Therefore we get

$$S(V,V) = 2h^2, \tag{4.6}$$

where $h := < \mu, JV >$. Since S is parallel, we have

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X S)(V,V) = \nabla_X S(V,V) - 2S(\nabla_X V, V) = \\ &= 2h\{2Xh - S(JX,V)\} = 2h\{2Xh - < R(JX,X)X, V >\} = \\ &= 2h\{2Xh - < \tilde{R}(JX,X)JX, JV >\} = \\ &= 2h\{2Xh + < \nabla^{\perp}_X \mu, JV >\} = 6h(Xh). \end{aligned}$$

and

$$h((JX)h) = 0. \tag{4.8}$$

From (4.4), (4.7) and (4.8), h is constant. Therefore the mean curvature μ is parallel by virtue of (4.3).

The following corollary is proved by the same way as Theorem 5 in Sec.3.

Corollary 7. *Let M be a 3 -dimensional totally umbilical proper CR - submanifold in a Kaehlerian manifold $\tilde{M}$. If the Ricci tensor of M is parallel, then M is one of the following:*

(1) M is an extrinsic sphere admitting homothetic Sasakian structure.

(2) M is totally geodesic and locally the Riemannian product of a holomorphic surface and a totally real curvature in $\tilde{M}$.

REFERENCES

1. B e j a n c u, A. – *Geometry of CR - submanifolds*, D. Reidel Publishing Company, 1986.
2. D e s h m u k h, S., H u s a i n, S.I. – *Totally umbilical CR -submanifolds of a Kaehler manifold*, Kodai Math. J. 9 (1986), 425 - 429.
3. H a s e g a w a, I., A b e, T., O k u y a m a, Y., S a t o, K. – *Totally umbilical submanifolds in Sasakian manifolds*, J. Hokkaido Univ. Ed. (Sect. A) 38 (1988), 39 - 48.
4. H a s e g a w a, I., A b e, T. – *Totally contact umbilical submanifolds in Sasakian manifolds*, J. Hokkaido Univ. Ed. (Sect. A) 39 (1988), 1 - 8.
5. Y a m a g u c h i, S., N e m o t o, H., K a w a b a t a, N. – *Extrinsic spheres ina Kähler manifold*, Michigan Math. J. 31 (1984), 15 - 19

Received:4.II.1994

Mathematics Laboratory, Sapporo campus
Hokkaido University of Education
Sapporo 002

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matematică, 1994, f2.

ZUR FINITE UND RANDELEMENTE - APPROXIMATION ZWEIDIMENSIONALER TRANSSONISCHER TRAGFLÜGELUMSTRÖMUNGEN

VON

CRISTIAN COCLICI und WOLFGANG WENDLAND

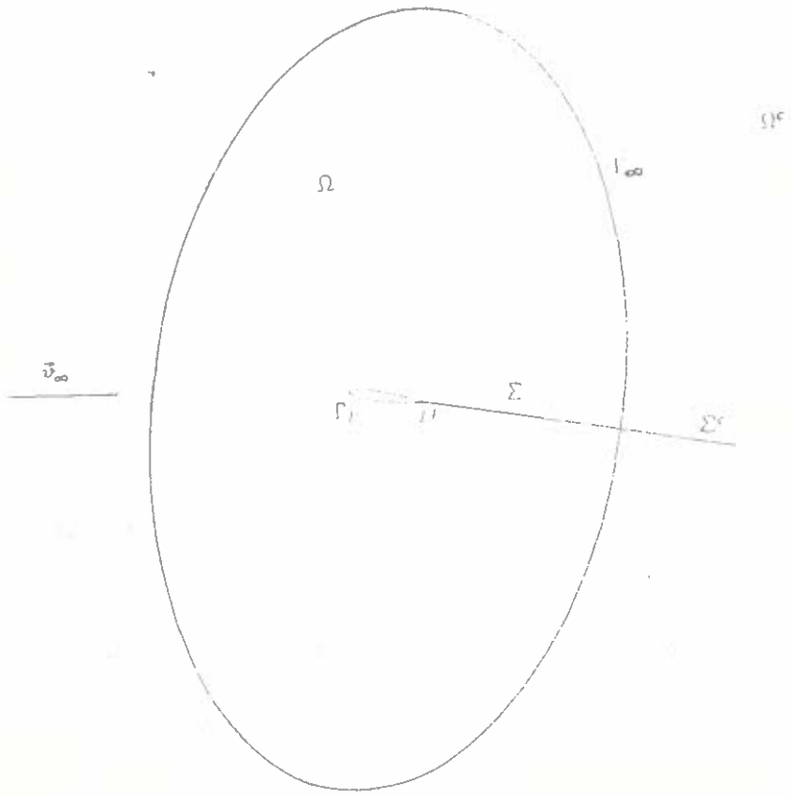
1.Problemdarstellung. 1.1.Das Randwertproblem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, das die einfach zusammenhängende Sektion Ω_P eines Tragflügels umfaßt. Der Rand von Ω besteht aus drei Teilen:

$$\partial\Omega = \Gamma_\infty \cup \Gamma_P \cup \Sigma,$$

wobei:

- die Kurve Γ_∞ ist ein C^∞ künstlicher äußerer Rand von Ω, welches eingeführt wird um ein beschränktes Rechengebiet zu erhalten;
- die Kurve Γ_P ist der gemeinsame Rand zwischen Ω und Ω_P; er besitzt ein Eckpunkt (Trailing Edge; Hinterpunkt) und ist eine C^∞ - Kurve sonst;
- Σ bezeichnet einen Schlitz in Ω, der den Hinterpunkt mit Γ_∞ verbindet.

Mit Σ^c bezeichnen wir die Fortsetzung des Schlitzes Σ in Ω^c. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nehmen wir an, daß die Fernfeldgeschwindigkeit $\bar{v}_\infty$ parallel zur x - Achse ist.



Betrachtet wird eine ebene, stationäre, kompressible, reibungsfreie Strömung eines idealen Gases. Nehmen wir an, daß die Strömung isoenergetisch und homentrop ist. Wegen der Homentropie der ebenen Strömung und dem Crocco'schen Wirbelsatz folgt, daß die Strömung rotationsfrei ist. Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ besitzt also ein *scalares Potential* $u : \mathbb{R}^2 \backslash \Omega_P \to \mathbb{R}$, *mit*

(1) $$\vec{v} = grad\ u \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega_p.$$

Die Strömung wird durch die **volle Potentialgleichung**:

(2) $$div\ (\rho(|\nabla u|^2)\nabla u) = 0$$

modelliert. Diese Gleichung wird aus den Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen abgeleitet. Die Dichtefunktion $\rho(s)$ ist durch

(3) $$\rho(|\nabla u|^2) = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_0^2}|\nabla u|^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

gegeben, wobei ρ_0 und a_0^2 die Dichte, bzw. die Schallgeschwindigkeit des Gases im Ruhezustand bezeichnen und $\gamma > 1$ der Faktor der Wärmekapazitäten ist. Die *Machzahl* in einem Punkt $x \in \Omega_p^c$ ist durch

(4) $$M(x) = \frac{|\nabla u(x)|}{a}$$

definiert, wobei a die *lokale Schallgeschwindigkeit* ist. Diese Funktion ist durch

$$a(|\nabla u|^2) = \sqrt{a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}|\nabla u|^2}$$

gegeben. Analog definieren wir die *Machzahl im Unendlichen* durch:

(5) $$M_\infty := \frac{|\vec{v}_\infty|}{a(|\vec{v}_\infty|^2)} = \frac{|\vec{v}_\infty|}{\sqrt{a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}|\vec{v}_\infty|^2}}.$$

Um eine Strömung mit Zirkulation und Auftrieb behadeln zu können, wird ein Schlitz eingeführt. Es wird angenommen, daß über dem Schlitz das Geschwindigkeitsfeld ∇u stetig ist und gleichzeitig das Potential u einen konstanten Sprung $\beta \in \mathbb{R}$ besitzt. Also

(6) $$u^+ - u^- = \beta \text{ und } \partial_n u^+ - \partial_n u^- = 0 \text{ auf } \Sigma.$$

Hier bezeichnen $\partial_n u = \nabla u \cdot \vec{n}$ die normale Ableitung und u^+, u^- die einseitigen Werte des Potentials auf Σ. Die Konstante β ist eine neue Unbekannte und gibt die Zirkulation der Strömung an. Wir haben

$$-\beta = u^- - u^+ = \int_{\Gamma_1} \vec{v}(x) ds_x = \text{Zirkulation},$$

wobei Γ_1 als beliebige abgeschlossene Kurve, die Ω_P umfaßt, betrachtet wird. Die Zirkulation (also der Sprung β) muß so bestimmt werden, daß die *Kutta - Joukowskische* Bedingung:

die Geschwindigkeit an der Hinterkante soll endlich bleiben

erfüllt ist. Diese physikalische Bedingung (äquivalent: der Hinterpunkt befindet sich im Unterschallgebiet) impliziert die Bedingung auf β :

(7) $$F(\beta) := |\nabla u^+|^2_{TE} - |\nabla u^-|^2_{TE} = 0$$

die in der A r b e i t [2] behandelt ist.

Auf dem Profil Γ_P stellen wir die homogene Neumannsche Bedingung der Undurchlässigkeit:

$$\partial_n u = 0 \text{ auf } \Gamma_P. \tag{8}$$

Zur Vollständigkeit brauchen wir noch eine Randbedingung auf Γ_∞. Es wird im allgemeinen angenommen, daß eine sinnvolle Randbedingung für äußere Strömungen die Voraussetzung ist, daß die Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegen $\vec{v}_\infty$ im Fernfeld konvergiert. Eine erste Bedingung ist die folgende Massenfluxbedingung:

$$\rho(|\nabla u|^2)\partial_n u(x) = \rho(|\vec{v}_\infty|^2)\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}(x), \quad x \in \Gamma_\infty, \tag{9}$$

welche in [3] benuntzt wurde.

Weiterhin definieren wir *das Störungspotential* $\varphi : \Omega^c \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x_1, x_2) := u(x_1, x_2) - \Psi(x, \beta) \tag{10}$$

wobei

$$\Psi(x, \beta) := \vec{v}_\infty \cdot \vec{x} + \frac{\beta}{2\pi}[2\pi - arg\ x]. \tag{11}$$

Mit der Annahme daß im Fernfeld die zweite Komponente der Geschwindigkeit verschwindet, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \text{ in } \Omega^c$$

erhalten wir aus der Gleichung (2) die *Prandtl – Glauert Linearisierung* für das Störungspotential

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2} = 0 \text{ in } \Omega^c. \tag{12}$$

Es wird angenommen, daß die Störgeschwindigkeit entlang Σ^c stetig ist und im Unendlichen verschwindet. Aus der Definition von φ und der Sprungbedingung des Potentials u auf Σ folgt die Stetigkeit von φ auf Σ^c. Somit muß φ die zusätzlichen Bedingungen

$$\begin{cases} \nabla\varphi \to 0 \text{ fur } |x| \to \infty, \\ \varphi^+ - \varphi^- = 0 \text{ auf } \Sigma^c, \\ \partial_n\varphi^+ - \partial_n\varphi^- = 0 \text{ auf } \Sigma^c, \end{cases} \tag{13}$$

erfüllen.

Als Transmisionsbedingungen für die Kopplung von u mit φ stehen die Definition von φ aus (10) zusammen mit der Stetigkeit von u über Γ_∞ und der Massenfluxbedingung:

$$\begin{aligned} \rho(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \vec{n}(x) = \rho(|\vec{v}_\infty|^2)\Big\{ & \nabla\Psi \cdot \vec{n}(x) + \\ & + \begin{pmatrix} (1 - M_\infty^2)\varphi_{x_1} \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1(x) \\ n_2(x) \end{pmatrix} \Big\} \end{aligned} \tag{14}$$

auf Γ_∞.

Damit ist das gekoppelte Randwertproblem:

Finde die Funktionen u, φ in geeigneten Funktionenräumen und die Konstante $\beta \in \mathbb{R}$ so, daß:

Inneres volles Potentialsproblem:

$$\begin{cases} div\ (\rho(|\nabla u|^2)\nabla u) & = 0 \text{ in } \Omega, \\ \partial_n u & = 0 \text{ auf } \Gamma_p, \\ u^+ - u^- & = \beta \text{ auf } \Sigma, \\ \partial_n u^+ - \partial_n u^- & = 0 \text{ auf } \Sigma, \\ F(\beta) = |\nabla u^+|^2_{TE} - |\nabla u^-|^2_{TE} & = 0; \end{cases} \tag{15}$$

Äußeres Prandtl - Glauert Problem:

$$\begin{cases} (1 - M_\infty^2)\varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2} = 0 \text{ in } \Omega^c, \\ \nabla\varphi \to 0 \text{ fur } |x| \to \infty, \\ \varphi^+ - \varphi^- = \beta \text{ auf } \Sigma^c, \\ \partial_n\varphi^+ - \partial_n\varphi^- = 0 \text{ auf } \Sigma^c; \end{cases} \tag{16}$$

Kopplungsbedingungen:

$$u = \varphi + \Psi \text{ auf } \Gamma_\infty \text{ und} \tag{17}$$

$$\rho(|\nabla u|^2)\partial_n u = \rho(|\vec{v}_\infty|^2)\{\nabla\Psi \cdot \vec{n} + ((1 - M_\infty^2)\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}) \cdot \vec{n}\} \text{ auf } \Gamma_\infty. \tag{18}$$

Mit Hilfe der Greenschen Dartellungsformel reduziert sich die lineare partielle Differentialgleichung (12) zu einer Fredholmscher Randintegralgleichung erster Art auf Γ_∞. Die Idee besteht darin, die nichtlineare volle Potentialgleichung, zusammen mit der Randintegralgleichung, als Fernfeldrandbedingung auf Γ_∞ zu analysieren. Diese Ideen führen zu einem numerischen Verfahren das die Finite Element Methode in Ω mit der Randelementmethode auf Γ_∞ koppelt.

