. Comme ξ est horizontal, alors on a $g(\xi, V)=0=\eta(V)$.

Comme conséquence des énoncés (a) et (b) on a : $f^*d\eta'=d\eta$ et $f^*d\Phi'=d\Phi$. L'énoncé (c) exprime que les distributions verticale et horizontale sont invariantes par φ.

2.2. **Théorème.** Soit $f: M\to B$ *une submersion métrique presque de contact de type I. Si M est une variété :*

(i) *de Kenmotsu alors B est une variété de Kenmotsu ;*

(ii) *presque de Kenmotsu alors B est une variété presque de Kenmotsu.*

Demonstration. (i) Considérons X et Y basiques. On sait que $\mathcal{H}(\nabla_X\varphi)Y$ est basique et associé à $(\nabla'_{X_*}\varphi')Y_*$; de même φX est basique associé à $\varphi' X_*$ et que $g(X, Y)=g'(X_*, Y_*)\circ f$; on peut tirer que $g(\varphi X, Y)=g'(\varphi' X_*, Y_*)\circ f$. Comme $\eta=f^*\eta'$ et que $\xi'=f_*\xi$ alors on aura

$(\nabla'_{X_*}\varphi')Y_*=g'(\varphi' X_*, Y_*)\xi'-\eta'(Y_*)\varphi' X_*$ et de plus $f^*d\eta'=d\eta=0\Rightarrow d\eta'=0$, ce qui montre que B est une variété de Kenmotsu.

Pour ce qui est de (ii), lorsque M est une variété presque de Kenmotsu on applique le même procédé sur la différentielle de la forme fondamentale Φ' de B. On sait déjà que $d\eta'=0$; comme $f^*d\Phi'=d\Phi$ alors on aura $d\Phi'(X_*, Y_*, Z_*)=2/3\sigma\{\eta'(X_*)\Phi'(Y_*, Z_*)\}$ qui montre clairement que B est une variété presque de Kenmotsu.

Par ce théorème on voit que la structure de l'espace total se transfert à l'espace de base. Il existe des situations pour lesquelles un tel transfert ne se réalise que si les fibres sont minimales [3, 4]. Nous allons d'abord passer à la détermination des classes des fibres, qui, dans ce type de fibration, sont des variétés presque hermitiennes.

2.3. **Théorème.** *Soit $f: M\to B$ une submersion métrique presque de contact de type I. Si M est une variété :*

(i) *de Kenmotsu, alors les fibres sont des variétés kählériennes ;*

(ii) *presque de Kenmotsu, alors les fibres sont des variétés presque kählériennes.*

Démonstration. (i) Considérons U, V et W verticaux et puis calculons $2g((\nabla_U\varphi)V, W)$. Par le corollaire 1.1.3. et la fait que $d\Omega=0$, alors on a $g((\nabla_U\varphi)V, W)=0$; ce qui montre que sur les fibres on a $\nabla J=0$ qui définit une variété kählériene.

(ii) Comme $d\Omega=0$, alors le corollaire 1.1.2 nous donnera $2g((\nabla_U\varphi)V, W)=$ $=g([\varphi, \varphi](V, W), \varphi U)$; ce qui montre que les fibres sont des variétés presque kählériennes et non kählériennes.

Le tenseur T de O'Neill semble être le meilleur outil pour étudier les fibres d'une submersion riemannienne. Ce tenseur a permis à Watson et Vanhecke [17] d'obtenir une condition suffisante de la minimalité des fibres d'une submersion presque hermitienne. Etablissons quelques propriétés de ce tenseur ainsi que celles du tenseur A. D'autres propriétés importantes étant données dans [9].

2.4. **Proposition.** *Soit $f: M\to B$ une submersion métrique presque de contact de type I dont M est une variété de Kenmotsu, alors on a :*

(a) $T_U\varphi X=\varphi T_U X$; (b) $T_U\varphi V=\varphi T_U V$; (c) $A_X\varphi Y=\varphi A_X Y$; (d) $A_{\varphi X}U=$ $=A_X\varphi U$; (e) $A_\xi\xi=0$.

