4b. Ganguly, S., Bandyopadhyay, T. – *On θ - topological semigroup*, accepted for publication in the Bulletin of Calcutta Mathematical Society.
5. Hocking, J.G., Young, G.S. – *Topology*, Addision - Wesley Publishing Company, Inc., 1961.
6. Jankovic, D. – *On some separation axioms and θ - closure*, Matematicki Vesnik 4(17)(32), 1980, 439 - 449.
7. Joseph, J.E. – *On H - closed spaces*, Amer. Math. Soc., Vol.55, No.1, February, 1976, 223 - 226.
8. Paalman De Miranda, A.B. – *Topological Semigroups*, Matematisch Centrum, Amsterdam (1970).
9. Porter, J.F., Woods, R.G. – *Extensions and Absolutes of Hausdorff spaces*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1988.
10. Raghavan, T.G. – *θ - closed subsets of topological spaces*, Indian J. of Pure and Applied Math., 15(3), 233 - 240.
11. Velicko, N.V. – *H - closed topological spaces*, Mat. Sb. 70 (112) (1966), 98 - 112, Amer. Math. Society Transl. 78 (Series), 1969, pages 103 - 118.
12. Vermeer, J. – *Closed subspaces of H - closed spaces*, Pacific J. of Math., Vol. 118, No.1, 1985, 229 - 247.

Received:20.II.1992
Revised:25.IV.1994

Dept. of Pure Mathematics
University of Calcutta
35, Ballygunge Circular Road
Calcutta - 700 019.
INDIA

Dept. of Mathematics
St. Xavier's College
Calcutta - 700 016
INDIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matematica, 1994, f.2.

SUBMERSIONS METRIQUES PRESQUE DE CONTACT SUR LES NOUVELLES VARIETES DE KENMOTSU

PAR

T. TSHIKUNA - MATAMBA

0.Introduction. Cet article fait suite à notre précédente étude [10] dans laquelle nous n'avions considéré que les variétés dites de Kenmotsu [7] et presque de Kenmotsu [6] que l'on connaissait à l'époque. Avec la caractérisation de nouvelles classes de variétés de Kenmotsu [11], il y a lieu de dégager les propriétés qui en résultent eu égard à la théorie des submersions riemanniennes.

Un des problèmes classiques dans l'étude des submersions métriques presque de contact est d'établir une relation entre les êtres mathématiques définis sur l'espace total et leurs correspondants sur l'espace de base ou sur les fibres. Dans ce texte, nous avons examiné le cas du tenseur de courbure φ - sectionnelle holomorphe ainsi que celui de la structure de l'espace de base et des fibres. Comme principal résultat nous montré que

Si l'espace total d'une submersion métrique presque de contact est nearly de Kenmotsu, alors les fibres sont minimales et le tenseur de courbure φ -sectionnelle holomorphe est préservé sur les champs de vecteurs horizontaux.

Ce résultat est obtenu grâce à la φ - linéarité des tenseurs de configuration de O'Neill.

Dans tout ce texte, nous noterons par $\mathcal{X}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M. Les champs de vecteurs quelconques seront notés par D, E et G; ceux de la distribution horizontale seront notés par X, Y et Z tandis que les champs de vecteurs verticaux le seront par U, V et W.

1.Preliminaires. Soient (M, g, J) une variété presque hermitienne, ∇ la connexion de Levi - Civita associée à g et $\{E_1, ..., E_m, JE_1, ..., JE_m\}$ une J - base orthonormale locale d'un ouvert quelconque de M. La forme fondamentale Ω de M est définie par $\Omega(D, E) = g(D, JE); D, E \in \mathcal{X}(M)$

tandis que la codifférentielle $\delta\Omega$ est définie par

$$(1.1)\qquad \delta\Omega(D) = -\sum_{i=1}^{m}\{(\nabla_{E_i}\Omega)(E_i, D) + (\nabla_{JE_i}\Omega)(JE_i, D)\}.$$

De la classification de Gray - Hervella [5] des variétés presque hermitienes nous tirons les définitions des classes qui interviennent dans cette étude.