1.2. Schwache Formulierung des Problems.

Seien $W^{s,p}$ und $W^{s,p}(\Gamma_\infty)$, $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,\infty)$ die gewöhnlichen Sobolev Räume auf Ω, bzw. Γ_∞, mit den Normen $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$, bzw. $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Gamma_\infty)}$. Wir definieren $\langle .,. \rangle$ als Dualitätsprodukt zwischen $H^s(\Gamma_\infty) := W^{s,2}(\Gamma_\infty)$ und dem Dualraum $H^{-s}(\Gamma_\infty)$

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\Gamma_\infty} \varphi(s)\psi(s)ds. \tag{19}$$

für alle $(\varphi,\psi) \in H^s(\Gamma_\infty) \times H^{-s}(\Gamma_\infty)$, und füren die folgenden Räume ein:

$$\begin{cases} V := \{v \in W^{1,2}(\Omega) | v^+ - v^- = \beta \ auf \ \Sigma, \beta \in \mathbb{R}\}, \\ V^0 := \{v \in W^{1,2}(\Omega) | v^+ - v^- = 0 \ auf \ \Sigma, \}, \\ H := \{\psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) | \int_{\Gamma_\infty} \psi(x)ds_x = 0\}, \end{cases} \tag{20}$$

Für $s_0 < \frac{2a_0^2}{\gamma-1}$ sei

$$K_{s_0} := \{v \in V | \ |\nabla v|^2 \le s_0 \text{ f.ü. in } \Omega\} \tag{21}$$

die Menge der Zulässigen Funktionen.

Nach der Multiplikation der Gleichung (2) mit einer beliebigen Testfunktion $v \in V^0$ und anschließenden Integration über Ω folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega div(\rho(|\nabla u|^2)\nabla u) \cdot v dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \rho(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \vec{n}(x) v(x) ds_x - \int_\Omega \rho(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \nabla v dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \rho(|\nabla u|^2)\partial_n u(x) v(x) ds_x - a(u|u,v), \end{aligned}$$

wobei die nichtlineare Form $a : K_{s_0} \times V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$a(u|v,w) := \int_\Omega \rho(|\nabla u|^2)\nabla v \cdot \nabla w dx \tag{22}$$

definiert ist. Wegen der Transmisionsbedingung (9) ergibt sich *schwache Formulierung des inneren Problems*:

Finde $u \in K_{s_0}$ so, daß

$$\begin{aligned} a(u|u,v) - \int_{\Gamma_\infty} \rho(|\vec{v}_\infty|^2) \begin{pmatrix} (1-M_\infty^2)\varphi_{x_1} \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(x) \\ n_2(x) \end{pmatrix} \cdot v(x) ds_x = \\ = \rho(|\vec{v}_\infty|^2) \int_\Omega \nabla\Psi(\cdot,\beta) \cdot \vec{n}(x) v(x) ds_x, \quad \forall v \in V^0. \end{aligned} \tag{23}$$

Für eine genügend glatte Funktion φ, welche (12) und (13) erfüllt und gleichzeitig logarithmisches Verhalten aufweißt:

$$\varphi(x) = \frac{\beta}{2\pi} \log \left| \begin{pmatrix} \frac{x_1-y_1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2}\varphi_\infty + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty \tag{24}$$

folgt, mit dem Greenschen Darstellungssatz

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \int_{\Gamma_\infty} \frac{1}{2\pi} \log \left| \begin{pmatrix} \frac{x_1-y_1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} (1-M_\infty^2)\varphi_{y_1} \\ \varphi_{y_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1(y) \\ n_2(y) \end{pmatrix} ds_y + \\ + \frac{2}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \int_{\Gamma_\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)\cdot\vec{n}(y)}{\left| \begin{pmatrix} \frac{x_1-y_1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right|^2} \cdot \\ \cdot \varphi(y) ds_y + \varphi_\infty, \quad x \in \Gamma_\infty. \end{aligned} \tag{25}$$

Wir bezeichnen mit

$$\lambda(x) := \rho(|\vec{v}_\infty|^2)((1-M_\infty^2)\varphi_{x_1} n_1(x) + \varphi_{x_2} n_2(x)), \quad x \in \Gamma_\infty \tag{26}$$

die *konormale Ableitung* von φ auf Γ_∞ und definieren die Randintegraloperatoren des Einfach- und Doppelschichtpotentials:

$$\begin{aligned} \Upsilon\lambda(x) := -\frac{1}{\pi\sqrt{1-M_\infty^2}\rho(|\vec{v}_\infty|^2)} \cdot \\ \cdot \int_{\Gamma_\infty} \log \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}(x_1-y_1) \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right| \lambda(y) ds_y \end{aligned} \tag{27}$$

$$\mathcal{K}\varphi(x) := \frac{1}{\pi\sqrt{1-M_\infty^2}} \int_{\Gamma_\infty} \frac{(x-y)\cdot\vec{n}(y)}{\left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}(x_1-y_1) \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right|^2} \varphi(y) ds_y \tag{28}$$

Damit läßt sich die Gleichung (14) verkürzen zu:

$$\varphi(x) = -\Upsilon\lambda(x) + \mathcal{K}\varphi(x) + \varphi_\infty, \quad x \in \Gamma_\infty. \tag{29}$$

Hsiao und Wendland [11] haben folgende Eigenschaft der Einfachschichtpotentials bewiesen:

Lemma 1.1. *Sei $r \in \mathbb{R}$ und $\Gamma_\infty \in C^{[|r|+\frac{1}{2}]}$, wobei $[z]$ die kleinste ganze Zahl $\geq z$ ist. Dann existeirt eine Konstante $c > 0$ (abhängig von Γ_∞ und r), so daß:*

$$c^{-1}\|\psi\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \leq \|\Upsilon\psi\|_{H^{r+\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \leq \leq c\|\psi\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \quad \forall \ \psi \in H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) \tag{30}$$

Für einen C^∞-Rand Γ_∞ gilt demnach (30) für alle $r \in \mathbb{R}$, d.h. der Operator

$$\Upsilon : H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) \to H^{r+\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)$$

ist stetig für alle $r \in \mathbb{R}$. Wir führen jetzt die folgenden Bilinearformen

$$b : H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) \times H^{-r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) \to \mathbb{R}, \quad b(\lambda, \psi) := \langle \Upsilon\lambda, \psi\rangle \text{ und} \tag{31}$$

$$b : H^{r+\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) \times H^{-r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) \to \mathbb{R}, \quad d(u, \psi) := \langle \mathcal{K}u, \psi\rangle \tag{32}$$

ein.

Lemma 1.2. *a) Sei $r \in \mathbb{R}$ und $\Gamma_\infty \in C^{[|r|+\frac{1}{2}]}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$ so, daß die Bilinearform b die Stetigkeitsbedingung*

$$|b(\lambda, \psi)| \leq c\|\lambda\|_{H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \cdot \|\psi\|_{H^{-r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \tag{33}$$

für alle $(\lambda, \psi) \in H^{r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) \times H^{-r-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)$ erfüllt;

b) Die Bilinearform b ist H-koerzitiv (Koerzitivität in der Energienorm): es existiert eine Konstante γ_0 so, daß

$$b(\psi, \psi) \geq \gamma_0\|\psi\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \quad \forall \ \psi \in H. \tag{34}$$

Beweiss: siehe Hsiao und Wendland [11].

Durch Multiplizieren der Randintegralgleichung (29) mit einer beliebigen Testfunktion $\psi \in H$ und anschließenden Integration über Γ_∞, erhalten wir:

$$\langle \Upsilon\lambda, \psi\rangle = -\langle \varphi, \psi\rangle + \langle \mathcal{K}\varphi, \psi\rangle + \varphi_\infty\langle 1, \psi\rangle, \quad \forall \psi \in H.$$

Wegen $\langle 1, \psi\rangle = 0$ und der Definitionen von b und d, ergibt sich die *schwache Formulierung der Randintegralgleichung:*

Finde $\lambda \in H$ so, daß

$$b(\lambda, \psi) = -\langle \varphi, \psi\rangle + \langle \mathcal{K}\varphi, \psi\rangle, \quad \forall \psi \in H. \tag{35}$$

Wir führen für alle $\beta \in \mathbb{R}$ die Funktionalen

$$l_1(v, \beta) := \rho_\infty\langle \nabla\Psi(\cdot, \beta) \cdot \vec{n}, v\rangle \text{ und}$$

$$l_2(\psi, \beta) := \langle (\mathcal{I} - \mathcal{K})\Psi(\cdot, \beta), \psi\rangle$$

ein (hier bezeichnet $\rho_\infty := \rho(|\vec{v}_\infty|^2)$). Damit ergibt sich aus den schwachen Formulierungen (23) und (35) das

variationelle Problem:

Finde $(u, \lambda, \beta) \in K_{s_0} \times H \times \mathbb{R}$ so, daß

$$\begin{cases} a(u|u, v) - \langle \lambda, v\rangle = l_1(v, \beta), & \forall \ v \in V^0, \\ b(\lambda, \psi) + \langle u, \psi\rangle - d(u, \psi) = l_2(\psi, \beta), & \forall \ \psi \in H, \\ F(\beta) = |\nabla u^+|^2_{TE} - |\nabla u^-|^2_{TE} = 0. \end{cases} \tag{36}$$

1.3. Die Entropiebedingung

Wenn die Geometrie des problems oder die Randbedingungen zu einer lokalen Überschallströmung führen, wird die gleichung (2) in dieser Region einen hyperbolishen Charakter haben. Die mathematische Analyse des Problems und die numerischen Experimente zeigen daß es Lösungen gibt, die unstetige Ableitungen ∇u haben, d.h. Lösungen die Stöße enthalten. Die physikalische Wirklichkeit beseitigt die Möglichkeit des Auftretens von Verdichtungstößen. Als Auswahlkriterium, müssen wir der Lösung eine zusätzliche Bedingung auferlegen. Die praktische Entropiebedingung verlangt, daß die divergenz des Strömungsfeldes von oben beschränkt sein soll, d.h.:

$$div\nabla u \leq B \text{ mit einer geeigneten Konstante } B \in \mathbb{R}. \tag{37}$$

Es ist bewiesen daß diese Ungleichung die Lösungen mit kompressiblen Stößen auswählt. Eine Lösung des Problems die zusätzlich (37) erfüllt wird keine nichphysikalische Verdichtungsstöße aufweisen. In schwacher Formulierung lautet somit die Entropiebedingung:

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi dx \leq B\int_\Omega \psi dx, \quad \textit{fur alle } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ mit } \psi \geq 0. \tag{38}$$

2. Numerik

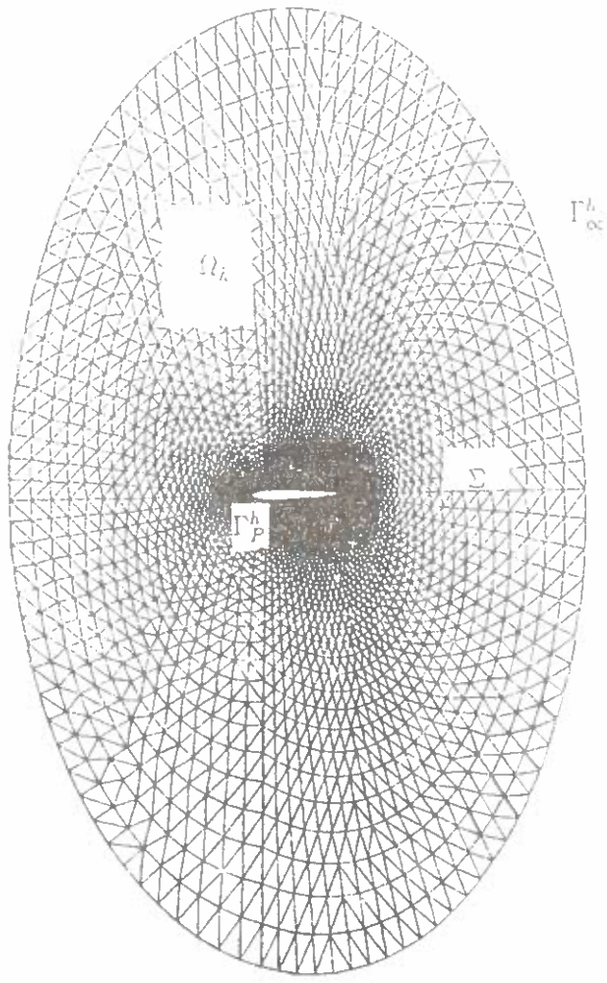
2.1. Die FEM-BEM Kopplungsformulierung des Problems

Zur Diskretisierung des gekoppelten Problems, approximieren wir Ω mit einem polygonalen Gebiet Ω_h, wobei h der Parameter der Maschenbreite bezeichnet. Der Rand Γ_∞ wird durch einen Polygonzug Γ^h_∞ approximiert, dessen Knoten P_j, $(j = \overline{1, n})$ sich auf Γ_∞ befinden. Ähnlicherweise approximiert der Polygonzug Γ^h_P das Profil Γ_P. Der Schlitz Σ ist als Teil

des Randes von Ω_h betrachtet. Auf Ω_h wird eine endliche Triangulierung $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ eingeführt, mit

$$\mathcal{T}_h := \bigcup_{i \in \mathbb{D}} \mathcal{T}_i, \tag{39}$$

wobei $\mathbb{D}$ eine finite Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.



