where $G_i(t), 1 \leq i \leq p$, is given by (4.4) and $G(t,s)$ is the Green's matrix function constructed by theorem 2.

ACKNOWLEDGEMENTS. - This paper has been suported by the NATO grant CRG 900040.

REFERENCES

1. A s c h e r, U.M., M a t t h e i j, R.M.M. and R u s s e l, R.D. – *Numerical solution of boundary value problem for ordinary differential equations*, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1988.
2. C o n t i, R. – *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital., 22(1967), 135 - 178.
3. H e i m e s, K.A. – *Green's functions for linear second order systems*, SIAM J. Math. Anal., 9(1978), 207 - 214.
4. I n c e, E.L. – *Ordinary differential equations*, Dover 1957.
5. J ó d a r, L. – *Explicit solutions for second order operator differential equations with two boundary value conditions*, Linear Algebra Appl., 103(1988), 73 - 86.
6. J ó d a r, L. – *Boundary value problems and Green's operator functions*, Glasnick Matematicky, 24(44) (1989), 507 - 518.
7. J ó d a r, L. and N a v a r r o, E. – *Rectangular co-solutions of polynomial matrix equations and applications*, Applied Maths. Letters (in print).
8. M o l e r, C. and V a n L o a n – *Niniteen dubious ways to complete the exponential of a matrix*, SIAM Review, 20(1978), 801 - 836.
9. R e i d, W.T. – *Ordinary differential equations*, John - Wiley, New York 1971.
10. R u b i o, G., J ó d a r, L. – *Green's functions for linear second order matrix systems*, Scientific Annals of "Al.I.Cuza", Univ. of Iasi, (to appear).

Received:8.11.1991

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
P.O.Box 22012, Valencia
SPAIN

ANALELE STIINTIFICE AL UNIVERSITATII "AL.I.CUZA" IASI
Tomul XXXVIII , s.I.a Matematica 1992, f.2

NOUVELLES CLASSES DE VARIETES DE KENMOTSU

PAR

T.TSHIKUNA-MATAMBA

0.Introduction. Soit (M', g', J') une variété presque hermitienne. Utilisant la classification de G r a y - H e r v e l l a [6] des variétés presque hermitiennes, J.A. O u b i ñ a [10,11] a pu obtenir quelques classes remarquables des structures métriques presque de contact sur le produit $M' \times \mathbf{R}$; c'est le cas notamment des structures trans - sasakiennes, nearly - trans - sasakiennes, presque trans - sasakiennes , G_1 et G_2 - sasakiennes , pour ne citer que celles - lá.

Il nous a semblé intéressant d'étudier, de manière analogue, le produit déformé de la droite réelle par une variété presque hermitienne. En effet,lorsque M' est une variété kählerienne, K e n m o t s u [9] a construit une structure métrique presque de contact sur ce produit ; J a n s s e n s - V a n h e c k e [8] comme B l a i r - O u b i ñ a [2] appellent cette structure: "*structure de Kenmotsu* ".

Dans ce papier nous nous proposons de caractériser quelques classes remarquables des structures métriques presque de contact sur ce produit déformé. En faisant parcourir la variété M' dans la classification de G r a y - H e r v e l l a , nous obtenons huit nouvelles classes apparentées aux variétés de Kenmotsu que nous appelons: variétés *nearly de Kenmotsu* , *semi-de Kenmotsu normale* , *quasi de Kenmotsu* , G_1 *-de Kenmotsu* , G_1 *-semi-de Kenmotsu* , G_2 *- de Kenmotsu*, G_2 *-semi-de Kenmotsu* et *presque trans-de Kenmotsu*. Pour y parvenir, il nous a fallu déterminer la 2-forme fondamentale ainsi que sa différentielle , sa co différentielle et la connexion riemannienne de ce produit déformé. Les formules que nous avons obtenues permettent de retrouver les définitions des variétés de Kenmotsu et presque de Kenmotsu comme déjà formulées par [8]. Après avoir rappelé quelque notions fondamentales sur les variétés presque hermitiennes et les variétés métriques presque de contact, nous avons consacré le Sec.2 à la classification de ces nouvelles variétés. Au Sec.3 nous produisons quelques exemples afin d'illustrer les classes obtenues.