On dit qu'une variété preque hermitienne (M^{2m}, g, J) est:

(a) *nearly kählérienne* si $(\nabla_D\Omega)(D, E) = 0$;

(b) *quasi kählérienne* si $(\nabla_D\Omega)(E, G) + (\nabla_{JD}\Omega)(JE, G) = 0$;

(c) une W_3 - *variété* si $(\nabla_D\Omega)(E, G) - (\nabla_{JD}\Omega)(JE, G) = 0 = \delta\Omega$;

(d) une $W_1 \oplus W_3$ - *variété* si $(\nabla_D\Omega)(D, E) - (\nabla_{JD}\Omega)(JD, E) = 0 = \delta\Omega$;

(e) une $W_2 \oplus W_3-$ *variété* si

$$\sigma\{(\nabla_D\Omega)(E, G) - (\nabla_{JD}\Omega)(JE, G)\} = 0 = \delta\Omega,$$

dans laquelle σ désigne la some cyclique sur D, E et G;

(f) une $W_2 \oplus W_4$ - *variété* si

$$\sigma\{(\nabla_D\Omega)(E, G) - \frac{1}{m-1}\Omega(D, E)\delta\Omega(JG)\} = 0;$$

(g) une G_1 - *variété* si $(\nabla_D\Omega)(D, E) - (\nabla_{JD}\Omega)(JD, E) = 0$;

(h) une G_2 - *variété* si $\sigma\{(\nabla_D\Omega)(E, G) - (\nabla_{JD}\Omega)(JE, G)\} = 0$.

Considérons une variété métrique presque de contact $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$. On sait que la forme fondamentale Φ de M est définie par $\Phi(D, E) = g(D, \varphi E)$ tandis que une φ - base orthonormale locale d'un ouvert quelconque de M est $\{E_1, ..., E_m, \varphi E_1, ..., \varphi E_m, \xi\}$. La codifférentielle $\delta\Phi$ et la dérivée extérieure $d\eta$ sont définies respectivement par

$$(1.2)\qquad \delta\Phi(D) = -\sum_{i=1}^{m}\{\nabla_{E_i}\Phi)(E_i, D) + (\nabla_{\varphi E_i}(\varphi E_i, D)\} - (\nabla_\xi\Phi)(\xi, D),$$

$$(1.3)\qquad d\eta(D, E) = \frac{1}{2}\{D\eta(E) - E\eta(D) - \eta([D, E])\}.$$

Pour une étude détaillée des structures de contact, le lecteur peut se référer à la monographie de D.E. B l a i r [1]. Rappelons les définitions des classes qui nous intéressent dans ce papier et qui, du reste, ont déjà été

On dit qu'un variété métrique presque de contact est:

(a) *nearly de Kenmotsu* si $(\nabla_D\Phi)(D, E) = \eta(D)\Phi(E, D)$ et $d\eta = 0$;

(b) *semi - de Kenmotsu normale* si

$$(\nabla_D\Phi)(E, G) - (\nabla_{\varphi D}\Phi)(\varphi E, G) = \eta(E)\Phi(G, D)\text{et } d\eta = 0 = \delta\Phi;$$

(c) *quasi de Kenmotsu* si

$$(\nabla_D\Phi)(E, G) + (\nabla_{\varphi D}\Phi)(\varphi E, G) = \eta(E)\Phi(G, D) + 2\eta(G)\Phi(D, E)\text{et } d\eta = 0;$$

(d) G_1 - *de Kenmotsu* si

$$(\nabla_D\Phi)(D, E) - (\nabla_{\varphi D}\Phi)(\varphi D, E) = \eta(D)\Phi(E, D)\text{et } d\eta = 0;$$

(e) G_1 - *semi - de Kenmotsu* si elle est G_1 - de Kenmotsu et que $\delta\Phi = 0$;

(f) G_2 - *de Kenmotsu* si

$$\sigma\{(\nabla_D\Phi)(E, G) - (\nabla_{\varphi D}\Phi)(\varphi E, G)\} = \sigma\{\eta(D)\Phi(E, G)\}\text{et } d\eta = 0;$$

(g) G_2 - *semi - de Kenmotsu* si elle est G_2 - de Kenmotsu et que $\delta\Phi = 0$;

(h) *presque trans - de Kenmotsu* si

$$\sigma\{(\nabla_D\Phi)(E, G) - \frac{1}{m}\Phi(D, E)\delta\Phi(\varphi G)\} = 2\sigma\{\eta(D)\Phi(E, G)\}\text{et } d\eta = 0.$$

2.Submersions metriques presque de contact.