Seien $p_i, i = 1, \ldots, N$ die Knoten der Triangulierung und w_{h_i} die

üblichen stückweise linearen Hutfunktionen, mit

$$w_{h_i}(p_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{40}$$

Diese Funktionen bilden eine Basis des Raumes der stetigen, stückweise linearen Funktionen auf Ω_h. Mit $C_0(\bar{\Omega}_h)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Funktionen auf Ω_h, die einseitige Grenzwerte auf dem Schlitz Σ besitzen. Wir führen weiterhin den folgenden endlich-dimensionalen Raum

$$\begin{aligned} V_h := \{ & v_h \in C_0(\bar{\Omega}_h) | v_{h|T}, \text{ ist linear auf alle } T_i \in \mathcal{T}_h \text{ und} \\ & v_h^+ - v_h^- = \beta \text{ auf } \Sigma \text{ mit } \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{41}$$

ein. Als Testraum betrachten wir

$$V_h^0 := \{v_h \in V_h | v_h^+ - v_h^- = 0 \text{ auf } \Sigma\} \tag{42}$$

und für $s_0 < \frac{2a_0^2}{\gamma - 1}$ sei

$$K_{s_0,h} := \{v_h \in V_h | |\nabla v_h|^2 \leq s_0\} \tag{43}$$

die Menge der zulässigen Finiten-Elemente. Der nichlinearen Form a (definiert in (22)) entspricht jetzt die diskrete nichlineare Form $a_h : K_{s_0,h} \times V_h \times V_h \to \mathbb{R}$, definiert durch:

$$a_h(u_h | v_h, w_h) := \int_{\Omega_h} \rho(|\nabla u_h|^2) \nabla v_h \cdot \nabla w_h dx. \tag{44}$$

Der Polygonzug Γ^h_∞ läßt sich durch $\Gamma^h_\infty = \bigcup_{j=1}^n \Gamma^h_{\infty,j}$ darstellen, wobei

$$\Gamma^h_{\infty,j} := [P_j, P_{j+1}], \quad j = \overline{1,n} \; (P_{n+1} := P_1).$$

Als Ansatzraum zur Lösung der diskreten Gleichung betrachten wir

$$H_{h,\infty} := \{\psi_h \in L^2(\Gamma^h_\infty) | \psi_h|_{\Gamma^h_{\infty,j}} = \text{konst.}, \int_{\Gamma^h_\infty} \psi_h(x) ds_x = 0\} \tag{45}$$

Wir benutzen die Bezeichnung

$$\langle f, g \rangle_h := \int_{\Gamma^h_\infty} f(x) g(x) ds_x, \tag{46}$$

für den L^2-Skalarprodukt auf Γ_∞^h und definieren den approximativen Kern für das Doppelschichtpotential durch

$$K_h(x,y) := \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)\cdot \vec{n}_h(y)}{\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}(x_1-y_1) \\ x_2-y_2 \end{pmatrix}\right|^2}$$

wobei $\vec{n}_h(y)$ die lineare Interpolation der Normalvektoren zu Γ_∞^h in den Knoten P_j und P_{j+1} ist ($y \in \Gamma_{\infty,j}^h$).

Wir definieren jetzt die diskreten Bilinearformen:

$$b_h : H_{h,\infty} \times H_{h,\infty} \to \mathbb{R}, \quad b(\lambda_h, \psi_h) := \langle \Upsilon \lambda_h, \psi_h \rangle_h, \tag{47}$$

$$d_h : K_{s_0,h} \times H_{h,\infty} \to \mathbb{R}, \quad d_h(u_h, \psi_h) := \langle \mathcal{K}_h u_h, \psi_h \rangle_h, \tag{48}$$

und schließlich

$$l_1^h(v_h, \beta_h) := \rho_\infty \langle \nabla \Psi(\cdot, \beta_h) \cdot \vec{n}_h, v_h \rangle_h$$

und

$$\ell_2^h(\psi_h, \beta_h) := \langle (I - \mathcal{K}_h)\Psi(\cdot, \beta_h), \psi \rangle_h .$$

Somit erhalten wir das

diskrete variationelle Problem:

Finde $(u_h, \lambda_h, \beta_h) \in K_{s_0,h} \times H_{h,\infty} \times \mathbb{R}$, *so, daß*

$$\begin{cases} a_h(u_h|u_h, v_h) - \langle \lambda_h, v_h \rangle_h = l_1^h(v_h, \beta_h), & \forall\, v_h \in V_h^0, \\ b_h(\lambda_h, \psi_h) + \langle u_h, \psi_h \rangle_h - d_h(u_h, \psi_h) = l_2^h(\psi_h, \beta_h), & \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty}, \\ F(\beta_h) = |\nabla u_h^+|_{TE}^2 - |\nabla u_h^-|_{TE}^2 = 0. \end{cases} \tag{49}$$

2.2. Minimierungsproblem

Die Idee zur Lösung der ersten Gleichung des diskreten Problems (49) besteht darin, ein geeignetes kostfunktional zu minimieren. Das Kostfunktional wird so difiniert, daß es im transonischen Fall ainen Penalisierungsterm, entsprechend der Entropiebedingung, enthält. Definieren wir also das Funktional $\mathcal{I}_h : V_h \times K_{s_0,h} \to \mathbb{R}$, durch

$$\mathcal{I}(\phi_h) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla \xi_h(\phi_h)|^2 dx\ , & \text{wenn } s_0 < \frac{2a_0^2}{\gamma+1} \\ \frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla \xi_h(\phi_h)|^2 dx + \mathcal{P}_h(\Phi_h)\ , & \text{wenn } \frac{2a_0^2}{\gamma+1} \le s_0 < \frac{2a_0^2}{\gamma-1} \end{cases} \tag{50}$$

wobei im ersten Fall die Strömung subsonisch und im zweiten transonisch ist. Hier ist $\xi_h(\phi_h) \in V_h^0$ die Lösung der Poissonschen Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla \xi_h(\phi_h) \cdot \nabla v_h dx &= a_h(\phi_h|\phi_h, v_h) - \\ &- \langle \lambda_h(\phi_h, \beta_h), v_h \rangle_h - l_1^h(v_h, \beta_h), \quad \forall v_h \in V_h^0. \end{aligned} \tag{51}$$

Der Term $\lambda_h(\phi_h, \beta_h) \in H_{h,\infty}$ is die Lösung der diskreten Randintegralgleichung

$$\begin{aligned} b_h(\lambda_h(\phi_h, \beta_h), \psi_h) &= -\langle \phi_h, \psi_h \rangle_h + \\ &+ d_h(\phi_h, \psi_h) + l_2^h(\psi_h, \beta_h), \quad \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty} \end{aligned} \tag{52}$$

die wir in Abschnitt 3 vertieft analysieren werden. Wegen der schwachen Form der Entropiebedingung, reicht es als Selektionskriterium die Ungleichungen

$$-\int_\Omega \nabla \phi_h \cdot \nabla w_{h_i} dx \le B \int_\Omega w_{h_i} dx, \tag{53}$$

für alle $i = \overline{1,N}$ mit $p_i \notin \Gamma_\infty \cup \Sigma$ zu wählen. Somit ergibt sich die Form des Penalisierungsfunktionals

$$\mathcal{P}_h(\phi_h) := \frac{\mu}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ p_i \notin \Gamma_\infty \cup \Sigma}}^{N} \frac{1}{A_i^\varepsilon}\left([-\int_{\Omega_h} \nabla \phi_h \cdot \nabla w_{h_i} dx - B \int_{\Omega_h} w_{h_i} dx]^+\right)^2. \tag{54}$$

wobei

$$A_i = \text{meas}\,(\text{supp}\ w_{h_i}), \quad i = \overline{1,N}$$

und die Konstanten $\mu > 0, B > 0, \varepsilon \in (1,2)$ in Abhängigkeit von der Geometrie des Profils gewählt werden. Hier bezeichnet $[\cdot]^+$ den nichtnegativen Teil des geklammerten Wertes.

Wir erhalten das

diskrete minimierungsproblem:

Finde $(u_h, \lambda_h, \beta_h) \in K_{s_0,h} \times H_{h,\infty} \times \mathbb{R}$ *so, daß*

$$\mathcal{I}_h(u_h) = \min_{\phi_h \in K_{s_0,h}} \mathcal{I}_h(\phi_h) \tag{55}$$

Die Lösung des Minimierungsproblems mit der Nebenbedingung $F(\beta_h) = 0$ existiert, denn wir minimisieren ein differenzierbares Funcktional über eine nichtleere, konvexe und beschränkte Teilmenge des endlich-dimensionalen

Raumes V_h. Wenn für ein $u_h \in K_{s_0,h}\mathcal{I}_h(u_h) = 0$, ist, folgt, daß u_h Lösung des diskreten Problems (49) ist und die Entropiebedingung erfüllt. Damit ergab sich der nachfolgend beschriebene *cg – Algorithmus*:

2.3. Algorithmus für das Minimierungsproblem

Anfangswert

Als erste Approximation im cg-Algorithmus, wählen wir die Lösung des inkompressiblen, rotationsfreien Problems. Aus $\Delta u^0 = 0$ folgt $\Delta u^0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V^0$, also

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n u \cdot v ds_x.$$

Als Randbedingung setzen wir $\partial_n u(x) = \vec{v}_\infty \cdot \vec{n}(x), \quad x \in \Gamma_\infty$. Das diskrete Problem lautet nun

Finde $u_h^0 \in V_h$ und $\beta^0 \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\int_{\Omega_h} \nabla u_h^0 \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Gamma_\infty^h} \vec{v}_\infty \cdot \vec{n}\, v_h dx, \quad v_h \in V_h^0. \tag{56}$$

und die Kutta-Joukowskische Bedingung $F(\beta^0) = 0$ erfüllt ist.

Weiter sei $\lambda_h^0 \in H_{h,\infty}$ die Lösung der diskreten Randintegralgleichung:

$$b_h(\lambda_h^0, \psi_h) = -\langle u_h^0, \psi_h\rangle_h + d_h(u_h^0, \psi_h) + l_2^h(\psi_h, \beta_h^0), \quad \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty}. \tag{57}$$

Äußere Iteration für λ_h^m :

Anfangswert: Für $m = 0$ nehmen wir die Lösung λ_h^0 der Randintegralgleichung (57).

Innere Iteration

1. Anfangsschritt:

Wir lössen für die Abstiegrichtung $g_h^0 \in V_h^0$ die folgende variationelle Gleichung:

Finde g_h^0 so, daß

$$\int_{\Omega_h} \nabla g_h^0 \cdot \nabla v_h dx = [\mathcal{I}'_h(u_h^0), v_h], \quad \text{fur alle } v_h \in V_h^0. \tag{58}$$

Hier ist $\mathcal{I}'_h$ die Frechet Ableitung von $\mathcal{I}_h$ in Richtung v_h

$$\begin{aligned}[\mathcal{I}'_h(u_h^0), v_h] = &\int_{\Omega_h} \rho(|\nabla u_h^0|^2)(\nabla \xi_h^0 \cdot \nabla v_h) dx + \\ &+ \int_{\Omega_h} \rho'(|\nabla u_h^0|^2)(\nabla \xi_h^0 \cdot \nabla u_h^0)(\nabla u_h^0 \cdot \nabla v_h) dx + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^N \frac{3}{A_i^\xi}[-\int_{\Omega_h} \nabla u_h^0 \cdot \nabla w_{h_i} dx - B\int_{\Omega_h} w_{h_i} dx]^+ \cdot \\ &\cdot [-\int_{\Omega_h} \nabla v_h \cdot \nabla w_{h_i} dx]\end{aligned} \tag{59}$$

wobei $\xi_h^0 := \xi_h^0(u_h^0, \lambda_h^m, \beta^0) \in V_h^0$ als Lösung der Poissonschen Gleichung

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} \nabla \xi_h^0 \cdot \nabla v_h dx = a_h(u_h^0 | u_h^0, v_h) - \langle \lambda_h^m, v_h\rangle_h - \\ - l_1^h(v_h, \beta_h^0), \quad \text{fur all } v_h \in V_h^0\end{aligned} \tag{60}$$

gegeben ist. Für $s_0 < \frac{2a_0^2}{\gamma+1}$, wählen wir $\mu = 0$. Schließlich sei

$$z_h^0 := g_h^0. \tag{61}$$

2. Innere Schleife:

Angenommen wird daß $u_h^n, \lambda_h^m, \beta^n, g_h^n$ und z_h^n bekannt für $n \geq 0$ sind. Die Berechnung der neuen Werte $u_h^{n+1}, \lambda_h^m, \beta^{n+1}, g_h^{n+1}$ und z_h^{n+1} enthält drei Schritte:

Schritt 1:

Wir definieren $\mathcal{I}_h^{n+1}(u_h^n)$ durch:

$$\mathcal{I}_h^{n+1}(u_h^n) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla \xi_h^n|^2 dx\,, & \text{wenn } s_0 < \frac{2a_0^2}{\gamma+1} \\ \frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla \xi_h^n|^2 dx + \mathcal{P}_h(u_h^n)\,, & \text{wenn } \frac{2a_0^2}{\gamma+1} \leq s_0 < \frac{2a_0^2}{\gamma-1} \end{cases} \tag{62}$$

wobei $\xi_h^n := \xi_h^n(u_h^n, \lambda_h^m, \beta^n) \in V_h^0$ die Lösung der Poissonschen Gleichung

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} \nabla \xi_h^n \cdot \nabla v_h dx = a_h(u_h^n | u_h^n, v_h) - \langle \lambda_h^m, v_h\rangle_h - l_1^h(v_h, \beta_h^n), \\ \text{fur alle } v_h \in V_h^0\end{aligned} \tag{63}$$

ist. Dann lössen wir das eindimensionale Minimierungsproblem für α^n

$$\mathcal{I}_h^{n+1}(u_h^n - \alpha^n z_h^n) \leq \mathcal{I}_h^{n+1}(u_h^n - \alpha z_h^n) \quad \text{fur alle } \alpha \leq 0 \tag{64}$$

und setzen

$$\tilde{u}_h^{n+1} := u_h^n - \alpha^n z_h^n. \tag{65}$$

Schritt 2:

In diesem Schritt wird die Kutta–Joukowskische Bedingung berücksichtigt. Das Potential $\tilde{u}_h^{n+1}$ wird so modifiziert, daß die neue Funktion u_h^{n+1} die Kutta–Joukowskische Bedingung erfüllt. Verlangt wird die Gleichheit der tangentiellen Komponenten der Geschwindigkeit an den beiden Seiten des Schlitzes:

$$F(\beta^{n+1}) := |\nabla u_h^{n+1}|_{T+} \cdot \vec{t}_+|^2 - |\nabla u_h^{n+1}|_{T-} \cdot \vec{t}_-|^2 = 0.$$

Man berechnet die tangentiellen Ableitungen des potentials an der Hinterkante

$$\begin{cases} s_+ := \nabla \tilde{u}_h^{n+1}|_{T+} \cdot \vec{t}_+ \\ s_- := \nabla \tilde{u}_h^{n+1}|_{T-} \cdot \vec{t}_- \end{cases}$$

und weiterhin die beidseitigen Werte des Potentials in T $Eu_h^{n+1}(TE)_+$ und $u_h^{n+1}(TE)_-$ so, daß

$$\begin{cases} \nabla u_h^{n+1}|_{T+} \cdot \vec{t}_+ = \frac{1}{2}(s_+ + s_-) \\ \nabla u_h^{n+1}|_{T-} \cdot \vec{t}_- = \frac{1}{2}(s_+ + s_-). \end{cases}$$

Der Sprung

$$\beta^{n+1} := u_h^{n+1}(TE)_+ - u_h^{n+1}(TE)_-$$

gibt die Zirkulation an. Die Werte des Potentials werden entlang des Schlitzes so modifiziert, daß ein konstanter Sprung und eine stetige normale Ableitung des Potentials erhalten werden. In den restlichen Knoten, wird das potential nicht verändert. Eine zweite Idee besteht darin, eine globale Modifikation des Potentials zu betrachten und ist jetzt in Bearbeitung.