Nous terminons par l'étude des relations d'inclusion entre les diverses classes obtenues.

Les variétés presque hermitiennes qui interviennent dans ce papier sont supposées de dimensions $2m$ et lisses. Nous noterons par $\mathcal{X}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M.

1.Préliminaires. Une variété *presque hermitienne* est la donnée d'un triplet (M, g, J) soumis aux conditions suivantes:

(i) (M, g) est une variété riemannienne;

(ii) J est un champ de tenseurs de type (1,1) sur M tel que $J^2X = -X$;
(iii) $g(X,Y) = g(JX,JY)$, $\forall\, X,Y \in \mathcal{X}(M)$.

Sur une variété presque hermitienne on définit une 2-forme différentielle Ω , appelée *forme fondamentale* ou encore *forme de Kähler* , par $\Omega(X,Y) = g(X,JY)$. Nous noterons par ∇ et δ respectivement la connexion riemannienne et l'opérateur codérivé sur M . Dans [6], A.G r a y et L.M. H e r v e l l a ont établi une classification complète des variétés presque hermitiennes; nous reprenons ci-après les classes qui interviennent dans la définition de nouvelles classes de variétés de Kenmotsu.

Soit (M,g,J) une variété presque hermitienne. On dit que M est:
(a) *kählérienne* si $\nabla J = 0$;
(b) *presque kählérienne* si $d\Omega = 0$;
(c) *nearly kählérienne* si $(\nabla_X\Omega)(X,Y) = 0$;
(d) *quasi kählérienne* si $(\nabla_X\Omega)(Y,Z) + (\nabla_{JX}\Omega)(JY,Z) = 0$;
(e) *une W_3 -variété* si $(\nabla_X\Omega)(Y,Z) - (\nabla_{JX}\Omega)(JY,Z) = 0$ et $\delta\Omega = 0$;
(f) *une $W_1 \oplus W_3$ -variété* si $(\nabla_X\Omega)(X,Y) - (\nabla_{JX}\Omega)(JX,Y) = 0 = \delta\Omega$;
(g) *une $W_2 \oplus W_3$ -variété* si $\sigma\{(\nabla_X\Omega)(Y,Z) - (\nabla_{JX}\Omega)(JY,Z)\} = 0 = \delta\Omega$ lorsque σ désigne la somme cyclique sur X, Y et Z ;
(h) *une G_1 -variété* si $(\nabla_X\Omega)(X,Y) - (\nabla_{JX}\Omega)(JX,Y) = 0$;
(i) *une G_2 -variété* si $\sigma\{(\nabla_X\Omega)(Y,Z) - (\nabla_{JX}\Omega)(JY,Z)\} = 0$;
(j) *une $W_2 \oplus W_4$ -variété* si $\sigma\{(\nabla_X\Omega)(Y,Z) - \frac{1}{m-1}\Omega(X,Y)\delta\Omega(JZ)\} = 0$;

G r a y et H e r v e l l a appellent W_1 -variété ce que W a t s o n [16] appelle variété nearly kählérienne ; ils appelent W_2 -variété une variété preeque kählérienne au sens de W a t s o n. Pour d'autres détails , on peut consulter leur article [6].

Par *variété métrique presque de contact* au sens de [12, 13] , on entend la donnée d'un quintuplet (M,g,φ,ξ,η) qui vérifie les conditions suivantes:
(i) (M,g) est une variété riemannienne ;
(ii) ξ est un champ de vecteurs tel que $g(\xi,\xi) = 1$;
(iii) η est un 1-forme différentielle sur M telle que $\eta(\xi) = 1$;
(iv) φ est un champ de tenseurs de type (1,1) sur M tel que

$$\varphi^2X = -X + \eta(X)\xi,$$

(v) $g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ $\forall\, X,Y \in \mathcal{X}(M)$;

Comme dans le cas des variétés presque hermitiennes , on définit également une 2-forme différentielle Φ , par $\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y)$, appellée *forme fondamentale* ou *forme de Sasaki* d'une variété métrique presque de contact.