Démonstration. (a) Par le corollaire 1.1.3 on sait que $2g((\nabla_U\varphi)X, Y)=3d\Phi(U, \varphi X, \varphi Y)-3d\Phi(U, X, Y)$. Mais sur une variété de Kenmotsu :

$$d\Phi(U, \varphi X, \varphi Y)=2/3\{\eta(U)g(\varphi X, \varphi^2 Y)+\eta(\varphi X)g(\varphi Y, \varphi U)+$$
$$+\eta(\varphi Y)g(U, \varphi^2 X)\},$$

$$d\Phi(U, X, Y)=2/3\{\eta(U)g(X, \varphi Y)+\eta(X)g(Y, \varphi U)+\eta(Y)g(U, \varphi X)\}.$$

Comme $\eta(U)=0=\eta(\varphi X)=\eta(\varphi Y)=g(Y, \varphi U)=g(U, \varphi X)$, alors on a $d\Phi(U, \varphi X, \varphi Y)=0=d\Phi(U, X, Y)$; ce qui donne $2g((\nabla_U\varphi)X, Y)=0$ et conduit à $\nabla_U\varphi X-\varphi\nabla_U X=0$ qui n'est rien d'autre que (a).

(b) De la même façon on trouve que $2g((\nabla_U\varphi)V, W)=0$ qui donne la preuve.

(c) Le même procédé donne $2g((\nabla_X\varphi)Y, U)=0$ qui implique que $\nabla_X\varphi Y-\varphi\nabla_X Y=0$ et établit (c). De façon analogue on établit (d) et (e).

2.5. **Théorème.** *Soit $f: M\to B$ une submersion métrique presque de contact de type I. Si M est une variété de Kenmotsu, alors les fibres sont minimales.*

Démonstration. Rappelons d'abord que les fibres d'une submersion sont minimales lorsque la courbure moyenne est nulle. La courbure moyenne est définie par $H=\sum_{i=1}^{m-n}\{T_{U_i}U_i+T_{JU_i}JU_i\}$ où $\{U_i, JU_i\}$ est une J-base locale des fibres.

On a vu que si M est une variété de Kenmotsu, alors $T_U\varphi V=\varphi T_U V$, ce qui conduit à $T_U\varphi U=\varphi T_U U$ et partant $T_{\varphi U}\varphi U=\varphi(T_{\varphi U}U)$; or $T_{\varphi U}U=$ $=T_U\varphi U$ donc $T_{\varphi U}\varphi U=\varphi^2 T_U U=-T_U U$; ceci donne $T_U U+T_{\varphi U}\varphi U=0$. De ce fait on voit que $T_{U_i}U_i+T_{JU_i}JU_i=0$ et montre que $H=0$.

On observe que ce théorème est une conséquence d'un résultat beaucoup plus général qui serait : *Pour une submersion métrique presque de contact de type I, si on a $T_U\varphi V=\varphi T_U V$, alors les fibres sont minimales.* En effet, la démonstration de ce théorème n'a utilisé que la condition indiquée.

2.6. **Proposition.** *Soit $f: M\to B$ une submersion métrique presque de contact de type I. Si M est une variété presque de Kenmotsu, alors on a :*

(a) $T_U\varphi X=\varphi T_U X$; (b) $A_X\varphi Y=\varphi A_X Y$; (c) $A_{\varphi X}U=A_X\varphi U=\varphi A_X U$; (d) $A_\xi\xi=0$.

Démonstration. Même procédé qu'à la proposition 2. 4.

3. **Submersions metriques presque de contact de type II.** Soient $(M^{2m+1}, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact et (B^{2n}, g', J') une variété presque hermitienne. On appelle *submersion métrique presque de contact de type* II [16], une submersion riemannienne $f: M\to B$ telle que $J'f_*E=f_*\varphi E$, $\forall E\in\mathscr{X}(M)$.

3.1. **Proposition.** (Watson). *Si $f: M\to B$ est une submersion métrique presque de contact de type II, alors on a :*

(a) $\varphi\in\operatorname{Ker} f_*$; (b) $U\in V(M)\Rightarrow\varphi U\in V(M)$ *et de même* $X\in H(M)\Rightarrow$ $\Rightarrow\varphi X\in H(M)$; (c) $X\in H(M)\Rightarrow\eta(X)=0$; (d) $f^*\Omega=\Phi$.