Im Abschnitt 4 dieser Arbeit wird die Kutta–Joukowskische Bedingung in der urspünglichen Form behandelt. Eine Ganze Umgebung der hinterkante wird berücksichtigt und die Zirkulation die eine endliche Geschwindigkeit an der hinterkante sichert, wird mittels der Randelementmethode berechnet.

Schritt 3:

Wir berechnen den neuen Gradient $g_h^{n+1} \in V_h^0$ als Lösung des Poissonschen Problems in variationeller Formulierung

$$\int_\Omega^h \nabla g_h^{n+1} \cdot \nabla v_h dx = [\mathcal{I}'_h(u_h^{n+1}), v_h], \quad \text{fur alle } v_h \in V_h^0. \tag{66}$$

wobei die Frechet Ableitung $[\mathcal{I}'_h(u_h^{n+1}), v_h]$ wie in (59) definiert wird, mit u_h^{n+1} anstelle von u_h^0 und mit λ_h^m anstelle von λ_h^0. Die neue Abstiegsrichtung ist jetzt durch

$$z_h^{n+1} := g_h^{n+1} + \gamma^{n+1} z_h^n \tag{67}$$

gegeben, wobei

$$\gamma^{n+1} = \frac{\int_{\Omega_h} \nabla g_h^{n+1} \cdot \nabla(g_h^{n+1} - g_h^n) dx}{\int_{\Omega_h} |\nabla g_h^n|^2 dx} \tag{68}$$

Die innere Schleife wird solange wiederholt, bis der Minimum des Funktion als $\mathcal{I}_h$ mit einer bestimmten Genauigkeit berechnet wird.

Ende der inneren Iteration

Äußerer Iterationsschritt:

Hier berechnen wir $\lambda_h^{m+1} \in H_{h,\infty}$ als Lösung der diskreten Randintegralgleichung:

$$b_h(\lambda_h^{m+1}, \psi_h) = -\langle u_h^n, \psi_h \rangle_h + d_h(u_h^n, \psi_h) + l_2^h(\psi_h, \beta_h^n), \quad \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty} \tag{69}$$

Das Studium dieser Fredholmschen Integralgleichung erster Art mit logarithmischem Kern, sowie ein numerisches Galerkin Verfahren werden im nächsten Paragraph vorgestellt.

Die äußere Iteration wird solange wiederholt, bis $\|\lambda_h^{m+1} - \lambda_h^m\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$ kleiner als einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ist.

Ende der äußeren Iteration.

3. Randintegralgleichung auf Γ_∞

3.1. Lösbarkeit

Betrachtet wird die Fredholmsche Randintegralgleichung erster Art mit logarithmischem Kern (25), deren schwachen Formulierung sich folgendermaßen aufschreiben läßt:

Gegeben $(u, \beta) \in K_{s_0} \times \mathbb{R}$, finde $\lambda \in H$ so, daß:

$$b(\lambda, \psi) + \langle u, \psi \rangle - d(u, \psi) = l_2(\psi, \beta), \quad \forall\, \psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty),$$

Die Bilinearform b ist stetig und koerzitiv in der Energienorm (Lemma 1.2). Für die Lösbarkeit der analogen diskreten Gleichung

$$b_h(\lambda_h, \psi_h) + \langle u_h, \psi_h \rangle_h - d_h(u_h, \psi_h) = l_2^h(\psi_h, \beta_h), \quad \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty},$$

ist die Koerzitivität der diskreten Bilinearform

$$
(70)\qquad \begin{aligned} b_h(\lambda_h,\psi_h) &:= -\frac{1}{\pi\sqrt{1-M_\infty^2}\,p_\infty}\cdot \\ &\cdot\int_{\Gamma_\infty^h}\int_{\Gamma_\infty^h}\log\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}(x_1-y_1)\\ x_2-y_2\end{pmatrix}\right|\lambda_h(y)\psi_h(x)ds_y ds_x \end{aligned}
$$

notwendig. Diese gewünschte Koerzitivität ist für genügend kleines h gesichert, was wir im forlgenden zeigen.

Seien die abgeschlossenen Kurven Γ_∞ und Γ_∞^h durch die Funktionen $z, z_h : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dargestellt:

$$
\Gamma_\infty = \{z := z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t)\\ z_2(t)\end{pmatrix} | t\in[0,1]\}
$$

$$
\Gamma_\infty^h = \{z := z_h(t) = \begin{pmatrix} z_1^h(t)\\ z_2^h(t)\end{pmatrix} | t\in[0,1]\}
$$

Wir betrachten eine Zerlegung des intervalls $[0,1]$: $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1$ mit $z(t_j) = z_h(t_j) = P_j$, $j = \overline{1,n}$. und $I_j := [t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{1,n}$ Wir führen die folgenden Operatoren ein

$$
(71)\qquad r_h : H_{h,\infty} \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) : (r_h\psi_h)(z(t)) := \psi_h(z_h(t))
$$

und

$$
(72)\quad p_h : H_{h,\infty} \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty) : (p_h\psi_h)(z(t))\cdot\left|\frac{dz(t)}{dt}\right| := \psi_h(z_h(t))\cdot\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|,
$$

für $t\in I_j, 1\le j\le n$. Es gilt die Implikation

$$
(73)\qquad \psi_h \in H_{h,\infty} \Rightarrow p_h\psi_h \in H
$$

denn

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma\infty}(p_h\psi_h)(y)ds_y &= \sum_{j=1}^n\int_{\Gamma_{\infty j}}(p_h\psi_h)(y)ds_y = \\
&= \sum_{j=1}^n\int_{I_j}(p_h\psi_h)(z(t))\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|dt = \sum_{j=1}^n\int_{I_j}\psi_h(z_h(t))\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|dt = \\
&= \sum_{j=1}^n\int_{\Gamma_{\infty j}^h}\psi_h(y)ds_y = \int_{\Gamma_\infty^h}\psi_h(y)ds_y = 0
\end{aligned}
$$

Wegen der Definition des operators r_h, folgt (siehe Nedelec und Planchard [13], Lemma 3.1) die *inverse Abschätzung*:

Für alle $-1\le t\le s\le 0$, existiert eine Konstante $c>0$ so, daß

$$
(74)\qquad \|r_h\psi_h\|_{H^s(\Gamma_\infty)} \le ch^{t-s}\|r_h\psi_h\|_{H^t(\Gamma_\infty)},\ \forall\,\psi_h\in H_{h,\infty},
$$

Aufgrund der linearen Interpolation von Γ_∞ mit den Geradenstücken $\Gamma_{\infty,j}^h (j=\overline{1,n})$ folgen weitere Eigenschaften der Operatoren p_h und r_h.

Lemma 3.1. *Es gibt eine Konstante $c>0$ so, daß*

$$
(75)\qquad \|p_h\psi_h - r_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \le ch^2\|r_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)},\ \forall\,\psi_h\in H_{h,\infty},
$$

$$
(76)\qquad \|p_h\psi_h - r_h\psi_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \le ch^{\frac{3}{2}}\|r_h\psi_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)},\ \forall\,\psi_h\in H_{h,\infty},
$$

Beweis :

$$
\begin{aligned}
\|p_h\psi_h - r_h\psi_h\|^2_{L^2(\Gamma_\infty)} &\int_{\Gamma\infty}|(p_h\psi_h)(z(t)) - (r_h\psi_h)(z(t))|^2 ds_x \\
&= \sum_{j=1}^n\int_{t_j}^{t_{j+1}}|(p_h\psi_h)(z(t)) - (r_h\psi_h)(z(t))|^2\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|dt = \\
&= \sum_{j=1}^n\int_{t_j}^{t_{j+1}}|\psi_h(z_h(t))|^2\left|\frac{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|}{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|}-1\right|^2\cdot\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|dt
\end{aligned}
$$

Auf jedem Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ ist z_h die Interpolationsfunktion erster ordnung von z. Daraus folgt

$$
(77)\qquad \frac{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|}{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|} - 1 = \mathcal{O}(h^2)
$$

(für höhere Ordnungen siehe z.B. le Roux [12]) und weiter

$$
\begin{aligned}
\|p_h\psi_h - r_h\psi_h\|^2_{L^2(\Gamma_\infty)} &\le ch^4\sum_{j=1}^n\int_{t_j}^{t_{j+1}}|(r_h\psi_h)(z(t))|^2\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|dt = \\
&= ch^4\int_{\Gamma_\infty}|r_h\psi_h(x)|^2 ds_x = ch^4\|r_h\psi_h\|^2_{L^2(\Gamma_\infty)},
\end{aligned}
$$

womit die Ungleichung (75) erfüllt ist. Wegen der inversen Abschätzung

$$\|r_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \le ch^{-1}\|r_h\psi_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \tag{78}$$

folgt die Ungleichung (76).
Bemerkung: Die Relation (77) impliziert

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|}{\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|} = 1$$

d.h. $\forall 0 < c_1 < 1 < c_2, \quad \exists\, h_0 = h_0(c_1, c_2)$ so, daß $\forall\, h \in (0, h_0]$

$$c_1^2 \le \frac{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|}{\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|} \le c_2^2. \tag{79}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\psi_h\|^2_{L^2(\Gamma^h_\infty)} &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma^h_{\infty j}} |(\psi_h)(x)|^2 ds_x = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |(\psi_h(z_h(t))|^2 \left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right| dt = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |(r_h\psi_h)(z(t))|^2 \cdot \left|\frac{dz(t)}{dt}\right| \cdot \frac{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|}{\left|\frac{dz_h(t)}{dt}\right|}
\end{aligned}$$

und wegen (79) folgt schließlich

$$c_1\|r_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \le \|\psi\|_{L^2(\Gamma^h_\infty)} \le c_2\|r_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)}, \ \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty}. \tag{80}$$

Auf ähnliche Weise folgen auch die Abschätzungen: $\exists\, 0 < c_1 \le c_2 < \infty$ so, daß

$$c_1\|p_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \le \|r_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \le c_2\|p_h\psi_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)}, \tag{81}$$

$$c_1\|p_h\psi_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \le \|r_h\psi_h\|_{L^{-1}(\Gamma_\infty)} \le c_2\|p_h\psi_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \tag{82}$$

für alle $\psi_h \in H_{h,\infty}$. Eine wichtige Rolle um die Koerzitivität der diskreten Bilinearform b_h zu zeigen spielt das folgende

Lemma 3.2 (Konsistenzeigenschaft) *Es existiert eine konstante $c > 0$ so, daß*

$$|b(p_h\psi_h, p_h\psi_h') - b_h(\psi_h, \psi_h')| \le ch^2\|\psi_h\|_{L^2(\Gamma^h_\infty)} \cdot \|\psi_h'\|_{L^2(\Gamma^h_\infty)}, \tag{83}$$

für alle $\psi_h, \psi_h' \in H_{h,\infty}$.
Beweiss: siehe [12], Prop. 3.2.

Satz 3.1. *Für genügend kleines $h > 0$, existeirt eine Konstante $\gamma_1 > 0$ so daß:*

$$b_h(\psi_h, \psi_h) \ge \gamma_1\|r_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^h_\infty)}, \quad \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty}, \tag{84}$$

Beweis:
Wegen der Konsistenzeigenschaft (83) folgt

$$b_h(\psi_h, \psi_h) \ge b(p_h\psi_h, p_h\psi_h) - ch^2\|\psi_h\|^2_{L^2(\Gamma^h_\infty)}, \ \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty}, \tag{85}$$

Mit (73) folgt weiterhin $p_h\psi_h \in H$. Lemma 1.2, b) versichert die Existenz einer Konstante $\gamma_0 > 0$ so, daß:

$$\begin{aligned}
&b(p_h\psi_h, p_h\psi_h) \ge \gamma_0\|p_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} = \\
&= \gamma_0\|r_h\psi_h + p_h\psi_h - r_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \ge \gamma_0[\|r_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} - \\
&- \|p_h\psi_h - r_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}] \ge \gamma_0[1 - c^2h^3]\|r_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}.
\end{aligned}$$

Andereseits, folgt wegen (80) und der inversen Abschätzung (78)

$$-ch^2\|\psi_h\|_{L^2(\Gamma^h_\infty)} \ge -cc_2^2h^2\|r_h\psi_h\|^2_{L^2(\Gamma_\infty)} \ge -cc_2^2h\|r_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}.$$

Insgesamt, haben wir (mit (85))

$$b_h(\psi_h, \psi_h) \ge \gamma_0[1 - c^2h^3 - cc_2^2h]\|r_h\psi_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \ \forall\, \psi_h \in H_{h,\infty},$$

Mit $\gamma_1 := \gamma_0[1 - \mathcal{O}(h)] > 0$ für genügend kleines h, folgt somit die Behauptung.

3.2. Galerkin Verfahren

Mit der Koordinatentransformation

$$T: \begin{cases} x_1 := \frac{x_1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \\ x_2 := x_2 \end{cases} \tag{86}$$

läßt sich die Randintegralgleichung (25) in den neuen Koordinaten schreiben als:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_\infty} log|x-y|\lambda(y)ds_y + \tag{87}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{C_\infty}\frac{(x-y)\cdot\vec{n}(y)}{|x-y|^2}\varphi(y)ds_y + \varphi_\infty, \quad x\in C_\infty.$$

wobei $C_\infty = T(\Gamma_\infty)$ und λ die *normale Ableitung* von φ

$$\lambda(y) = \frac{\partial\varphi}{\partial n}(y), \quad \text{fur } y\in C_\infty.$$

Wählt man Γ_∞ als Ellipse mit den halbachsen $(R\sqrt{1-M_\infty^2}, R)$ so ist C_∞ der Kreis mit Radius R. Der Vorteil dieser Wahl besteht darin daß der Kern des Doppelschichtpotentials auf dem Kreis konstant ist.