2.1.Généralités. Par submersion riemannienne, on entend une submersion $f : M \to B$ entre deux variété riemanniennes telle que $f_*/(Ker f_*)^\perp$ est une isométrie linéaire [8]. Pour un élément b de l'espace de base B, la sous variété $F_b = f^{-1}(b)$ de l'espace total M est appelée la fibre de la submersion au - dessus du point b. La fibré tangent T(M) de M admet une décomposition orthogonale $T(M) = V(M) \oplus H(M)$ dans laquelle V(M) désigne la distribution verticale tandis que H(M) est la distribution horizontale. Nous désignerons par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ la projection verticale et la projection horizontale de T(M) sur V(M) et sur H(M) respectivement.

Définition 2.1.1. *Soient $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ et $(M', g', \varphi', \xi', \eta')$ deux variétés métriques presque de contact. On appelle submersion métrique presque de contact de type* I, au sens de Watson [13], une submersion riemannienne $f : M \to M'$ telle que:

(i) $f_*\varphi E = \varphi' f_* E$, pour tout E de $x(M)$;

(ii) $f_*\xi = \xi'$.

Rappelons qu'indépendamment de Watson, D. Chinea [3] a également indroduit l'étude de ce type de submersions.

Proposition 2.1.2. (Watson). *Si $f : M \to M'$ est une submersion métrique presque de contact de type I, alors on a:*

(a) $f^*\eta' = \eta$;
(b) $f^*\Phi' = \Phi$;
(c) si $U \in V(M)$ *alors* $\varphi U \in V(M)$;
(d) *si* $X \in H(M)$ *alors* $\varphi X \in H(M)$;
(e) $\xi \in H(M)$;
(f) *si* $U \in V(M)$ *alors* $\eta(U) = 0$.

Démonstration. On peut consulter [9,10] ou [13].

Définition 2.1.3. *Soient $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact et (N, h, J) une variété presque hermitienne. On dit qu'une submersion riemannienne $f : M \to N$ est une submersion métrique presque de contact de type* II, au sens de Watson [13], si on a

$$f_*\varphi E = Jf_*, E, \text{pour tout } E \in x(M).$$

Proposition 2.1.4. (Watson). *Si $f : M \to N$ est une submersion métrique presque de contact de type* II, *alors on a:*

(a) $f^*\Omega = \Phi$;
(b) *si* $U \in V(M)$ *alors* $\varphi U \in V(M)$;
(c) *si* $X \in H(M)$ *alors* $\varphi X \in H(M)$;
(d) $\xi \in Kerf_*$;
(e) *si* $X \in H(M)$ *alors* $\eta(X) = 0$.

Démonstration. On peut également consulter [9,10] ou [13].

Par la suite, nous désignerons l'espace de base par B quel que soit le type de la submersion. Rappelons que pour une submersion riemannienne $f : M \to B$, on dit qu'un champ de vectors X de M est *basique* si X est horizontal et qu'il correspond par f à un champ de vecteurs de B.

Signalons que le terme basique n'a aucune référence à une quelconque base de M ou de B et nous noterons par $X_* = f_*X$.