2.Nouvelles classes de variétés de Kenmotsu. Soient (M',g',J') une variétés presque hermitienne et $M = \mathbf{R}\times_f M'$ le produit déformé [1] dans lequel f est une fonction réelle de variable réelle définie par $f(t) = e^{ct}$ avec $c \in \mathbf{R}_0^+$. Les éléments de $\mathcal{X}(M)$ sont de la forme $(t\frac{d}{dt},X')$ où $t \in \mathbf{R}$ et $X' \in \mathcal{X}(M')$; nous les noterons par X .

Dans [14] on a muni $M = \mathbf{R}\times_f M'$ de la structure (g,φ,ξ,η) en posant :

$$\xi = (\frac{d}{dt},0); \tag{1.1}$$

$$\eta = dt; \tag{1.2}$$

$$g(X,Y) = 1 + e^{2ct}g'(X',Y'); \tag{1.3}$$

$$\varphi(X) = (0,J'X'). \tag{1.4}$$

Nous convenons de noter par ∇,Φ et δ respectivement la connexion riemannienne, la forme de Sasaki et la codifférentielle sur M. Leurs homologues sur M' seront notés par ∇',Ω et δ' respectivement. Il n'est pas difficile d'établir les formules suivantes:

$$(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = e^{2ct}(\nabla'_{X'}\Omega)(Y',Z') + \eta(Z)\Phi(X,Y) + \eta(Y)\Phi(Z,X); \tag{1.5}$$

$$\Phi = e^{2ct}\Omega; \tag{1.6}$$

$$d\Phi = 2c\Phi + e^{2ct}d\Omega; \tag{1.7}$$

$$3d\Phi(X,Y,Z) = e^{2ct}d\Omega(X',Y',Z') + 2\sigma\{\eta(X)\Phi(Y,Z)\}; \tag{1.8}$$

$$\delta\Phi = \delta'\Omega; \tag{1.9}$$

$$d\eta = 0. \tag{1.10}$$

Définition 2.1. Soit $M = \mathbf{R}\times_f M'$ le produit déformé de la droite réelle par une variété presque hermitienne tel que défini ci-dessus. On dit que M est une variété *nearly de Kenmotsu* si M' est une variété nearly kählérienne.

Proposition 2.2. *Soit (M,g,φ,ξ,η) une variété métrique presque de contact. Alors M est nearly de Kenmotsu si et seulement si $d\eta = 0$ et que $(\nabla_X\Phi)(X,Y) = \eta(X)\Phi(Y,X)$.*

Démonstration. Si M est nearly de Kenmotsu, alors M est un produit déformé de la droite réelle par une variété nearly kählérienne M' . Dans ce cas on a $(\nabla'_{X'}\Omega)(X',Y') = 0$; de ce fait , (1.5) devient $(\nabla_X\Phi)(X,Y) = \eta(Y)\Phi(X,X) + \eta(X)\Phi(Y,X)$ qui donne la preuve par le fait que la forme fondamentale Φ est antisymétrique.

Réciproquement, si on a $(\nabla_X\Phi)(X,Y) = \eta(X)\Phi(Y,X)$ et que M soit un produit déformé comme déjà supposé, il en découle que $(\nabla'_{X'}\Omega)(X',Y') = 0$; ce qui montre que M' est nearly kählérienne . Dans ce cas le produit déformé de la droite réelle par M' est une variété nearly de Kenmotsu.

Définition 2.3. Soit $M = \mathbf{R} \times_f M'$ le produit déformé comme déjà indiqué. On dit que M est *semi-de Kenmotsu normale* si M' est une W_3 -variété.