Zur Lösung dieser Fredholmscher Integralgleichung erster Art mit logarithmischem Kern, haben wir ein Galerkin–Kollokationsverfahren verwendet. Das Verfahren wurde von Hsiao, Kopp, Wendland [8] entwickelt und verknüpft die hohe Genauigkeit des Galerkin Verfahrens mit der Schnelligkeit von Kollokationsmethoden.

Das Verfahren ist anwndbar für alle C^1 –stetigen abgeschlossenen Kurven $\Gamma : \{z = z(t)|t\in[0,1]\}$ welche die *Regularitätsvoraussetzung*

$$\exists\ R_0 > 0, \quad \text{so, daß} \quad |\dot{z}(t)| \geq R_0, \quad \forall t\in[0,1] \tag{88}$$

erfüllen. Aus der Gleichung (87) folgt

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 log|z(t)-z(\tau)|\lambda(z(\tau))|\dot{z}(\tau)|d\tau = \tag{89}$$
$$= -\varphi(z(t)) + \frac{1}{\pi}\frac{(z(t)-z(\tau))\cdot\vec{n}(z(\tau))}{|z(t)-z(\tau)|^2}\varphi(z(\tau))|\dot{z}(\tau)|d\tau + \varphi_\infty,$$

für alle $t\in I := [0,1]$. Hier bezeichnen wir mit

$$\lambda^*(t) := \lambda(z(t)) \in H_0 := H_0^{-\frac{1}{2}}[0,1] \tag{90}$$

die unbekannte Funktion auf [0,1]. Wir bemerken daß für den Kreis mit Radius R,

$$|\dot{z}(t)| = \text{konst.}, \quad t\in I.$$

Sei $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1$, mit $t_j = (j-1)/n$, $j = \overline{1,n+1}$ eine äquidistante Zerlegung des Intervalls I. Entsprechend dieser Zerlegung, betrachten wir als endlichdimensionalen Unterraum von H_0 den Raum:

$$H_h := \{\lambda_h^* : [0,1]\to I\!R|\lambda_h^*|_{I_j} = \text{konst.}\ j=\overline{1,n}, \quad \int_0^1 \lambda_h^*(t)dt = 0\} \tag{91}$$

Die Familie $\mathcal{B} = \{\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}\}$ wobei

$$\mu_j(t) = \begin{cases} 1 & , \ t\in I_j \\ -1 & , \ t\in I_{j+1}, \\ 0 & , \ \text{sonst.} \end{cases} \qquad j=\overline{1,n-1} \tag{92}$$

bildet eine Basis in H_h.

Bemerkung: $H_h \subset S_h^{1,0}(I)$, wobei

$$S_h^{d,k}(I) := \{\lambda_h^* \in H^k(I)|\lambda_h^*|_{i_j} \in \mathcal{P}^{d-1}(I_j), \quad j=\overline{1,n}\}. \tag{93}$$

Nun gelten die folgenden Eigenschaften (siehe Babuška und Aziz [1]):

Approximationseigenschaft: Für alle $t\leq r\leq\frac{1}{2}, t<0$, existiert eine Konstante $c>0$ (unabhängig von h) so, daß für alle $\lambda^*\in H_0$ ein $\lambda_h^*\in H_h$ existeirt, mit

$$\|\lambda^* - \lambda_h^*\|_{H^t[0,1]} \leq ch^{r-t}\|\lambda\|_{H^r[0,1]}; \tag{94}$$

Inverse Abschätzung (Stabilitätseigenschaft): Für alle $t\leq r\leq 0$, existiert eine Konstante $M>0$ (unabhängig von h) so, daß

$$\|\lambda_h^*\|_{H^r[0,1]} \leq Mh^{t-r}\|\lambda_h^*\|_{H^t[0,1]}, \quad \forall\ \lambda_h^*\in H_h. \tag{95}$$

Wir setzen die Basisfunktionen durch 1–Periodizität auf $I\!R$ fort

$$\mu_j(t+\ell) := \mu_j(t), \quad \ell\in Z\!\!\!Z,\ t\in I.$$

Wegen der identität

$$K(t,\tau) = \frac{(z(t)-z(\tau))\cdot\vec{n}(z(\tau))}{|z(t)-z(\tau)|^2} = -\frac{1}{2R}, \quad \forall\ t,\tau\in I$$

und $|\dot{z}(t)| = 2\pi R, \forall t\in I$, folgt aus der Gleichung (89)

$$\int_0^1 log|z(t)-z(\tau)|\lambda^*(\tau)d\tau = \frac{1}{2R}\varphi(z(t)) + C =: f(z(t)), \quad t\in I, \tag{96}$$

wobei

$$C = \frac{1}{2R}\left(\int_0^1 \varphi(z(\tau))d\tau + \varphi_\infty\right).$$

Wir spalten jetzt (96) in zwei Integrale auf und erhalten die Gleichung:

$$\int_{|t-\tau|\le\frac{1}{2}} log|t-\tau|\lambda^*(\tau)d\tau + \int_{|t-\tau|\le\frac{1}{2}} log\left|\frac{z(t)-z(\tau)}{t-\tau}\right|\lambda^*(\tau)d\tau = \tag{97}$$
$$= f(z(t)). \quad t \in I$$

(wegen der 1–Periodizität kann das Integral auf I durch das Integral auf

$$\mathcal{I}_t := \{\tau \in I\!R \,|\, |t-\tau| \le \frac{1}{2}\}. \tag{98}$$

für alle $t \in I$ ersetzt werden).

Das erste Integral enthält die logaritmische Singularität und ist unabhängig von der Kurve Γ.

Die Kernfunktion

$$log\left|\frac{z(t)-z(\tau)}{t-\tau}\right|$$

des zweiten Integrals kann durch $\log|\dot{z}(t)|$ für $t = \tau$ ersetzt werden; dies ist möglich, wegen der Regularitätsvoraussetzung (88).

Als Ansatzfunktion betrachten wir eine lineare Kombination der Basiselemente von $\mathcal{B}$

$$\lambda_h^*(t) := \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \mu_j(t), \quad t \in I \tag{99}$$

mit unbekannten Koeffizienten $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ und als Testfunktionen die Basisfunktionen $\mu_1, ..., \mu_{n_1}$. Nach der Multiplikation mit μ_k und Integration auf I, erhalten wir das *Galerkin System* in den Unbekannten $\gamma_1, ..., \gamma_{n_1}$

$$A\vec{\gamma} = \vec{b}, \tag{100}$$

wobei $A = (a_{k_j})_{1\le k,j\le n-1}$ und $\vec{b} = (b_k)_{1\le k\le n-1}$, mit

$$\begin{aligned} a_{kj} = &\int_0^1 \left(\int_{\mathcal{I}_t} log|t-\tau|\mu_j(\tau)d\tau\right)\mu_k(t)dt + \\ &+ \int_0^1 \left(\int_{\mathcal{I}_t} log\left|\frac{z(t)-z(\tau)}{t-\tau}\right|\mu_j(\tau)d\tau\right)\mu_k(t)dt \end{aligned} \tag{101}$$

und

$$b_k = \frac{1}{2R}\int_0^1 \varphi(z(t))\mu_k(t)dt. \tag{102}$$

Wegen der Form der Basisfunktionen $\{\mu_j\}_{1\le j\le n-1}(\mu_j = \chi I_j - \chi I_{j+1})$, folgt

$$\begin{aligned} a_{kj} = &(c_{kj} - c_{k+1,j} - c_{k,j+1} + c_{k+1,j+1}) + (d_{kj} - d_{k+1,j} - \\ &- d_{k,j+1} + d_{k+1,j+1}) \end{aligned} \tag{103}$$

wobei

$$c_{kj} = \int_{\mathcal{I}_k}\left(\int_{\mathcal{I}_t\cap I_j} log|t-\tau|d\tau\right)dt \tag{104}$$

und

$$d_{kj} = \int_{I_k}\left(\int_{\mathcal{I}_t\cap I_j} log\left|\frac{z(t)-z(\tau)}{t-\tau}\right|d\tau\right)dt \tag{105}$$

für alle $1 \le k, j \le n-1$.

Berechnung der c_{kj} .

Wir bezeichnen mit $\varrho(k,j)$ den "diskreten Abstand" zwichen k und j,

$$\varrho(k,j) = \min\{|k-j|, |k-n-j|, |k+n-j|\}. \tag{106}$$

Mit der Transformation

$$\begin{cases} \frac{t-t_k}{h} = t' \in [0,1] \\ \frac{\tau-t_k}{h} = \tau' \in [\varrho(k,j), \varrho(k,j)+1], \quad \text{fur} \quad t \in I_k, \quad \tau \in I_j \end{cases} \tag{107}$$

ergibt sich

$$c_{kj} = h^2[log\ h + W_{\varrho(k,j)}]. \tag{108}$$

Die Gewichte $W_\varrho(0 \le \varrho \le [\frac{n+1}{2}])$ sind definiert durch

$$W_\varrho := \int_{\tau'=\varrho}^{\varrho+1}\left(\int_{t'=0}^1 log|t'-\tau'|dt'\right)d\tau' \tag{109}$$

und sind unabhängig von Γ und h.

Für $k \ne j$ lassen sich $W_{\varrho(k,j)}$ durch Quadraturformeln berechnen.

Für $k = j$ (d.h. $t, \tau \in I_k$) läßt sich

$$W_0 = \int_{\tau'=0}^{1} \int_{t'=0}^{1} log|t - \tau| dt d\tau$$

als Cauchy Hauptwertintegral berechnen. Man erhält $W_0 = -\frac{3}{2}$
Einfacher ist die *Berechnung der* d_{kj}. Für $k \neq j$ verwenden wir Quadraturformeln und für $k = j$ wird

$$log\left|\frac{z(t) - z(\tau)}{t - \tau}\right| \text{ durch } log\left|\dot{z}(\frac{t_k + t_{k+1}}{2})\right| \quad (t, \tau \in I_k)$$

ersetzt. *Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung* $\vec{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_{n-1})$ *des Systems (100) folgen aus der Koerzitivität der Bilinearform* b_h *(Satz 3.1) und dem Satz von Lax-Milgram.*

Sei jetzt

$$\lambda_h(z_h(t)) := \lambda_h^*(t), \quad t \in I. \tag{110}$$

Die so definierte Funktion $\lambda_h \in H_{h,\infty}$ ist die approximative Lösung der Randintegralgleichung (25). Aus der Koerzitivität von b_h und der Konsistenzeigenschaft (83) folgt eine a-priori Abschätzung des Fehlers.

Satz 3.2. *Seien* $\lambda \in H$ *die exakte Lösung und* $\lambda_h \in H_{h,\infty}$ *die approximative Lösung der Randintegralgleichung (25). Dann existiert eine Konstante* $c > 0$ *(unabhängig von* h*) so, daß :*

$$\begin{aligned} \|\lambda - r_h\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \leq c\{ \inf_{\lambda_h' \in H_{h,\infty}} [\|\lambda - r_h\lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + \\ + h^{\frac{3}{2}}\|\lambda_h'\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)}] + \|\varphi - r_h\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}\}. \end{aligned} \tag{111}$$

Beweiss:
b_h ist koerzitiv, d.h. es existiert ein $\gamma_0 > 0$, mit

$$b_h(\lambda_h - \lambda_h', \lambda_h - \lambda_h') \geq \gamma_0\|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \quad \forall\, \lambda_h' \in H_{h,\infty} \tag{112}$$

Andererseits, haben wir

$$\begin{aligned} b_h(\lambda_h - \lambda_h', \lambda_h - \lambda_h') &= b_h(\lambda_h, \lambda_h - \lambda_h') - b(\lambda, p_h\lambda_h - p_h\lambda_h') + \\ &+ b(\lambda - p_h\lambda_h', p_h\lambda_h - p_h\lambda_h') + b(p_h\lambda_h', p_h\lambda_h - p_h\lambda_h') - b_h(\lambda_h', \lambda_h - \lambda_h') \leq \\ &\leq |(\varphi_h, \lambda_h - \lambda_h')_{L^2(\Gamma_\infty^h)} - (\varphi, p_h\lambda_h - p_h\lambda_h')_{L^2(\Gamma_\infty)}| + \\ &+ M\|\lambda - p_h\lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \cdot \|p_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + \\ &+ ch^2\|\lambda_h'\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)} \cdot \|\lambda_h - \lambda_h'\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)}. \end{aligned}$$

Für beliebiges $\lambda_h'' \in H_h$ folgt:

$$\begin{aligned} (\varphi_h, \lambda_h'')_{L^2(\Gamma_\infty^h)} - (\varphi, p_h\lambda_h'')_{L^2(\Gamma_\infty)} &= (r_h\varphi_h, p_h\lambda_h'')_{L^2(\Gamma_\infty)} - \\ - (\varphi, p_h\lambda_h'')_{L^2(\Gamma_\infty)} &= (r_h\varphi_h - \varphi, p_h\lambda_h'')_{L^2(\Gamma_\infty)} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\frac{|(\varphi_h, \lambda_h'')_{L^2(\Gamma_\infty^h)} - (\varphi, p_h\lambda_h'')_{L^2(\Gamma_\infty)}|}{\|r_h\lambda_h''\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}} \leq \\ &\leq \frac{|(r_h\varphi_h - \varphi)_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty^h)} \cdot |\|p_h\lambda_h''\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}}{\|r_h\lambda_h''\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1}\|r_h\varphi_h - \varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}. \end{aligned} \tag{113}$$

Aus (112) folgt somit

$$\begin{aligned} \gamma_0\|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} &\leq \frac{b_h(\lambda_h - \lambda_h', \lambda_h - \lambda_h')}{\|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}} \leq \\ &\leq \frac{(\varphi_h, \lambda_h - \lambda_h')_{L^2(\Gamma_\infty^h)} - (\varphi, p_h(\lambda_h - \lambda_h'))_{L^2(\Gamma_\infty)}}{\|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}} + \\ &+ M\|\lambda - p_h\lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \cdot \frac{\|p_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}}{\|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}} + \\ &+ ch^{\frac{3}{2}}\|\lambda_h'\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)} \cdot \frac{h^{\frac{1}{2}}\|\lambda_h - \lambda_h'\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)}}{\|r_h(\lambda_h - \lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty^h)}} \end{aligned}$$