Démonstration. Pour (b), (c), et (d) on applique le même procédé qu'à la proposition 2.1. Comme $\varphi\xi=0$ alors $J'f_*\xi=0$ qui montre que $f_*\xi=0$ et permet d'établir (a).

L'énoncé (d) a pour conséquence $f^*d\Omega=d\Phi$.

3.2. **Théorème.** *Soit $f: M\to B$ une submersion métrique presque de contact de type II. Si M est une variété :*

(i) *de Kenmotsu, alors B est une variété kählérienne ;*

(ii) *presque de Kenmotsu, alors B est une variété presque kählérienne.*

Démonstration. (i) Considérons X et Y basiques sur M. Puisque M est une variété de Kenmotsu, on a $(\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi X, Y)\xi-\eta(Y)\varphi X$ dont la projection horizontale donne $\mathscr{H}((\nabla_X\varphi)Y)=\mathscr{H}(g(\varphi X, Y)\xi)-\mathscr{H}(\eta(Y)\varphi X)$. Etant donné que ξ est vertical et Y horizontal, on a $\eta(Y)=0$ et $\mathscr{H}(\xi)=0$ qui donnent $\mathscr{H}((\nabla_X\varphi)Y)=0$; or $\mathscr{H}((\nabla_X\varphi)Y)$ est associé à $(\nabla'_{X_*}J')Y_*$, ce qui fait que $(\nabla'_{X_*}J')Y_*=0$ et montre que B est une variété kählérienne.

(ii) Prenons X, Y et Z basiques sur M pour calculer $d\Omega(X_*, Y_*, Z_*)$. Puisque $\eta(X)=0=\eta(Y)=\eta(Z)$ alors $d\Phi(X, Y, Z)=0$. Mais $d\Phi=f^*d\Omega$ donc $d\Omega(X_*, Y_*, Z_*)=0$, ce qui montre que B est une variété presque kählérienne.

Pour une submersion métrique presque de contact de type II, les fibres héritent la structure de l'espace total. Examinons leur minimalité.

3.3. **Proposition.** *Soit $f: M\to B$ une submersion métrique presque de contact de type II. Si M est une variété de Kenmotsu, alors on a :*

(a) $T_U\varphi X=\varphi T_U X$; (b) $T_U\varphi V=\varphi T_U V$; (c) $T_\xi\xi=0$.

Démonstration. (a) Comme à la proposition 2.4, on voit par calcul que $2g((\nabla_U\varphi)X, V)=0$; ceci montre que $(\nabla_U\varphi)X=0$ et donne la preuve.

Pour ce qui est de (b), on procède de même avec $2g((\nabla_U\varphi)V, X)=0$ qui donne $(\nabla_U\varphi)V=0$. L'énoncé (c) est une conséquence immédiate de (b) en faisant $U=V=\xi$.

3.4. **Théorème.** *Soit $f: M\to B$ une submersion métrique presque de contact de type II. Si M est une variété de Kenmotsu, alors les fibres sont minimales.*

Démonstration. Soit $\{U_i, \varphi U_i, \xi\}$ une φ-base locale orthonormée des champs de vecteurs sur le fibres ; comme $T_\xi\xi=0$ alors $T_\xi\xi+T_{\varphi\xi}\varphi\xi=0$. On sait que $T_U\varphi V=\varphi T_U V$ implique que $T_{\varphi U}\varphi U=\varphi^2 T_U U$. Etant donné que U_i est orthogonal à ξ alors $\eta(U_i)=0$ et de ce fait $\varphi^2 T_{U_i}U_i=-T_{U_i}U_i$ qui indique que $H=0$.

Tout comme au théorème 2.5 on observe que pour une submersion de type II, si $T_\xi \xi = 0$ et $T_C \varphi V = \varphi T_C V$ alors les fibres sont minimales.