2.2. Propriétés des tenseurs de O'Neill. Sur l'espace total d'une submersion riemennienne, B. O'Neill [8] a défini deux tenseurs de configuration T et A en posant

$$T_D E = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}D}\mathcal{V}E + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}D}\mathcal{H}E,$$
$$A_D E = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}D}\mathcal{H}E + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}D}\mathcal{V}E.$$

Les propriétés fondamentales de ces tenseurs sont établis dans l'article précisé de O'Neill. Rappelons que l'on a:

$$T_X D = 0 \text{ et } A_U D = 0: \tag{2.1}$$

$$T_U V = T_V U \text{ et } A_X Y = -A_Y X; \tag{2.2}$$

$$g(T_U D, E) = -g(D, T_U E) \text{ et } g(A_X D, E) = -g(D, A_X E). \tag{2.3}$$

Soit S un tenseur de type (1.2) sur une variété métrique presque de contact. On dit que S est:

(a) φ - linéaire en la premiére variable si $S_{\varphi D}E = \varphi S_D E$;
(b) φ - linéaire en la seconds variable si $S_D\varphi E = \varphi S_D E$.

Pour ce qui est des tenseurs T et A, nous avons montré que sur une distribution donée, la φ - linéarité en l'une des variables entraîne la φ - linéarité en l'autre [12].

Lemme 2.2.1. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact. Si $T_U\varphi X = \varphi T_U X$ (resp. $A_{\varphi X}U = \varphi A_X U$) alors $T_U\varphi V = \varphi T_U V$ (resp. $A_{\varphi X}Y = \varphi A_X Y$).*

Démonstration. Si $T_U\varphi X = \varphi T_U X$ alors $g(T_U\varphi X, V) = g(\varphi T_U X, V)$; mais $g(T_U\varphi X, V) = -g(\varphi X, T_U V) = g(X, \varphi T_U V)$ et $g(\varphi T_U X, V) = g(X, T_U\varphi V)$. On obtient $g(X, T_U\varphi V) = g(X, \varphi T_U V)$, ce qui implique que $T_U\varphi V = \varphi T_U V$.

De manière analogue, comme $A_{\varphi X}U = \varphi A_X U$ alors $g(A_{\varphi X}U, Y) = g(\varphi A_X U, Y)$. Par ailleurs, $g(A_{\varphi X}U, Y) = -g(U, A_{\varphi X}Y)$ et $g(\varphi A_X U, Y) = -g(U, \varphi A_X Y)$; ce qui donne $g(U, A_{\varphi X}Y) = g(U, \varphi A_X Y)$ dont on déduit $A_{\varphi X}Y = \varphi A_X Y$.

Proposition 2.2.2. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact. Si M est nearly de Kenmotsu, alors on a:*

(a) $T_U\varphi U = \varphi T_U U$;
(b) $T_\xi \xi = 0$;
(c) $A_X\varphi X = 0$;
(d) $A_\xi \xi = 0$;

Démonstration. (a) Comme M est nearly de Kenmotsu, alors on a

$$(\nabla_U\varphi)U = -\eta(U)\varphi U. \tag{2.4}$$

Dans le cas d'une submersion de type I, on sait que $\eta(U) = 0$ de telle sorte que la relation (2.4) devient $(\nabla_U\varphi)U = 0$ dont la projection horizontale donne $T_U\varphi U = \varphi T_U U$.

Lorsque f est une submersion de type II, la projection horizontale de (2.4) donne également $(\nabla_U\varphi)U = 0$ car φU est certical. On aboutit à la même conclusion.

Pour ce qui est de l'assertion (b), si f est une submersion de type I, on sait que ξ est horizontal. Dans ce cas $T_\xi\xi = 0$ par application de la relation (2.1). Au cas où f est une submersion de type II, on a $(\nabla_\xi\varphi)\xi = 0$ dont on

déduit $\nabla_\xi \xi = 0$ car $\varphi\xi = 0$. Comme ξ est vertical, la projection horizontale de la relation $\nabla_\xi \xi = 0$ donne $T_\xi \xi = 0$.

Examinons le cas de l'assertion (c). Comme pour la relation (2.4), il est clair que l'on a

$$(\nabla_X \varphi)X = -\eta(X)\varphi X. \tag{2.5}$$

Si f est une submersion de type I, et comme φX est horizontal, la projection verticale de (2.5) donne $\mathcal{V}(\nabla_X\varphi)X = 0$ dont on déduit $A_X\varphi X = \varphi A_X X$ et par application de (2.2) on aboutit à $A_X\varphi X = 0$. En cas d'une submersion de type II, on a $(\nabla_X\varphi)X = 0$ car $\eta(X) = 0$ et on en déduit $A_X\varphi X = 0$.