Proposition 2.4. *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. Alors M est une variété semi-de Kenmotsu normale si et seulement si $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi Y, Z) = \eta(Y)\Phi(Z, X)$ et $\delta\Phi = 0 = d\eta$.*

Démonstration. Si M est une variété semi-de Kenmotsu normale, alors M est un produit déformé de la droite réelle par une W_3 - variété. Etant donné que $\eta \circ \varphi = 0$, alors par (1.5) on aura

$$(1.11) \qquad (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi Y, Z) = e^{2ct}(\nabla'_{J'X'}\Omega)(J'Y', Z') + \eta(Z)\Phi(X, Y).$$

Mais sur une W_3 -variété on sait que $(\nabla'_{X'}\Omega)(Y', Z') - (\nabla'_{J'X'}\Omega)(J'Y', Z') = 0$ de telle sorte qu'en retranchant (1.11) de (1.5) on obtient la formule cherchée.

Réciproquement , supposons que l'on ait $d\eta = 0 = \delta\Phi$ et que $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi Y, Z) = \eta(Y)\Phi(Z, X)$; cette formule nous place dans le cas d'un produit déformé de la droite réelle par une variété presque hermitienne M'. Comme $\delta\Phi = \delta'\Omega$, par (1.9) alors $\delta'\Omega = 0$. La fait que $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi Y, Z) = \eta(Y)\Phi(Z, X)$ montre qu'en remontant à la formule (1.5) on trouvera bien $(\nabla'_{X'}\Omega)(Y', Z') = (\nabla'_{J'X'}\Omega)(J'Y', Z')$; ce qui prouve que M' est une W_3 -variété et par conséquent M est une variété semi-de Kenmotsu normale.

Définition 2.5. Soit $M = \mathbf{R} \times_f M'$ le produit déformé comme ci-dessus. On dit que M est une variété *quasi de Kenmotsu* si M' est quasi kählérienne.

Proposition 2.6. *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. Alors M est une variété quasi de Kenmotsu si et seulement si*

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi Y, Z) = \eta(Y)\Phi(Z, X) + 2\eta(Z)\Phi(X, Y) \text{ et } d\eta = 0.$$

Démonstration. On procède comme à la proposition 2.4 en tenant compte du fait que sur une variété quasi kählérienne on a

$$(\nabla'_{X'}\Omega)(Y', Z') + (\nabla'_{J'X'}\Omega)(J'Y', Z') = 0$$

Définition 2.7. Soit $M = \mathbf{R} \times_f M'$ le produit déformé comme déjà indiqué. On dit que M est une *variété G_1 - de Kenmotsu* si M' est une G_1 -variété.

Proposition 2.8. *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. Alors M est une variété G_1 - de Kenmotsu si et seulement si*

$$(\nabla_X \Phi)(X, Y) - (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi X, Y) = \eta(X)\Phi(Y, X) \text{ et } d\eta = 0.$$

Démonstration. Elle s'établit comme à la proposition 2.4 en recourant à la dérivée covariante et par le fait que sur une G_1 -variété on a

$$(\nabla'_{X'}\Omega)(X', Y') = (\nabla'_{J'X'}\Omega)(J'X', Y').$$

Définition 2.9. Soit $M = \mathbf{R} \times_f M'$ le produit déformé comme déjà indiqué. On dit que M est une *variété G_1 -semi-de Kenmotsu* si M' est une $W_1 \oplus W_3$ -variété.

Proposition 2.10. *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. Alors M est une variété G_1 - semi-de Kenmotsu si et seulement si $d\eta = 0 = \delta\Phi$ et que $(\nabla_X \Phi)(X, Y) - (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi X, Y) = \eta(X)\Phi(Y, X)$.*

Démonstration. On procède comme à la proposition 2.8.