4. **Un exemple de ces deux types de submersions.** Watson [16] donne plusieurs exemples de ces deux types de submersions métriques presque de contact. D'autres exemples sont données dans [3] pour ce qui est des submersions de type I. Nous nous servirons de [12] pour construire un exemple assez simple.

Soient (M, g, J) une variété presque hermitienne et $(M', g', \varphi', \xi', \eta')$ une variété métrique presque de contact. Sur le produit $\bar{M} = M \times M'$ on définit une structure métrique presque de contact $(\bar{\varphi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ de la manière suivante :

$$\bar{\varphi}(D, D') = (JD, \varphi' D') \; ; \; \bar{\eta}(D, D') = \eta'(D') \; ; \; \bar{\xi} = (0, \xi') \; ;$$

$$\bar{g}((D, D'), (E, E')) = g(D, E) + g'(D', E') \quad \text{avec} \quad D, E \in \mathcal{X}(M), \; D', E' \in \mathcal{X}(M')$$

tandis que $(D, D') \in \mathcal{X}(M \times M')$.

Il est tout à fait naturel de s'intéresser à la classification de la structure $(\bar{\varphi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$. Pour cela J. A. Oubiña [12] a pu définir des identités nécessaires à cette classification ; nous n'y avons retiré que celles qui pourraient intervenir dans notre étude ; comme par exemple :

$$\bar{\Phi}((D, D'), (E, E')) = g(D, JE) + g'(D', \varphi' E') \; ; \tag{4.1}$$

$$(\bar{\nabla}_{(D, D')} \bar{\varphi})(E, E') = ((\nabla_D J)E, (\nabla'_{D'} \varphi')E') \; ; \tag{4.2}$$

$$d\bar{\Phi}((D, D'), (E, E'), (G, G')) = d\Omega(D, E; G) + d\Phi'(D', E', G') \; ; \tag{4.3}$$

$$d\bar{\eta}((D, D'), (E, E')) = d\eta'(D', E') . \tag{4.4}$$

4.1. **Proposition.** *Si $\bar{M} = M \times M'$ est une variété métrique presque de contact obtenue comme ci-dessus, alors elle est :*

(a) de Kenmotsu ssi M est kählérienne et M' de Kenmotsu ;

(b) presque de Kenmotsu ssi M est presque kählérienne et M' presque de Kenmotsu.

Démonstration. En utilisant les relations de définition et les formules de Oubiña, on arrive facilement à établir ces énoncés. Considérons par exemple le cas de (a).

Si $\bar{M} = M \times M'$ est une variété de Kenmotsu alors nous aurons

$$(\bar{\nabla}_{(D, D')} \bar{\varphi})(E, E') = g(\bar{\varphi}(D, D'), (E, E'))\bar{\xi} - \bar{\eta}(E, E')\bar{\varphi}(D, D') \; ; \tag{4.5}$$

l'égalité (4.5) est équivalente à

$$((\nabla_D J)E, (\nabla_{D'} \varphi')E') = (0, g'(\varphi' D', E')\xi' - \eta'(E')\varphi' D') \tag{4.6}$$

qui montre que M est une variété kählérienne et M' une variété de Kenmotsu.

Pour ce qui est de la réciproque, si nous supposons M kählérienne et M' de Kenmotsu, les relations de définition nous donneront

$$(\bar{\nabla}_{(D, D')} \bar{\varphi})(E, E') = (0, g'(\varphi' D', E')\xi' - \eta'(E')\varphi' D') . \tag{4.7}$$

Exprimons le deuxième membre de (4.7) en termes d'éléments de $M \times M'$. On sait que $(0, g'(\varphi' D', E')\xi' - \eta'(E')\varphi' D') = (0, g'(\varphi' D', E')\xi') + (0, -\eta'(E')\varphi' D')$; mais $(0, g'(\varphi' D', E')\xi') = (0, g(JD, E)\xi' + g'(\varphi' D', E')\xi') = (g(JD, E) + g'(\varphi' D', E'))(0, \xi')$.