(d) Dans le cas d'une submersion de type I, on a $(\nabla_\xi\varphi)\xi = 0$ comme ci - dessus et qui donne $\nabla_\xi\xi = 0$. Etant donné que ξ est horizontal, la projection verticale de $\nabla_\xi\xi = 0$ donne $A_\xi\xi = 0$. Si f est une submersion de type II, an sait que ξ est vertical; par application de la relation (2.1) on voit que $A_\xi\xi = 0$.

Théorème 2.2.3. *Si l'espace total d'une submersion métrique presque de contact est nearly de Kenmotsu, alors les fibres sont minimales.*

Démonstration. Comme cela avait été annoncé par les théorémes 2.5 et 3.4 dans [10] et établi dans [12], les fibres d'une submersion métrique presque de contact sont minimales lorsque $T_U\varphi U = \varphi T_U U$. Cette condition étant réalisée par la proposition 2.2.2. (a), la preuve en découle.

2.3. Tenseurs de courbure sectionnelle. Soient $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ une variété métrique presque de contact, D est E deux champs de vecteurs sur M tels que $\eta(D) = 0 = \eta(E)$. En notant par R le tenseur de courbure riemannienne sur M, la courbure φ - bisectionelle holomorphe B_φ est défini dans [2] et [13] par

$$B_\varphi(D, E) = \|D\|^{-2}\|E\|^{-2}g(R(D, \varphi D)E, \varphi E).$$

Lorsqu'on fait $D = E$, alors on obtient *la courbure φ - sectionnelle holomorphe H_φ* défini par

$$H_\varphi(E) = B_\varphi(E, E) = \|E\|^{-4}g(RE, \varphi E)E, \varphi E).$$

Nous noterons par $\hat{B}_\varphi$ et $\hat{H}_\varphi$ les restrictions de ces tenseurs sur les fibres tandis que sur l'espace de base nous les noterons par $B'_{\varphi'}$ et $H'_{\varphi'}$ respectivement.

Théorème 2.3.1.(Watson) *Les courbures sectionnelles d'une submersion métrique presque de contact sont de la forme:*

(a) $B_\varphi(U, V) = \hat{B}_\varphi(U, V) + \|U\|^{-2}\|V\|^{-2}\{g(T_U\varphi V, T_{\varphi U}V) - g(T_U V, T_{\varphi U}\varphi V)\}$;

(b) $B_\varphi(X, Y) = B'_{\varphi'}(X_*, Y_*) - \|X\|^{-2}\|Y\|^{-2}\{g(A_X\varphi X, A_Y\varphi Y) - g(A_{\varphi X}Y, A_X\varphi Y) + g(A_X Y, A_{\varphi X}\varphi Y)\}$;

(c) $H_\varphi(U) = \hat{H}_\varphi(U) + \|U\|^{-4}\{\|T_U\varphi U\|^2 - g(T_U U, T_{\varphi U}\varphi U)\}$;

(d) $H_\varphi(X) = H'_{\varphi'}(X_*) - 3\|X\|^{-4}\|A_{X\varphi}X\|^2$.

Démonstration. On peut se reporter à [13].

Lemme 2.3.2. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact.. Si $T_U\varphi V = \varphi T_U V$ alors*

(a) $B_\varphi(U, V) = \hat{B}_\varphi(U, V) + 2\|U\|^{-2}\|V\|^{-2}\|T_U V\|^2$, *et*

(b) $H_\varphi(U) = \hat{B}_\varphi(U) + 2\|U\|^{-4}\|T_U U\|^2$;

Si $A_X\varphi Y = \varphi A_X Y$, alors

(c) $B_\varphi(X, Y) = B'_{\varphi'}(X_*, Y_*)$, *et*

(d) $H_\varphi(X) = H'_{\varphi'}(X_*)$.

Démonstration. Si $T_U\varphi V = \varphi T_U V$ alors $T_{\varphi U}\varphi V = -T_U V$; ce qui permet d'établir (a) dont (b) est une conséquence.