Définition 2.11. Soit $M = \mathbf{R} \times_f M'$ le produit déformé comme ci-dessus. On dit que M est une *variété G_2 - de Kenmotsu* si M' est une G_2 *-variété.*

Proposition 2.12. *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. Alors M est une variété G_2 - semi-de Kenmotsu si et seulement si*

$$\sigma\{(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - (\nabla_{\varphi X} \Phi)(\varphi Y, Z)\} = \sigma\{\eta(X)\Phi(Y, Z)\} \text{ et } d\eta = 0.$$

Démonstration. Analogue aux précédentes en nontant que sur une G_2 -variété on a $\sigma\{(\nabla'_{X'}\Omega)(Y', Z') - (\nabla'_{J'X'}\Omega)(J'Y', Z')\} = 0$.

Définition 2.13. Soit $M = \mathbf{R} \times_f M'$ le produit déformé comme ci-dessus. On dit que M est une *variété G_2 - semi-de Kenmotsu* si M' est une $W_2 \oplus W_3$ *-variété.*

Proposition 2.14. *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. Alors M est une variété G_2 - semi-de Kenmotsu si et seulement si M est une variété G_2 -de Kenmotsu et que $\delta\Phi = 0$.*

Démonstration. Elle s'établit comme à la proposition précédente avec cette ajoute que $\delta\Phi = 0 = \delta'\Omega$.

Définition 2.15. Soit $M = \mathbf{R} \times_f M'$ le produit déformé comme déjà indiqué. On dit que M est une *variété presque trans-de Kenmotsu* si M' est une $W_2 \oplus W_4$ -variété.

Proposition 2.16. *Soit $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact. Alors M est presque trans-de Kenmotsu si et seulement si $d\eta = 0$ et que*

$$\sigma\{(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - \frac{1}{m}\Phi(X, Y)\delta\Phi(\varphi Z)\} = 2\sigma\{\eta(X)\Phi(Y, Z)\}.$$

Démonstration. Il suffit de combiner la relation de définition d'une $W_2 \oplus W_4$ -varété aux formules (1.5) , (1.6) et (1.9).

Remarque 2.17. Moyennant les définitions des variétés kählériennes et presque kählériennes, les formules (1.5) et (1.8) permettent de retrouver les définitions des variétés dites de Kenmotsu et presque de Kenmotsu telles que données par J a n s s e n s et V a n h e c k e [8].

3.Quelques exemples. 3.1. *Variétés nearly de Kenmotsu.* Si M_1 et M_2 sont des variétés closely cosymplectiques, on montre dans [3] que le produit $M_1 \times M_2$ est une variété nearly kählérienne ; ce qui fait de $M = \mathbf{R} \times_f (M_1 \times M_2)$ une variété nearly de Kenmotsu.

Il est indiqué dans [6] que la sphère S^6 est un bel exemple d'une variété nearly kählérienne. Dans ce cas $M = \mathbf{R} \times_f S^6$ est un autre exemple d'une variété nearly de Kenmotsu.

3.2. *Variétés quasi de Kenmotsu.* On sait que $S^2 \times \mathbf{R}^4$ est une variété quasi kählérienne pour la structure presque complexe définie par les nombres de Cayley. Ceci fait que $M = \mathbf{R} \times_f (S^2 \times \mathbf{R}^4)$ est quasi de Kenmotsu.

3.3. *Variétés semi-de Kenmotsu normales.* D'aprés [6], toute variété complexe parallélisable est une W_3 -variété. Comme S^2 est parallélisable alors $M = \mathbf{R} \times_f S^2$ est semi-de Kenmotsu normale.

Soit N une surface minimale non plane dans $\mathbf{R}^3$, on peut montrer que $N \times \mathbf{R}^4$ est une W_3 -variété et par conséquent $M = \mathbf{R} \times_f (N \times \mathbf{R}^4)$ est une variété semi-de Kenmotsu normale.

3.4. *Variétés G_1 -de Kenmotsu.* It est établi dans [7] que si M'_1 est une variété nearly kählérienne et M'_2 une variété hermitienne, alors le produit $M'_1 \times M'_2$ est une G_1 -variété. Il s'ensuit que $M = \mathbf{R} \times_f (M'_1 \times M'_2)$ est G_1 -de Kenmotsu.