Aus (113) mit $\lambda_h'' := \lambda_h - \lambda_h'$, (82) und der inversen Abschätzung (74) für $t = -\frac{1}{2}, s = 0$, folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} \gamma_0\|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} &\leq \frac{1}{c_1}\|\varphi - r_h\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + \\ &+ \frac{M}{c_1}\|\lambda - p_h\lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + ch^{\frac{3}{2}}\|\lambda_h'\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)}. \end{aligned}$$

Mit der Dreieckungleichung

$$\|\lambda - p_h\lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \leq \|\lambda - r_h\lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + \|p_h\lambda_h' - r_h\lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}$$

folgt die Existenz einer Konstante $C > 0$ so, daß

$$\|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \le C \cdot [\|\lambda - r_h\lambda_h'|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + h^{\frac{3}{2}}\|\lambda_h'\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)} + \\ + \|\varphi - r_h\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}].$$

Nach der Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\|\lambda - r_h\lambda_h)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \le \|\lambda - r_h\lambda_h'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + \\ + \|r_h(\lambda_h - \lambda_h')\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}, \quad \forall\ \lambda_h' \in H_{h,\infty}$$

folgt schließlich die Behauptung.
Es ist klar, daß

$$r_h H_{h,\infty} = \{r_h\psi_h | \psi_h \in H_{h,\infty}\} = \{\psi \in L^2(\Gamma_\infty) | \psi|_{\Gamma_{\infty,j}} = \\ = \text{konst.}\ ,\ j = \overline{1,n}\} \subset L^2(\Gamma_\infty).$$

Sei $s_h : L^2(\Gamma_\infty) \to r_h H_{h,\infty}$ die orthogonale L^2–Projektion, d.h. für $\psi \in L^2(\Gamma_\infty)$:

$$\langle s_h\psi, \chi_h\rangle = \langle \psi, \chi_h\rangle, \quad \forall\ \chi_h \in r_h H_{h,\infty}. \tag{114}$$

Lemma 3.3. *Für alle $-1 \le t \le 0 \le s \le 1$ gilt die Abschätzung (siehe Babuška, Aziz [1]):*

$$\|\lambda - s_h\lambda\|_{H^t(\Gamma_\infty)} \le ch^{s-t}\|\lambda\|_{H^s(\Gamma_\infty)}\ , \quad \forall\ \lambda \in H^s(\Gamma_\infty). \tag{115}$$

Der folgende Satz gibt eine a–posteriori Fehlerabschätzung.

Satz 3.3. *Sei Γ_∞ ein glatter Rand und $\varphi : \Gamma_\infty \to \mathbb{R}$ stetig. Seien weiterhin $\lambda \in H$ und $\lambda_h \in H_{h,\infty}$ die exakte, bzw. die approximative Lösung der Randintegralgleichung (25). Wenn $\lambda \in H^s(\Gamma_\infty)$, mit $-\frac{1}{2} \le s \le \frac{1}{2}$ dann existiert eine Konstante $C > 0$ so, daß*

$$\|\lambda - r_h\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \le C \cdot \{h^{s+\frac{1}{2}}\|\lambda\|_{H^s(\Gamma_\infty)} + h^{\frac{3}{2}}\|\lambda\|_{L^2(\Gamma_\infty)} + \\ + \|\varphi - r_h\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}\}. \tag{116}$$

Beweiss:
Aus der Definition von s_h folgt

$$s_h\lambda(x) = \frac{1}{L(\Gamma_{\infty,j})}\int_{\Gamma_{\infty,j}} \lambda(y)ds_y, \quad \text{fur}\ \ x \in \Gamma_{\infty,j}, \tag{117}$$

Also ist $s_h\lambda$ eine stückweise konstante Funktion auf Γ_∞, mit

$$\int_{\Gamma_\infty} s_h\lambda(x)ds_x = \int_{\Gamma_\infty} \lambda(x)ds_x = 0.$$

Daraus folgt die Existenz eines Elementes $\bar\lambda_h \in H_{h,\infty}$ so, daß

$$s_h\lambda = r_h\bar\lambda_h. \tag{118}$$

Aus dem Satz 3.2 folgt damit die Existenz einer Konstante $c > 0$ so, daß :

$$\|\lambda - r_h\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \le c \cdot \{\|\lambda - r_h\bar\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} + h^{\frac{3}{2}}\|\bar\lambda_h\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)} + \\ + \|\varphi - r_h\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)}\}. \tag{119}$$

Dar erste Term läßt sich wegen Lemma 3.3 majorisieren durch:

$$\|\lambda - r_h\bar\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} = \|\lambda - s_h\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\infty)} \le c_1 h^{s+\frac{1}{2}}\|\lambda\|_{H^s(\Gamma_\infty)}.$$

Für den zweiten Term gilt die Abschätzung:

$$\|\bar\lambda_h\|_{L^2(\Gamma_\infty^h)} \le c_2\|r_h\bar\lambda_h\|_{L^2(\Gamma_\infty)} = \\ = c_2\|s_h\lambda\|_{L^2(\Gamma_\infty)} = c_2(\int_{\Gamma_\infty} |s_h\lambda(x)|^2 ds_x)^{\frac{1}{2}} = \\ = c_2\{\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_{\infty,j}} \left|\frac{1}{L(\Gamma_{\infty,j})}\int_{\Gamma_{\infty,j}} \lambda(y)ds_y\right|^2 ds_x\}^{\frac{1}{2}} = \\ = c_2\{\sum_{j=1}^n L(\Gamma_{\infty,j}) \cdot \frac{(\int_{\Gamma_{\infty,j}} \lambda(y)ds_y)^2}{L(\Gamma_{\infty,j})^2}\}^{\frac{1}{2}} \le c_2\{\sum_{j=1}^n \cdot \frac{(\int_{\Gamma_{\infty,j}} \lambda^2(y)ds_y)}{L(\Gamma_{\infty,j})}\}^{\frac{1}{2}} \le \\ \le \frac{c_2}{\min_{1\le j\le n}\sqrt{L(\Gamma_{\infty,j})}}\{\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_{\infty,j}} \lambda^2(y)ds_y\}^{\frac{1}{2}} = \frac{c_2}{c_3}\|\lambda\|_{L^2(\Gamma_\infty)}.$$

Die Behauptung des Satzes folgt somit für

$$C := c \cdot \max\{c_1, \frac{c_2}{c_3}, 1\}.$$

4. Behandlung der Kutta - Joukowskischen Bedingung.

4.1. Problemdarstellung. In diesem Abschnitt wird die Kutta - Joukowskische Bedingung analysiert:

Das Geschwindigkeitsfeld soll an der Hinterkante endlich bleiben

Diese Bedingung für die Zirkulation $-\beta$ impliziert die Relation

$$F(\beta) := |\nabla u^+|^2_{TE} - |\nabla u^-|^2_{TE} = 0$$

und die Gleichheit der tangentielle Komponenten der Geschwingdigkeit an der Hinterkante. Unser Problem hat einen lokalen Charakter und betrifft nur eine Umgebung $\mathcal{U}$ der Hinterkante. Sei $\Omega^* \subset \mathcal{U} \subset \Omega$ ein polygonales Gebiet, das den Hinterpunkt als Eckpunkt enthält.

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Existenz einer differenzierbaren Funktion $\psi : \Omega^* \to \mathbb{R}$, mit

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -v_2 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = v_1 \quad \text{in} \quad \Omega^*. \end{cases} \tag{120}$$

Man nennet ψ *die Stromfunktion.* Wenn die Stromfunktion zweimal stetig differenzierbar ist, folgt aufgrund der Rotationfreiheit

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \tag{121}$$

daßdie Stromfunktion in Ω^* harmonisch ist

$$\Delta \Psi = 0. \tag{122}$$

Wir nennen eine Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in I$ *Stromlinie* des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v} = (v_1, v_2)$, wenn $\dot{\gamma}(t) = \vec{v}(\gamma(t)), \forall t \in I$. Als einfache, aber nützliche Bemerkung ergibt sich:

Die Stromfuktion ist entlang der Stromlinien konstant.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Psi(\gamma(t))] &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \cdot \dot{\gamma}_2(t) = \\ &= -v_2(\gamma(t)) \cdot v_1(\gamma(t)) + v_1(\gamma(t)) \cdot v_2(\gamma(t)) = 0, \end{aligned}$$

also

$$\Psi(\gamma(t)) \equiv c_\gamma \in \mathbb{R}, \tag{123}$$

für jede Stromlinie γ.

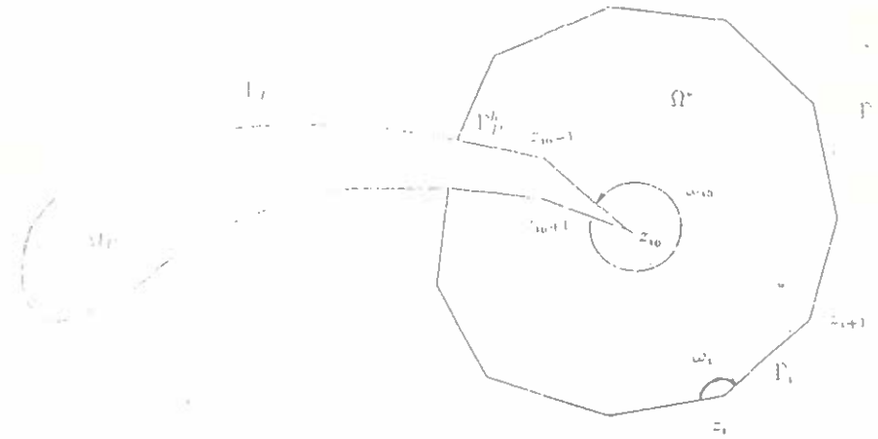
Der Rand von Ω^* besteht aus Geradenstücken $\Gamma_i, i = \overline{1,m}$

$$\Gamma := \partial\Omega^* = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i, \tag{124}$$

Seien $z_1, \ldots, z_m$ die Eckpunkte von Γ so, daß $\Gamma_i = [z_i, z_{i+1}]$, $i = \overline{1,m}$ $(z_{m+1} := z_1)$. Der Hinterpunkt wird mit z_{i_0} bezeichnet. Sei ω_i der entsprechende Innenwinkel in dem Eckpunkt z_i und $\alpha_i := \frac{\omega_i}{\pi}$, $i = \overline{1,m}$. Definieren wir

$$\begin{cases} \Gamma^1 := \Gamma \cap \Gamma^h_P \\ \Gamma^2 := \Gamma \backslash \Gamma^1. \end{cases} \tag{125}$$

Hier bezeichnet Γ^h_P den Polygonzug, der das Profil Γ_P approximiert.



Da die Stromfunktion bis auf eine reelle Konstante eindeutig bestimmt ist, können wir annehmen daß $\Psi(x) = 0$ für alle $x \in \Gamma^h_P$. Insbesondere gilt

$$\Psi(x) \equiv 0, \quad x \in \Gamma^1. \tag{126}$$

Die Stromfunktion ist auch für $x \in \Gamma^2$ bekannt: für $x \in \Gamma_i \subset \Gamma^2$ bezeichnen wir mit $\tau(x), n(x)$ den Tangenten - bzw. den Normaleneinheitsvektor in x. Aus der Definition der Stromfunktion und der Relation zwischen Tangenten - und Normalenvektor in x

$$(\tau_1(x), \tau_2(x)) = (-n_2(x), n_1(x)), \quad x \in \Gamma_i,$$

folgt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}(x) = \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x), \quad x \in \Gamma_i,$$

und damit, für $x \in [z_i, z_{i+1}]$:

$$\Psi(x) = \Psi(z_i) + \int_{[z_i,x]} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}(y)(ds_y = \Psi(z_i) + \int_{[z_i,x]} \vec{v}(y) \cdot \vec{n}(y) ds_y =: h(x)$$

wobei h eine bekannte Funktion auf Γ_i ist. Also gilt

$$\Psi(x) = h(x), \quad x \in \Gamma^2. \tag{127}$$

Wir führen eine weitere Funktion ein. Sei $\Psi_S : \Omega^* \to I\!R$ durch

$$\Psi_s(x) := \Psi(x) - v_\infty \cdot x_2, \tag{128}$$

wobei $\vec{v}_\infty = (v_\infty, 0)$ die Fernfeldgeschwindigkeit ist. Wir nennen Ψ_S *Stromfunktion der Strörströmung.* Mit

$$g : \Gamma \to I\!R, \; g(x) = \begin{cases} -v_\infty \cdot x_2, & x \in \Gamma^1 \\ h(x) - v_\infty \cdot x_2, & x \in \Gamma^2 \end{cases}$$

ist Ψ_S Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{cases} \Delta\Psi_S = 0 \;\text{ in }\; \Omega^* \\ \Psi_S(x) = g(x)\,, \quad x \in \Gamma \\ \Psi_S(x) = -\frac{\beta}{2\pi} log|x| + \frac{1}{2}\omega + o(\frac{1}{|x|}), \quad |x| \to \infty \end{cases} \tag{129}$$

Hier ist $-\beta$ die *Zirkulation* und ω beschreibt die logarithmische Kapazität von Γ. Es ist bekannt (siehe [4], [5]), daßfür gegebene (g, β) die Lösung die folgende Integraldarstellung hat

$$\Psi_S(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma log|x-y|\sigma(y)ds_y + \frac{1}{2}\omega, \quad x \in \Omega^* \tag{130}$$

wobei σ, ω das Integralgleichungssystem

$$\begin{cases} V_\Gamma\sigma(x) + \omega := -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma log|x-y|\sigma(y)ds_y + \omega = 2g(x), \quad x \in \Gamma \\ \Lambda_\Gamma\sigma := \int_\Gamma(y)ds_y = \beta \end{cases} \tag{131}$$

löst.

Wir bezeichnen mit ν_Γ den Matrixoperator diesses Systems

$$\nu_\Gamma := \begin{pmatrix} V_\Gamma & I \\ \Lambda_\Gamma & 0 \end{pmatrix}. \tag{132}$$

Für einen glatten Rand, haben Hsiao und Wendland [11] die Abbidungseigenschaften (Stetigkeit, Integrierbarkeit) dieses Operators analysiert. Dise Eigenschaften gelten in geeigneten Räume auch für einen nichglatten Rand.