Or $(g(JD, E) + g'(\varphi' D', E'))(0, \xi') = \bar{g}((JD, \varphi' D'), (E, E'))(0, \xi') = \bar{g}(\bar{\varphi}(D, D'), (E, E'))\bar{\xi}$; donc on obtient

$$(0, g'(\varphi' D', E')\xi') = \bar{g}(\bar{\varphi}(D, D'), (E', E'))\bar{\xi} . \tag{4.8}$$

On peut établir que $(0, -\eta'(E')\varphi' D') = (-\bar{\eta}(E, E')JD, -\bar{\eta}(E, E')\varphi' D') = -\bar{\eta}(E, E')(JD, \varphi' D')$ qui donne

$$(0, -\eta'(E')\varphi' D') = -\bar{\eta}(E, E')\bar{\varphi}(D, D') . \tag{4.9}$$

Les relations (4.8) et (4.9) montrent que

$(\bar{\nabla}_{(D, D')} \bar{\varphi})(E, E') = \bar{g}(\bar{\varphi}(D, D'), (E, E'))\bar{\xi} - \bar{\eta}(E, E')\bar{\varphi}(D, D')$ qui prouve que $M \times M$ est une variété de Kenmotsu.

La démonstration de (ii) s'établit de manière analogue.

4.2. **Théorème.** *Soient M une variété presque hermitienne et M' une variété métrique presque de contact. Considérons la variété métrique presque de contact produit $M \times M'$, alors :*

(i) la projection $f : M \times M' \to M'$ este une submersion métrique presque de contact de type I ;

(ii) la projection $h : M \times M' \to M$ est une submersion métrique presque de contact de type II.

Démonstration. Il est évident que les deux projections sont des submersions riemanniennes. Comme $\bar{\varphi}(D, D') = (JD, \varphi' D')$ alors $f_* \bar{\varphi}(D, D') = f_*(JD, \varphi' D') = \varphi' D' = \varphi' f_*(D, D')$; ceci montre que $f_* \bar{\varphi} = \varphi' f_*$. De même $f_* \bar{\xi} = f_*(0, \xi') = \xi'$ qui termine la preuve de (i).

Le même procédé donne $h_* \bar{\varphi}(D, D') = h_*(JD, \varphi' D') = JD = J h_*(D, D')$ qui indique que $h_* \bar{\varphi} = J h_*$ et prouve (ii).

La proposition 4.1 combinée à ce théorème nous donne un exemple assez simple des deux types de submersions métriques presque de contact dont l'espace total est une variété de Kenmotsu.

Il est établi dans [5] que sur une variété hyperbolique (H^{2m+1}, ds^2) telle que $x_1 > 0$, $ds^2 = (c x_1^{-2} \sum_{i=1}^{2m+1} (dx_i)^2$ pour $c \neq 0$ et $m \geqslant 2$, on peut montrer que la structure $(\varphi, \eta, \xi, ds^2)$ est une structure de Kenmotsu lorsque $\xi = -x_1 \dfrac{\delta}{\delta x_1}$.

En considérant $\mathbf{C}^n$ avec sa métrique kählérienne usuelle, il est clair que $\mathbf{C}^n \times H^{2m+1}$ est une variété de Kenmotsu que l'on peut placer dans le théorème 4.2 comme illustration.

BIBLIOGRAPHIE

1. Blair D. E. — *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
2. Chinea D. — *Quasi-K-cosymplectic submersions*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 33 (1984), 319—330.
3. Chinea D. — *Almost contact metric submersions*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 34 (1985), 89—104.
4. Chinea D. — *Almost contact submersions and structure equations*, Publicationes Mathematicae, 34 (1987), 207—213.
5. Chinea D. & Gonzalez C. — *A classification of almost contact metric manifolds*, (à paraitre)
6. Gray A. & Hervella L. M. — *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura ed Appl., 123 (1980), 35—58.
7. Janssens D. & Vanhecke L. — *Almost contact structures and curvature tensors*, Kodai Math. J., 4 (1981), 1—27.
8. Kenmotsu K. — *A class of almost contact Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J., 24 (1972), 93—103.
9. O'Neill B. — *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459—469.
10. Oubiña J. A. — *New classes of almost contact metric structures*, Publicationes Mathematicae, 32 (1985), 187—193.
11. Oubiña J. A. — *A classification for almost contact structures*, à paraitre.
12. Oubiña J. A. — *A classification for almost contact structures II, examples*, à paraitre.
13. Sasaki S. — *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures* I, Tôhoku Math. J., 12 (1960), 459—476.
14. Sasaki S. & Hatakeyama Y. — *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures II*, Tôhoku Math. J., 13 (1961), 281—294.
15. Watson B. — *Almost Hermitian submersions*, J. Differential Geometry, 11 (1976), 147—165.
16. Watson B. — *The differential geometry of two types of almost contact metric submersions*, à paraitre.
17. Watson D. & Vanhecke L. — *J-symetries and J-linearties of the configuration tensors of an almost Hermitian submersion*, Simon Stevin, 3 (1977), 139—156.
18. Watson B. & Vanhecke L. — *K_t-curvatures and almost Hermitian submersions*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, 36 (1977—1978), 205—224.
19. Watson B. & Vanhecke L. — *The structure equation of an almost semi-Kähler submersion*, Houston J. Math. 5 (1979), 295—305.