Dans [3], C a p u r s i a montré que si M_1 et M_2 sont des variétés normales alors $M_1 \times M_2$ est une variété hermitienne. Comme S^6 est nearly kählérienne, alors $S^6 \times (M_1 \times M_2)$ est une G_1 -variété. Dans ces conditions $M = \mathbf{R} \times_f (S^6 \times (M_1 \times M_2))$ est une variété G_1 -de Kenmotsu.

3.5. *Variétés G_2 -de Kenmotsu.* Comme à l'exemple 3.4 on montre dans [15] que si M'_1 est une variété hermetienne et M'_2 une variété presque kählérienne alors $M'_1 \times M'_2$ est une G_2 -variété. De ce fait $M = \mathbf{R} \times_f (M'_1 \times M'_2)$ constitue un exemple d'une variété G_2 -de Kenmotsu.

3.6. *Variétés de Kenmotsu.* Lorsque M_1 et M_2 sont des variétés cosymplectiques, C a p u r s i [3] a montré que $M_1 \times M_2$ est une variété kählérienne. Pour cette raison , $M = \mathbf{R} \times_f (M_1 \times M_2)$ est une variété de Kenmotsu.

3.7. *Variétés presque de Kenmotsu.* Si M_1 et M_2 sont des variétés presque cosymplectiques, C a p u r s i montre de même que $M_1 \times M_2$ est une variété presque kählérienne. Ceci fait que $M = \mathbf{R} \times_f (M_1 \times M_2)$ est une variété presque de Kenmotsu.

On observe que pour obtenir des exemples des variétés définies au Sec.2 , il suffit de prendre, dans le produit déformé, M' parmi les différents exemples des variétés presque hermitiennes que donnent [3], [4], [5] , [6] et [15].

4.Relations d'inclusion. G r a y and H e r v e l l a ont comparé entre elles, les différentes classes des structures presque hermitiennes qu'ils ont étudiées. O u b i ñ a [11] l'a également fait pour les nouvelles classes des structures métriques presque de contact qu'il a caractérisées.

Les structures que nous avons définies ont en commun le fait que $d\eta = 0$. Dans la comparaison que nous allons établir, nous ne nous préoccuperons que des autres relations de définition.

Proposition 4.1. *Toute variété semi-de Kenmotsu normale est G_2 -semi-de Kenmotsu.*

Démonstration. On sait qu'une variété semi-de Kenmotsu normale est définie par $d\eta = \delta\Phi = 0$ et $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) - (\nabla_{\varphi X}\Phi)(\varphi Y, Z) = \eta(Y)\Phi(Z,X)$. La somme cyclique de deux membres de la dernière relation donne l'une des relations de définition d'une variété G_2 -semi-de Kenmotsu.

Proposition 4.2. *Toute variété de Kenmotsu est nearly de Kenmotsu.*

Démonstration. Soit M une variété de Kenmotsu ; par (1.5) on a $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = \eta(Z)\Phi(X,Y) + \eta(Y)\Phi(Z,X)$. Cette formule implique que

$(\nabla_X\Phi)(X,Y) = \eta(Y)\Phi(X,X) + \eta(X)\Phi(Y,X)$.Comme $\Phi(X,X) = 0$ alors $(\nabla_X\Phi)(X,Y) = \eta(X)\Phi(Y,X)$ qui définit une variété nearly de Kenmotsu.

Proposition 4.3. *Toute variété nearly de Kenmotsu est G_1 -de Kenmotsu.*

Démonstration. Pour une variété nearly de Kenmotsu , on sait que $(\nabla_{\varphi X}\Phi)\ (\varphi X, Y) = 0$ car $\eta \circ \varphi = 0$ et que Φ est antisymétrique. Dans ce cas $(\nabla_X\Phi)(X,Y) - (\nabla_{\varphi X}\Phi)(\varphi X, Y) = \eta(X)\Phi(Y,X)$ qui donne la preuve.