4.2. Eigenschaften von ν_Γ; Regularitätsresultate. Für den zuvor definierten Polygonrand, führen wir nun die folgenden Sobolev Räume ein:

$$H^s(\Omega^*) := \{u|_{\Omega^*} | u \in H^s(I\!R^2)\}, \quad s > 0$$

$$H^s(\Gamma) := \begin{cases} \{u|_\Gamma | u \in H^{s+\frac{1}{2}}(I\!R^2)\}, & s > 0 \\ L^2(\Gamma) \;\;, s = 0 \\ (H^{-s}(\Gamma))'(Dualraum)\;, & s < 0 \end{cases}$$

$$H^s(\Gamma_i) := \{u|_{\Gamma_i} | u \in H^s(\Gamma)\}, \quad s \le 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Der folgende Satz erklärt die Eigenschaften des Operators ν_Γ für den nichtglatten Rand Γ und wurde in [4] bewiesen:

Satz 4.1 *a) Der Matrixoperator $\nu_\Gamma : H^s(\Gamma) \times I\!R \to H^{s+1}(\Gamma) \times I\!R$,*

$$\nu_\Gamma(\sigma, \omega) = \begin{pmatrix} V_\Gamma & I \\ \Lambda_\Gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \omega \end{pmatrix}$$

ist stetig für $s \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$. Darüberhinaus ist ν_Γ ein Isomorphismus für $s \in (-\frac{1}{2} - \alpha, -\frac{1}{2} + \alpha)$, wobei

$$\alpha := \min_{1 \le i \le m}\{\frac{1}{\alpha_i}, \frac{1}{2-\alpha_i}\}.$$

b) ν_Γ erfüllt eine Gardingsche Ungleichung in dem Energieraum, d,h es existiert eine Konstante $\gamma_0 > 0$ und ein kompakter Operator

$$C_\Gamma : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times I\!R \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times I\!R$$

so, daß

$$\langle(\nu_\Gamma + C_\Gamma)(\sigma, \omega), (\sigma, \omega)\rangle_{L^2(\Gamma)\times I\!R} \ge \gamma_0 \|(\sigma, \omega)\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times I\!R} \tag{133}$$

für jede $(\sigma, \omega) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times I\!R$, wobei

$$\|(\sigma, \omega)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times I\!R} := (\|\sigma\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + |\omega|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{134}$$

Im Falle eines Polygonrandes hat die Lösung des Systems (131) Eckensingularitäten, sogar für eine C^∞ -Randfunktion g. Der Rand Γ^2 ist künstlich gewählt worden und die Knoten z_i (für $i \ne i_0$) befinden sich im Unterschallgebiet. Es hat also keinen Sinn die Singularitäten in diesen Eckpunkten zu berücksichtigen. In Wirklichkeit kann nur z_{i_0} als möglicher Singularitätspunkt vorkommen. Wir werden zeigen, daßnur für eine bestimmte Zirkulation - β, die Funktion σ auch in z_{i_0} regulär ist, d.h. die

Geschwindigkeit an der Hinterkante endlich bleibt. Diese Zirkulation, die also der Kutta - Joukowskischen Bedingung entspricht, wirt numerisch berechnet .

Aus der Regularitätstheorie für elliptische partielle Differentialgleichungen in Eckengebieten (siehe dazu [7]) folgt unter der Voraussetzung

$$g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

daßsich Ψ_S in einer Umgebung $\mathcal{U}(z_i)$ einem regulären und in einem singulären Anteil zerlegen läßt:

$$\Psi_S(x) = \Psi_{S,0}(x) + c_i \rho_i(x)^{\frac{1}{\alpha_i}} \sin \frac{\Theta_i(x)}{\alpha_i}, \quad x \in \mathcal{U}(z_i), \quad i = \overline{1,m} \tag{135}$$

Hier bezeichnet $\Psi_{S,0}$ den regalärеb Anteil, und

$$\Psi_{S,0} \in H^{2+\frac{1}{\alpha_i}}(\mathcal{U}(z_i) \cap \Omega^*).$$

Mit (ρ_i, Θ_i) bezeichnet man die positiv orientierten lokalen Polarkoordinaten in $z_i : \rho_i(x) = |x - z_i|$ und $\Theta_i(x)$ ist der Winkel zwischen $\Gamma_i = [z_i, z_{i+1}]$ und dem Radius $[z_i, x]$ (so, daß $\Theta_i \equiv 0$ auf Γ_i und $\Theta_i \equiv \omega_i$ auf Γ_{i-1}). Die Konstante c_i wird *Spannungintensitätsfaktor* genannt. Der Spursatz für den regulären Anteil lautet

$$\Psi_{S,0}|_{\Gamma \cap \mathcal{U}(z_i)} \in H^{\frac{3}{2}+\frac{1}{\alpha_i}}(\Gamma \cap \mathcal{U}(z_i)).$$

Damit folgt für die normale Ableitung von Ψ_S

$$\frac{\partial \Psi_S}{\partial n}(x) = \frac{\partial \Psi_{S,0}}{\partial n}(x) + c_i \mathcal{O}(\rho_i(x)^{\frac{1}{\alpha_i}-1}), \quad x \in \Gamma \cap \mathcal{U}(z_i). \tag{136}$$

Hier ist die normale Ableitung des regulären Anteils

$$\frac{\partial \Psi_S}{\partial n} \in H^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_i}}(\Gamma \cap \mathcal{U}(z_i)).$$

und $c_i \mathcal{O}(\rho_i(x)^{\frac{1}{\alpha_i}-1})$ beschreibt die Singularität. Offensichlich gilt

$$\lim_{\Gamma \ni x \to x_i} |\rho_i(x)^{\frac{1}{\alpha_i}-1}| = \infty,$$

für $\alpha_i \in (1,2)$. Dies trifft für $i = i_0$. Die Singularität in z_{i_0} hat die Form von $v_{i_0} : \Gamma \to \mathbb{R}$,

$$v_{i_0}(x) = |x - z_{i_0}|^{\frac{1}{\alpha_{i_0}}-1}. \tag{137}$$

Aus dem System (131), geschrieben in der Form

$$\nu_\Gamma(\sigma, \omega) = \begin{pmatrix} V_\Gamma & I \\ \Lambda_\Gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g \\ \beta \end{pmatrix} \in H^{s+1} \times \mathbb{R}, \tag{138}$$

$((\sigma, \omega) \in H^s(\Gamma) \times \mathbb{R})$ folgt durch Multiplikation mit beliebigem $(\sigma', \omega') \in H^{-(s+1)}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ *die schwache Formulierung:*

Finde $(\sigma, \omega) \in H^s(\Gamma) \times \mathbb{R}$ so, daß

$$\begin{aligned} \langle \nu_\Gamma(\sigma, \omega), (\sigma', \omega') \rangle &= \langle (2g, \beta), (\sigma', \omega') \rangle, \\ &\forall\, (\sigma', \omega') \in H^{-(s+1)}(\Gamma) \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{139}$$

Für die schwache Lösung ergibt sich das folgende Regularitätsresultat:

Satz 4.2 *(Costabel, Stephen [4]) Sei $r > \frac{1}{2}$ mit $(r - \frac{1}{2})\alpha_{i_0} \notin \mathbb{Z}$ und sei $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ so, daß*

$$g|_{\Gamma_i} \in H^r(\Gamma_i), \quad \text{für } i = i_0 - 1, i_0.$$

Dann läßt sich die schwache Lösung $\Psi_S \in H^1(\Omega^*)$ folgendermaßen darstellen:

$$\Psi_S(x) = \Psi_{S,0}(x) + c_{i_0} \rho_{i_0}(x)^{\frac{1}{\alpha_{i_0}}} \sin \frac{\Theta_{i_0}(x)}{\alpha_{i_0}}, \tag{140}$$

wobei

- *der reguläre Anteil $\Psi_{S,0} \in H^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^*)$ und*

$$\Psi_{S,0} \in H^{r-\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_{i_0}}}(\Omega^* \cap \mathcal{U}(z_{i_0}));$$

- *$(\rho_{i_0}, \Theta_{i_0})$ bezeichnen, wie zuvor, die lokalen Polarkoordinaten;*
- *c_{i_0} ist der Spannungintensitätsfaktor.*

Der Spursatz lautet

$$\Psi_{S,0}|_{\Gamma \cap \mathcal{U}(z_{i_0})} \in H^{r-1+\frac{1}{\alpha_{i_0}}}(\Gamma \cap \mathcal{U}(z_{i_0}));$$

d.h.

$$\frac{\Psi_{S,0}}{\partial n} \in H^{r-2+\frac{1}{\alpha_{i_0}}}(\Gamma \cap \mathcal{U}(z_{i_0})); \tag{141}$$

Korollar: Seien $\delta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ so daß, $(1+\delta)\alpha_{i_0} \notin \mathbb{Z}$ und $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, mit

$$g|_{\Gamma_i} \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Gamma_i), \quad \text{fur } i = i_0 - 1, i_0.$$

Dann ist die schwache Lösung $\Psi_S \in H^1(\Omega^*)$ mit

$$\Psi_S(x) = \Psi_{S,0}(x) + c_{i_0}\rho_{i_0}(x)^{\frac{1}{\alpha_{i0}}}\frac{\Theta_{i_0}(x)}{\alpha_{i0}},$$

wobei:

- $\Psi_{S,0} \in H^{2+\delta}(\Omega^*)$ und

$$\Psi_{S,0} \in H^{1+\frac{1}{\alpha_{i0}}+\delta}(\Omega^* \cap \mathcal{U}(z_{i0}));$$

- $(\rho_{i_0}, \Theta_{i_0})$ lokale Polarkoordinaten;
- c_{i_0} ist der Spannungintensitätsfaktor.

Daraus folgt

$$\Psi_{S,0}|_{\Gamma\cap\mathcal{U}}(z_{i_0}) \in H^{\frac{1}{2}+\delta+\frac{1}{\alpha_{i_0}}}(\Gamma \cap \mathcal{U}(z_{i_0}));$$

d.h.

$$\frac{\Psi_{S,0}}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}+\delta+\frac{1}{\alpha_{i_0}}}(\Gamma \cap \mathcal{U}(z_{i_0})); \tag{142}$$

Hier ist $1 << \alpha_{i_0} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha_{i_0}} << 1$ und

$$-\frac{1}{2} + \delta + \frac{1}{\alpha_{i_0}} \in [-1 + \frac{1}{\alpha_{i_0}}, \frac{1}{\alpha_{i_0}}] =: I_0$$

4.3. Augmentation. Für $-\frac{1}{2} \le s < 1$ (und $I_0 \subset [-\frac{1}{2}, 1]$) definieren wir des Raum

$$Z^s(\Gamma) := \{\sigma = \sigma_0 + cv_{i_0} | \sigma_0 \in H^s(\Gamma), \quad c \in \mathbb{R}\} \tag{143}$$

und versehen den vergrößerten (augmentierten) Raum mit der Norm

$$\|\sigma\|_{Z^s(\Gamma)} := \begin{cases} \|\sigma_0\|_{H^s(\Gamma)} + |c| \ , & s \ge 0 \\ \|\sigma\|_{H^s(\Gamma)} \ , & s < 0 \end{cases} \tag{144}$$

Der folgende Satz erweitert die Gültigkeit der Eigenschaften von ν_Γ auf den vergrößerten Raum. Er ist in [4], [10] bewiesen.

Satz 4.3. *Der Operator* $\nu_\Gamma : Z^s(\Gamma) \times \mathbb{R} \to H^{s+1}(\Gamma) \times \mathbb{R}$, *mit*

$$(\sigma_0, c; w) \mapsto \begin{pmatrix} V_\Gamma(\sigma_0 + cv_{i_0}) + \omega \\ \Lambda_\Gamma(\sigma_0 + cv_{i_0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ b \end{pmatrix}$$

ist stetig und bijektiv. Außerdem, existiert ein $c > 0$ *so, daß:*

$$\|\sigma\|_{Z^s(\Gamma)} + |\omega| \le c\{\|\rho\|_{H^{s+1}(\Gamma)} + |b|\}, \quad \forall\, (\rho, b) \in H^{s+1}(\Gamma) \times \mathbb{R}. \tag{145}$$

Bemerkung: Der Satz garantiert die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung $(\sigma, \omega) \in Z^s(\Gamma) \times \mathbb{R} \subset Z^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$. Diese Lösungen wird sich als Linearkombination aus den sewachen Lösungen der folgenden Systeme von Randintegralgleichungen ergen:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma log|x-y|\sigma^1(y)ds_y + \omega^1 = 0, & x \in \Gamma \\ \int_\Gamma \sigma^1(y)ds_y = 1 \end{cases} \tag{S1}$$

und

$$\begin{cases} -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma log|x-y|\sigma^2(y)ds_y + \omega^2 = 2g(x), \quad , & x \in \Gamma \\ \int_\Gamma \sigma^2(y)ds_y = 1 \end{cases} \tag{S2}$$

Mit $(\sigma^1, \omega^1), (\sigma^2, \omega^2) \in Z^s(\Gamma) \times \mathbb{R}$ Lösungen von (S1) bzw. (S2), ist

$$(\sigma, \omega) = (\beta\sigma^1 + \sigma^2, \beta\omega^1 + \omega^2) \tag{146}$$

Lösung von (131). In einer Umgebung von z_{i_0} lassen sich die Lösungen darstellen als

$$\sigma^k(x) = \sigma_0^k + c^k\rho_{i_0}(x)^{\frac{1}{\alpha_{i0}}}\sin\frac{\Theta_{i_0}(x)}{\alpha_{i_0}}, \quad x \in \Omega^* \cap \mathcal{U}(z_{i_0}), \quad k = \overline{1,2} \tag{147}$$

mit $\sigma_0^1, \sigma_0^2 \in H^s(\Gamma)$. Daraus folgt

$$\sigma(x) = (\beta\sigma_0^1(x) + \sigma_0^2(x)) + (\beta c^1 + c^2)v_{i_0}\sin\frac{\Theta_{i_0}(x)}{\alpha_{i_0}}, \quad x \in \Omega^* \cap \mathcal{U}(z_{i_0}),$$