De manière analogue si $A_X\varphi Y = \varphi A_X Y$ alors $A_{\varphi X}\varphi Y = -A_Y X$; ceci donne $A_X\varphi Y = A_{\varphi X}Y$ dont on tire $A_X\varphi X = 0$ et qui établit (d).

Etant donné que $A_{\varphi X}Y = \varphi A_X Y$, alors on a

$$g(A_{\varphi X}Y, A_X\varphi Y = g(\varphi A_X Y, \varphi A_X Y) = -g(A_X Y, \varphi^2 A_X Y),$$

or $\varphi^2 A_X Y = -A_X Y + \eta(A_X Y)\xi$; comme $A_X\xi = 0$ alors $\eta(A_X Y) = 0$.

Des lors $g(A_{\varphi X}Y, A_X\varphi Y) = \|A_X Y\|^2$. De même on a $g(A_X Y, A_{\varphi X}\varphi Y) = -g(A_X Y, A_X Y)$, ce qui permet d'établir (c).

Théorème 2.3.3. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact. Si M est nearly de Kenmotsu, alors on a:*

(a) $B_\varphi(U, V) = \hat{B}_\varphi(U, V) + 2\|U\|^{-2}\|V\|^{-2}\|T_U V\|^2$,

(b) $H_\varphi(U) = \hat{B}_\varphi(U) + 2\|U\|^{-4}\|T_U U\|^2$;

(c) $H_\varphi(X) = H'_{\varphi'}(X_*)$.

Démonstration. Il suffit de combiner la proposition 2.2.2. et le lemme 2.3.2.

2.4. Structure de l'espace de base et des fibres. Dans ce paragraphe, nous examinons le problème du transfert de la structure de l'espace total à l'espace de base et les différentes classes auxquelles peuvent appartenir les fibres d'une submersion de type I.

Théorème 2.4.1. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact de type I. Si M est nearly de Kenmotsu, quassi de Kenmotsu, G_1 - de Kenmotsu ou G_2 - de Kenmotsu, alors B est respectivement nearly de Kenmotsu, quasi de Kenmotsu, G_1 - de Kenmotsu ou G_2 - de Kenmotsu.*

Démonstration. Considérons le cas où M est nearly de Kenmotsu. Soient X et Y basiques; montrons que l'espace de base possède la structure

nearly de Kenmotsu. En effet, on sait que

$$(\nabla'_{X_*}O')(X_*,Y_*) = g'(Y_*,(\nabla'_{X_*}\varphi')X_*) = g'(f_*Y, f_*(\nabla_X\varphi)X) =$$
$$= f^*g'(Y,(\nabla_X\varphi)X);$$

Comme f est une submersion riemannienne, $f^*g' = g$ et de ce fait,

$$f^*g'(Y,(\nabla_X\varphi)(X) = g(Y,(\nabla_X\varphi)X) = (\nabla_X\Phi)(X,Y);$$

ce qui donne $(\nabla'_{X_*}\Phi')(X_*,Y_*) = (\nabla_X\Phi)(X,Y)$. Par ailleurs, $f^*\eta' = \eta$ et $f^*\Phi' = \Phi$ permettent de tirer que $\eta'(X_*)\Phi'(Y_*,X_*) = \eta(X)\Phi(Y,X)$.

Etant donné que $(\nabla_X\Phi)(X,Y) = \eta(X)\Phi(Y,X)$ alors on a $(\nabla'_{X_*}\Phi')(X_*,Y_*) = \eta'(X_*)\Phi'(Y_*,X_*)$. De plus $f^*\eta' = \eta$ implique que $f^*d\eta' = d\eta$ et comme $d\eta = 0$ alors $d\eta' = 0$. On voit que l'espace de base est défini par $(\nabla'_{X_*}\Phi')(X_*,Y_*) = \eta'(X_*)\Phi'(Y_*,X_*)$ et $d\eta' = 0$; ce qui définit la structure nearly de Kenmotsu.

Les autres cas sont établis de manière analogue.