Proposition 4.4 *Toute variété semi-de Kenmotsu normale est G_1 -semi-de Kenmotsu.*

Démonstration. Il suffit de prendre $X = Y$ dans la formule qui définit une variété semi-de Kenmotsu normale pour obtenir celle qui caractérise une variété G_1 -semi-de Kemotsu.

Proposition 4.5. *Toute variété G_1 -semi-de Kenmotsu est G_1 -de Kenmotsu.*

Démonstration. A partir des relations de définition, la preuve est facile à établir.

Proposition 4.6. *Toute variété G_2 -semi-de Kenmotsu est G_2 -de Kenmotsu.*

Démonstration. On peut se reporter à la proposition 2.14.

Proposition 4.7. *Toute variété de Kenmotsu est quasi de Kenmotsu.*

Démonstration. Elle est analogue à celle de la proposition 4.2.

Proposition 4.8. *Une variété presque de Kenmotsu est presque trans-de Kenmotsu si et seulement si $\delta\Phi = 0$.*

Démonstration. Soit M une variété presque de Kenmotsu. Par définition on a $3d\Phi(X,Y,Z) = 2\sigma\{\eta(X)\Phi(Y,Z)\}$ et $d\eta = 0$. Comme $\delta\Phi = 0$ alors $\delta\Phi(\varphi Z) = 0$ et partant

$$3d\Phi(X,Y,Z) - \frac{1}{m}\Phi(X,Y)\delta\Phi(\varphi Z) = 2\sigma\{\eta(X)\Phi(Y,Z)\}$$

Par ailleurs $3d\Phi(Y,Z) = \sigma\{(\nabla_X\Phi)(Y,Z)\}$; donc on peut tirer

$$\sigma\{(\nabla_X\Phi)(Y,Z) - \frac{1}{m}\Phi(X,Y)\delta\Phi(\varphi Z)\} = 2\sigma\{\eta(X)\Phi(Y,Z)\}$$

qui définit une variété presque trans-de Kenmotsu.

Réciproquement , si M est une variété presque trans-de Kenmotsu alors

$$\sigma\{(\nabla_X\Phi)(Y,Z) - \frac{1}{m}\Phi(X,Y)\delta\Phi(\varphi Z)\} = 2\sigma\{\eta(X)\Phi(Y,Z)\}$$

Si de plus $\delta\Phi = 0$ alors $\sigma\{(\nabla_X\Phi)(Y,Z)\} = 2\sigma\{\eta(X)\Phi(Y,Z)\}$; comme $\sigma\{(\nabla_X\Phi)\ (Y,Z)\} = 3d\Phi(X,Y,Z)$ alors on a la preuve.

Ces différentes relations d'inclusion sont résumées dans la figure 1 dans la quelle nous indiquons les variétés presque hermitiennes sous - jacentes.