Reçu le 28.II.1990

Departement de Mathematiques
Institut Superieur Pedagogique
B.P. 282 Kananga
Zaire

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI
Tomul XXXVII, fasc. 2, 1991, secţ. I — Matematică

CONNEXIONS PRESQUE TANGENTES NATURELLES

PAR

GHEORGHE ATANASIU et GHEORGHE MUNTEANU

Introduction. Les structures presque tangentes ont été définies et étudiées par R. S. Clark et M. R. Bruckheimer [1], M. A. Eliopoulos [2], J. Grifone [3], J. Lehman — Lejeune [5], et autres. Elles sont intimement liés aux structures presque quaternionnes de deuxième espèce définies par P. Libermann [6] et étudiées par K. Yano et M. Ako [8], P. M. Gadea [4] etc. Dans la Note ci-présente on établit toutes les connexion compatibles en même temps à une structure presque tangente et à sa réciproque, connexions qu'on désignera par le nom de presque tangentes naturelles. A l'aide de ces connexions on détermine l'ensemble des connexions compatibles à une structure métrique presque tangente qui dépend seulement de cette structure.

1. **Une structure presque tangente** (sigle — s.p.t.) sur une C^∞-varitété M, paracompacte, de dimension $2n$, est donnée par une 1-forme vectorielle f, de rang constant n, de manière que $f \circ f = 0$, [1].

On note par $V = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ la distribution verticale et soit H une distribution horizontale complémentaire arbitraire. Si h et v sont les projecteurs supplémentaires sur H et V, on sait [8], qu'il existe une 1-forme vectorielle f^*, qui dépend de H, de manière que

$$f^* \circ f = h, \quad v \circ f^* = 0, \quad f^* \circ h = 0. \tag{1.1}$$

f^* détermine une s.p.t. sur M dénommée *la réciproque de* f. Evidemment f est la réciproque de f^*.

Définition 1.1. *On appelle des opérateurs Obata du couple* (f, f^*), *les applications* $\underset{1}{Q}, \underset{2}{Q} : \tau_1^1(M) \to \tau_1^1(M)$ *données par*

$$\begin{aligned} \underset{1}{Q}(w) &= (1/2)(w - w \circ v - v \circ w + f \circ w \circ f + f^* \circ w \circ f^* + 2 v \circ w \circ v) \\ \underset{2}{Q}(w) &= (1/2)(w + w \circ v + v \circ w - f \circ w \circ f - f^* \circ w \circ f^* - 2 v \circ w \circ v). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Proposition 1.1. $\underset{1}{Q}$ *et* $\underset{2}{Q}$ *sont des projecteurs supplémentaires sur* $\tau_1^1(M)$.

La démonstration est immédiate.

Si ∇ est une connexion linéaire sur M, on notera par D la connexion associée : $D_X u = \nabla_X \circ u - u \circ \nabla_X$, $u \in \tau_1^1(M)$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$.

Définition 1.2. *Une connexion linéaire* ∇ *sur* M *est dénommée presque tangente naturelle (sigle — c.p.t.n.) si :* $D_X f = 0$, $D_X f^* = 0$, *c'est-à-dire*