Utilisant le tenseur A de O'Neill, D. C h i n e a [4] a défini un autre tenseur A^* sur les schamps de vesteurs horizontaux en posant

$$A^*(X,Y) = A_X\varphi Y - A_{\varphi X}Y,$$

et a établi les équations suiantes pour une submersion métrique presque de contact.

$$\delta\Phi(U) = \delta\hat{\Phi}(U) + \frac{1}{2}g(trA^*,U); \tag{2.6}$$

$$\delta\Phi(X) = g(H,\varphi X) + \delta\Phi'(X_*), \tag{2.7}$$

dans laquelle H désigne la courbure moyenne des fibres.

L'importance de ces équations apparait dans l'étude des submersions dont l'espace total est défini au moyen de la codifférentielle de la forme fondamentale. C'est notamment le cas du

Théorème 2.4.2. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact de type I. Si M est G_1 semi de Kenmotsu, G_2 semi - de Kenmotsu, semi - de Kenmotsu normale ou presque trans de Kenmotsu, alors B est respectivement G_1 semi - de Kenmotsu, G_2 semi - de Kenmotsu, semi - de Kenmotsu normale ou presque trans de Kenmotsu si et seulement si les fibres sont minimales.*

Démonstration. Toutes les variétés considérées dans ce théorème sont définies au moyen de la codifférentielle $\delta\Phi$. Par l'equation (2.7), on voit

que $\delta\Phi = \delta\Phi'$ si et seulement si $H = 0$; mais $H = 0$ si et seulement si les fibres sont minimales.

Les autres relations de définition de l'espace de base sont établies comme dans le théorème précédent.

Théorème 2.4.3. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact de type I.*

Si M est	*alors les fibres sont*
(a) nearly de Kenmotsu	*(a) nearly kähleriennes;*
(b) quasi de Kenmotsu	*(b) quasi kähleriennes;*
(c) G_1 -de Kenmotsu	*(c) des G_1 -variétés;*
(d) G_2 -de Kenmotsu	*(d) des G_2 -variétés;*

Démonstration. Soient U, V et W trois champs de vecteurs tangents aux fibres. Si M est quasi de Kenmotsu, le fait que η s'annule sur les champs de vecteurs verticaux conduit à

$$(\hat{\nabla}_U\hat{\Phi})(V,W) + (\hat{\nabla}_{\varphi U}\hat{\Phi})(\hat{\Phi}V,W) = 0,$$

qui est la relation de définition d'une variété quasi kählerienne.

Moyennant les relations de définition, on établit les autres cas par le même raisonnement.

Théorème 2.4.4. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact de type I. Si M est G_1 - semi de Kenmotsu, G_2 - semi de Kenmotsu, semi - de Kenmotsu normale ou presque trans de Kenmotsu, alors les fibres sont respectivement des $W_1 \oplus W_3, W_2 \oplus W_3, W_3$ ou des $W_2 \oplus W_4$ variétés si et seulement si $trA^* = 0$.*

Démonstration. Comme dans le cas du théorème 2.4.2. il est surtout question de montrer que $\delta\Phi(U) = \delta\hat{\Phi}(U)$ ou $\delta\Phi = \delta\hat{\Phi} = 0$. Ce qui ne peut se réaliser que si $trA^* = 0$ au regard de l'equation (2.6).

Théorème 2.4.5. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact de type II.*

Si M est	*alors B est*
(a) nearly de Kenmotsu	*(a) nearly kählerienne;*
(b) quasi de Kenmotsu	*(b) quasi kählerienne;*
(c) G_1 -de Kenmotsu	*(c) une G_1 -variété;*
(d) G_2 -de Kenmotsu	*(d) une G_2 -variété;*

Démonstration. Analogue à celle du théorème 2.4.3.

Théorème 2.4.6. *Soit $f : M \to B$ une submersion métrique presque de contact de type II. Si M est G_1 - semi de Kenmotsu, G_2 - semi de Kenmotsu, semi - de Kenmotsu normale ou presque trans de Kenmotsu, alors B est respectivement une $W_1 \oplus W_3, W_2 \oplus W_3, W_3$ ou une $W_2 \oplus W_4$ variété si et seulement si les fibres sont minimales.*

Démonstration. Analogue à celle du théorème 2.4.2.