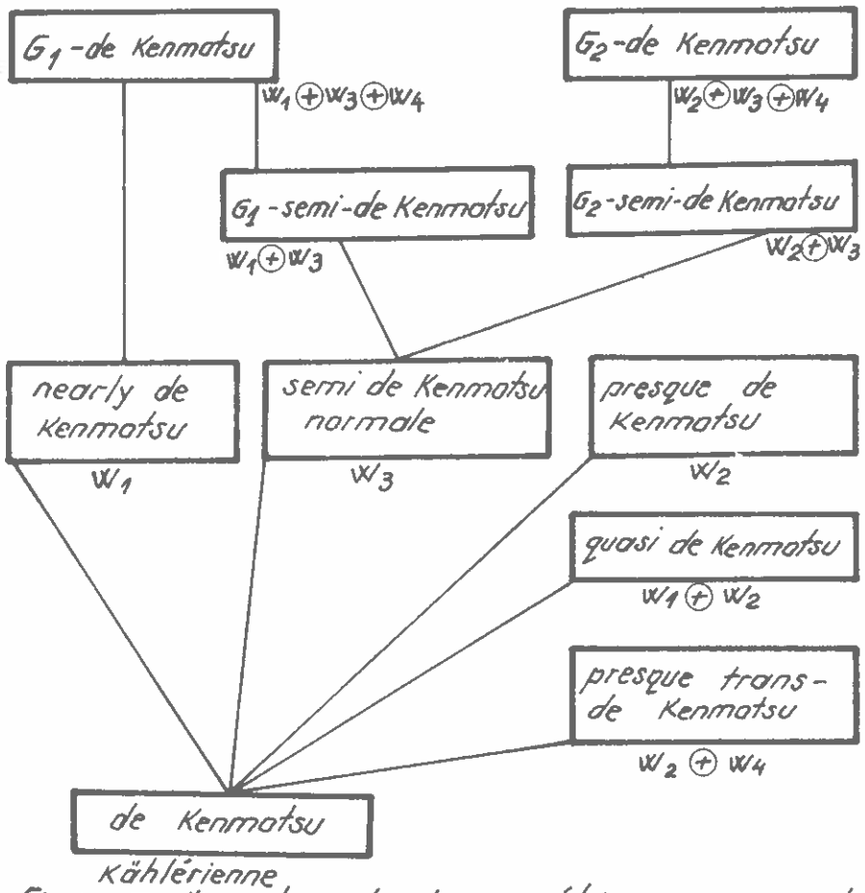

Fig.1. Treillis des structures métriques presque de contact apparentées aux structures de Kenmotsu avec leurs structures presque hermitiennes sous-jacentes.

BIBLIOGRAPHIE

1. B i s h o p, R.L. , O'N e i l l, B. – *Manifolds of negative curvature* , Trans. Amer. Math. Soc. , 145 (1969) , 1 -49.
2. B l a i r, D.E. , O u b i ñ a, J.A. – *Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds* (à paraître).
3. C a p u r s i, M. – *Some remarks on the product of two almost contact manifolds* , An. St. Univ. " Al.I.Cuza" , 30 (1984), 75 - 79.
4. F e r n a n d e z, M. , H e r v e l l a, L.M. – *Un exemple de variété pseudo - kählérienne (G_1 - variété)* , C.R. Acad. Sc. Paris , 283 (1976) , 203 - 205.
5. G r a y, A. - *Some examples of almost Hermitian manifolds* ,Illinois J. Math., 10 (1966) , 353 - 366.
6. G r a y, A. , H e r v e l l a, L.M. – *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* , Ann. Mat. Pura. Appl., 123 (1980) , 35 - 58.
7. H e r v e l l a, L.M. , V i d a l, E. – *Nouvelles géométriés pseudo - kählériennes G_1 et G_2* , C.R. Acad. Sc. Paris, 283 ,(1976), 115 - 118.
8. J a n s s e n s, D. , V a n h e c k e, L. – *Almost contact structures and curvature tensors* , Kodai Math. J., 4 (1981), 1 -27.
9. K e n m o t s u, K. – *A class of almost contact Riemannian manifolds* , Tôhoku Math. J., 24 (1972), 93 - 103.
10. O u b i ñ a, J.A. – *New classes of almost contact metric structures* , Publicationes Mathematicae, Debrecen , 32 (1985), 187 - 193.
11. O u b i ñ a, J.A. – *A classification for almost contact structures* ,(à paraître).
12. S a s a k i, S. – *On differentiable manifolds with certain structures which are closely realated to almost contact structure I* , Tôhoku Math. J., 12 (1960) , 459 - 476.
13. S a s a k i, S. , H a t a k e y a m a, Y. – *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II* , Tôhoku Math. J. , 13 (1961) , 281 - 294.
14. T a n n o, S. – *The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds* , Tôhoku Math. J., 21 (1969), 21 - 38.
15. V i d a l, E. , H e r v e l l a, L.M. – *New classes of almost Hermitian manifolds Tensor* , N. S. , 33 (1979) , 293 - 299.
16. W a t s o n, B. – *Almost Hermitian submersions* , J. Diff. Geometry, 11 (1976), 147 - 165.

Received:20.II.1991

Département de Mathématiques
Institut Supérieur Pédagogique
B.P. 282 Kananga
ZAIRE