REFERENCES

1. B l a i r, D.E. – *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math., 509 (1976), Springer.
2. C h i n e a, D. – *Quasi - K - cosymplectic submersions*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 33 (1984), 319 - 330.
3. C h i n e a, D. – *Almost contact metric submersions*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 34 (1985), 89 - 104.
4. C h i n e a, D. – *Almost contact metric submersions and stucture equations*, Publicationes Mathematicae, 34 (1987), 207 - 213.
5. G r a y, A., H e r v e l l a, L.M. – *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Pura Appl., 123 (1980), 35 - 58.
6. J a n s s e n a, D., V a n h e c k e, L. – *Almost contact structures and curvature tensors*, Kodai Math., 4 (1981), 1 - 27.
7. K e n m o t s u, K. – *A class of almost conatct Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J., 24 (1972), 93 - 103.
8. O' N e i l l, B. – *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459 - 469.
9. T s h i k u n a - M a t a m b a, T. – *Quelques classes des submersions métriques presque de contact*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 35 (1990), 705 - 721.
10. T s h i k u n a - M a t a m b a, T. – *Submersions métriques presque de contact dont l'espace total est une variété de Kenmotsu*, An. St. Univ. "Al. I. Cuza", 37 (1991), 197 - 206.
11. T s h i k u n a - M a t a m b a, T. – *Nouvelles classes de variétés de Kenmotsu*, An. Sti. Univ. "Al.I.Cuza", 38 (1992), à paraitre.
12. T s h i k u n a - M a t a m b a, T. – *On the φ - linearity of the configuration tensors of an almost contact metric submersion*, à l'étude.
13. W a t s o n, B. – *The differential geometry of two types of almost contact metric submersions*, The Math. Heritage of C.F. Gauss, Ed. G.M. Rassias, World Scientific Pub. Co., Singapore 1990.

Received:5.IV.1993
Revised:3.I.1994

Département de Mathématiques
Institut Supérieur Pédagogique
B.P. 282 - Kananga
ZAIRE

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA' IASI
Tomul XL, s.I.a, Matematică, 1994, f.2.

ON CERTAIN AKTIVIS ALGEBRA

BY

A.R.T. SOLARIN

Introduction. In Lie theory , the torsion T associates with two left invariant vector fields X and Y their Lie bracket $T(X,Y) = -[X,Y]$ and the curvature R vanishes identically. These matters are familiar and emerge already in a local theory dealing with differential geometric aspect of Lie theory. The "non - associative" (local) Lie groups are called (local) Lie loops or analytical (local) loops. Lie loops have attracted the attention of authors like M a l c e v [9], S a g l e [11], K u z m i n [8], H o f m a n n and S t r a m b a c h [7], A k t i v i s [1], S a b i n i n and M i k h e e v [10].

Associated with a (local) Lie loop G is a tengent algebra $L(a) = T_e(a)$ which carries a bilinear anticommutative multiplication $(x,y) \to [x,y]$, called the commutator bracket and a trilinear operation $(x,y,z) \to$ $\to < x,y,z >$ called associator bracket vanishing identically in the case of a (local) Lie group. The two operations are linked by the Aktivis identity

$$(1) \qquad \Sigma\{\mathrm{sgn}(\sigma)\ \sigma < x,y,z >: \sigma \in S_3\} = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$$

We call an algebra with a binary and a ternary multiplication satisfying (1) an Aktivis Algebra. In particular the tangent algebra of a (local) Lie loop is an Aktivis Algebra.

In our study of some Bol - Moufang type identities we found that algebras satisfying some of these identities will satisfy a modification of the definition of the Aktivis algebra under their natural operations.

Definition 1.1. *An algebra E over a field F is called anticommutative iff $x^2 = 0\ \forall x \in E$ (implying $xy = -yx\ \forall x,y \in E$).*

Definition 1.2. *A Lie triple algebra is a vector space together with an anticommutative binary operation*