Damit σ regulär in $\Omega^* \cap \mathcal{U}(z_{i_0})$ ist, muß $\beta c^1 + c^2 = 0$, d.h.

$$\beta = \frac{c^2}{c^1} \tag{148}$$

Natürlich stellt sich die Frage, ob $c^1 \neq 0$. Unter Verwendung konformer Abbildungen hat Gaier [9] bewiesen, daß $c^1 \neq 0$ und außerdem eine explizite Formel angegeben

Schwache Formulierung in dem augumentierten Raum:
Finde $(\sigma, \omega) \in Z^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ *so, daß:*

(149)

$$\langle\langle \nu_\Gamma(\sigma, \omega), (\sigma', \omega')\rangle\rangle_{L^2} = \langle(2g, \beta), (\sigma', \omega')\rangle_{L^2(\Gamma)\times\mathbb{R}}, \ \forall\, (\sigma', \omega') \in Z^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}.$$

Hier bezeichnet $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ das Skalarprodukt

$$\langle\langle \nu_\Gamma(\sigma,\omega),(\sigma',\omega')\rangle\rangle_{L^2} := \langle V_\Gamma\sigma+\omega,\sigma\rangle_{L^2} + \Lambda_\Gamma\sigma\cdot\omega' \tag{150}$$

4.4 Galerkin Verfahren. Für $N \in \mathbb{N}$ (mit $h := \frac{1}{N}$), betrachten wir die äquidistente Zerlegung von Γ_i mit

$$x_{i,j} := z_i + jh(z_{i+1} - z_i), \quad j = \overline{1,N}, \quad i = \overline{1,m}$$

und bezeichnen mit $\Gamma_{i,j}$ die Geradenstücke

$$\Gamma_{i,j} := [x_{i,j-1}, x_{i,j}]$$

(wobei $x_{i,0} := z_i$). Entsprechend dieser Zerlegung betrachten wir als Ansatzraum

$$H_h := S_h^{d,k}, \tag{151}$$

wobei

$$S_h^{d,k} := \{\chi_h \in H^k(\Gamma) | \chi_h|\Gamma_{i,j} \in \mathcal{P}^{d-1}(\Gamma_{i,j}), \quad j = \overline{1,N}, \quad i = \overline{1,m}\} \tag{152}$$

Wir verlangen dem Raum H_h folgende Eigenschaften ab:
Aproximationseigenschaft: Für alle $-\frac{1}{2} \le t \le r \le s$ und $\sigma \in H^s(\Gamma)$, ex. $\sigma_h \in H_h$ und $c_1 > 0$ (unabhängig von h und σ) so, daß:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{H^t(\Gamma)} \le c_1 h^{r-t} \|\sigma\|_{H^r(\Gamma)}, \tag{153}$$

Stabilitätseigenschaft (Inverse Abschätzung) : Für alle $t \le r \le s$, existiert ein $M > 0$ (unabhängig von h) so, daß:

$$\|\sigma_h\|_{H^t(\Gamma)} \le M h^{t-r} \|\sigma_h\|_{H^r(\Gamma)}, \quad \forall \ \sigma_h \in H_h. \tag{154}$$

Beide Eigenschaften sind erfüllt, wenn H_h ein $(s+1,s)$ - *Reguläres System* ist im Sinne von Babuška und Aziz ([1], Seite 83). Dafür reicht es $d = 2$ und $k = 1$ zu wählen, d.h.

$$H_h = S_h^{1,2} \tag{155}$$

der Raum der stückweise linearen Funktionen auf Γ, die die Konformitätsbedingung

$$\chi_h \in H^1(\Gamma)$$

erfüllen.

Entsprechend dieses Ansatzraumes, ist die *erste Galerkin Approximation* der Lösung $(\sigma,\omega) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R} \subset Z^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ das Paar $(\sigma_h,\omega_h) \in H_h \times \mathbb{R}$, welches

$$\langle\langle \nu_\Gamma(\sigma_h,\omega_h),(\sigma'_h,\omega'_h)\rangle\rangle_{L^2} = \langle(2g,\beta),(\sigma'_h,\omega'_h)\rangle_{L^2(\Gamma)\times\mathbb{R}}, \quad \text{für alle } (\sigma'_h,\omega'_h) \in H_h \times \mathbb{R}. \tag{156}$$

lößt. Die Lösbarkeit des Systems (156) folgt aus der Gardingschen Ungleichung (133). Außerdem, ergibt sich die Quasioptimailität des Fehlers, wie Hsiao und Wendland in [11] bewiesen haben:

Satz 4.4. *Sei $(\sigma,\omega) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ die exakte Lösung von (139) und (σ_h,ω_h) die Galerkin Approximation. Dann*

a) Es existiert ein $h_0 > 0$ so, daß für alle $0 < h \le h_0$, der Galerkin Operator $G_h : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$, definiert mittels (156) durch

$$G_h(\sigma,\omega) := (\sigma_h,\omega_h) \tag{157}$$

gleichmäßig beschränkt ist;

b) Für fallendes $h \to 0$, existiert eine Konstante $C > 0$ so, daß für alle $\forall \varepsilon > 0$:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + |\omega - \omega_h| \le C h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\{\|g\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} + |\beta|\}. \tag{158}$$

Um höhere Konvergenzordnung zu erhalten, vergrößern (augumentieren) wir den Ansatzraum H_h mit der singulärien Funktion v_{i_0}. Sei also

$$Z_h := H_h \oplus \operatorname{span}\{v_{i_0}\} \tag{159}$$

Bemerkungen:

1) span $\{\vartheta_{i_0}\}$ ist unabhängig von der gewählten Diskretisierung;
2) $\dim Z_h = \dim H_h + 1 = mN + 1$;
3) $Z_h = \{\sigma = \sigma_0 + c\vartheta_{i_0} | \sigma_0 \in H_h, c \in \mathbb{R}\}$.

Aus (153) ergibt sich die *Approximationseigenschaft:*
Für alle $-\frac{1}{2} \le t \le r \le s$ und $\sigma \in Z^s(\Gamma)$, ex. $\sigma_h \in Z_h$ und $c_1 > 0$ (unabhängig von h und σ) so, daß

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{Z^t(\Gamma)} \le c_1 h^{r-t} \|\sigma\|_{Z^r(\Gamma)} \tag{160}$$

Beweis: Sei $\sigma \in Z^s(\Gamma)$, d.h.

$$\sigma = \sigma_0 + c\vartheta_{i_0}$$

mit $\sigma_0 \in H^s(\Gamma)$ und $c \in \mathbb{R}$. Wegen (153), ex. ein $\sigma_{0,h} \in H_h$ und eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$, unabhängig von σ_0 und h so, daß:

$$\|\sigma_0 - \sigma_{0,h}\|_{H^t(\Gamma)} \leq c_1 h^{r-t} \|\sigma_0\|_{H^r(\Gamma)}$$

Wählen wir $\sigma_h := \sigma_{0,h} + c\vartheta_{i_0}$, dann folgt

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{Z^t(\Gamma)} = \|\sigma_0 - \sigma_{0,h}\|_{H^t(\Gamma)} + |c - c| \leq c_1 h^{r-t} \|\sigma_0\|_{H^r(\Gamma)} \leq$$
$$\leq c_1 h^{r-t} \|\sigma\|_{Z^r(\Gamma)}.$$

Wendland , Stephan und Hsiao haben in [17] die *Stabilitätseigenschaft* in dem augmentierten Raum formuliert:

a) Für $0 \leq t \leq r \leq s$, ex. ein $M > 0$ (unabhängig von h) so, daß

$$\|\sigma_h\|_{Z^r(\Gamma)} \leq M h^{t-r} \|\sigma_h\|_{Z^t(\Gamma)}, \quad \forall\, \sigma_h \in Z_h. \tag{161}$$

Beweis:

$$\|\sigma_h\|_{Z^r(\Gamma)} = \|\sigma_{0,h}\|_{H^r(\Gamma)} + |c| \leq M h^{t-r} \|\sigma_{0,h}\|_{H^t(\Gamma)} + |c| =$$
$$= M h^{t-r} (\|\sigma_{0,h}\|_{H^t(\Gamma)} + |c|) + (1 - M h^{t-r} |c| \leq M h^{t-r} \|\sigma_h\|_{Z^t(\Gamma)}.$$

b) Für $t \leq r \leq s < 0$ oder $t < 0 < r \leq s$ gilt

$$\|\sigma_h\|_{Z^r(\Gamma)} \leq M_\varepsilon h^{t-r-\varepsilon} \|\sigma_h\|_{Z^t(\Gamma)}, \quad \forall\, \sigma_h \in Z_h, \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{162}$$

Beweis: Siehe [17], Lemma 3.1.

Entsprechend des neuen Ansatzraumes, ist die *zweite Galerkin Approximation* der Lösung $(\sigma, \omega) \in Z^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ ein Paar $(\sigma_h, \omega_h) \in Z_h \times \mathbb{R}$, welches

$$\langle\langle \Upsilon_\Gamma(\sigma_h, \omega_h), (\sigma'_h, \omega'_h) \rangle\rangle_{L^2} = \langle (2g, \beta), (\sigma'_h, \omega'_h) \rangle_{L^2(\Gamma) \times \mathbb{R}}, \tag{163}$$
$$\text{für alle } (\sigma'_h, \omega'_h) \in Z_h \times \mathbb{R}.$$

löst. Wenn wir den Operator Υ_Γ explizit aufschreiben, dann folgt

$$\langle\langle \begin{pmatrix} V_\Gamma \sigma_h + \omega_h \\ \Lambda_\Gamma \sigma_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma'_h \\ \omega'_h \end{pmatrix} \rangle\rangle = \langle \begin{pmatrix} 2g \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_h \\ \omega'_h \end{pmatrix} \rangle, \tag{164}$$

$\forall\, (\sigma'_h, \omega'_h) \in Z_h \times \mathbb{R}$.

Schreibt man (σ_h, ω_h) als Linearkombination der Basisfunktionen

$$\{\mu_{1,1}, \ldots, \mu_{1,N}, \ldots, \mu_{m,1}, \ldots, \mu_{m,N}; \vartheta_{i_0}; 1\}$$

(wobei $\mu_{i,j}$ linear Hutfunktionen sind) mit unbekannten Koefizienten

$$\{\{\gamma_{i,j} | j = \overline{1,N}, i = \overline{1,m}\}, c_h, \omega_h\} \text{ also}$$

$$(\sigma_h, \omega_h) = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} g_{i,j} \mu_{i,j} + c_h \vartheta_{i0}, \omega_h), \quad \text{so erhalt man} \tag{165}$$

$$\langle V_\Gamma (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{i,j} \mu_{i,j} + c_h \vartheta_{i_0}) + \omega_h, \sigma'_h \rangle +$$
$$+ \langle \Lambda_\Gamma (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{i,j} \mu_{i,j} + c_h \vartheta_{i_0}), \omega'_h \rangle =$$
$$= \langle 2g, \sigma'_h \rangle + \beta \omega'_h, \quad \forall\, (\sigma'_h, \omega'_h) \in Z_h \times \mathbb{R}$$

Als Testkunktionen wählt man die Basiselemente von $Z_h \times \mathbb{R}$ $\{(0, \ldots, \mu_{k,l}, \ldots, 0; 0; 0 | \ell = \overline{1,N}, k = \overline{1,m}, (0, \ldots, 0; v_{i_0}; 0)$ und $(0, \ldots, 0; 0; 1)$ und erhält das *Galerkin Gleichungssyystem in dim augmentierten Raum:*

Finde $(\{\gamma_{i,j} | j = \overline{1,N}, i = \overline{1,m}\}, c_h, \omega_h) \in \mathbb{R}^{mN+2}$ *so, daß*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} (-\frac{1}{\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma log|x-y| \mu_{i,j}(y) \mu_{k,l}(x) ds_y ds_x) \cdot \gamma_{i,j} +$$
$$+ (\int_\Gamma \int_\Gamma -\frac{1}{\pi} log|x-y| \vartheta_{i,0}(y) \mu_{k,l}(x) ds_y ds_x) \cdot c_h +$$
$$+ (\int_\Gamma \mu_{k,l}(x) ds_x) \cdot \omega_h = \int_\Gamma 2g(x) \mu_{k,l}(x) ds_x,$$
$$\forall\, (k,l) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, N\};$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} (-\frac{1}{\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma log|x-y| \mu_{i,j}(y) \vartheta_{i,0}(x) ds_y ds_x) \cdot \gamma_{i,j} +$$
$$+ (\int_\Gamma \int_\Gamma -\frac{1}{\pi} log|x-y| \vartheta_{i,0}(y) \vartheta_{i_0}(x) ds_y ds_x) \cdot c_h +$$
$$+ (\int_\Gamma \vartheta_{i_0}(x) ds_x) \cdot \omega_h = \int_\Gamma 2g(x) v_{i,0}(x) ds_x$$
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} (\int_\Gamma \mu_{i,j}(x) ds_x) \gamma_{i,j} + (\int_\Gamma \vartheta_{i0}(x)) \cdot c_h + 0 \cdot \omega_h = \beta$$

Wegen der Singularität von ϑ_{i_0} in z_{i_0} erhalten wir folgende Verhaltensaussage:

1) $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha_{i_0}}-1})$ für die Einträge $a_{i_0N,mN+1}$ und a_{mN+1,i_0N};

2) $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{O}(\varepsilon^{2(\frac{1}{\alpha_{i_0}}-1)})$ für $a_{mN+1,mN+1}$.

Es gibt zwei Möglichkeiten diese Matrixelemente abzuschätzen. Die erste ist die Auswahl des Cauchy - Hauptwertes des Integrals als Matrixelement (siehe sazu [17]). Die zweite Möglichkeit besteht darin, die singuläre Funktion ϑ_{i_0} auf dem Ansatzraum des regulären Anteils zu projezieren und dann die entsprechenden Integrale zu berechnen. Wir lösen also zusätlich:

Finde $P_h\varphi_{i_0} = \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^N \delta_{i,j}\mu_{i,j} \in H_h$ *so, daß*

$$\langle P_h v_{i0}, \chi_h\rangle = \langle_{i0}, \chi_h\rangle, \quad \forall\, \chi_h \in H_h. \tag{166}$$

Die Steifigkeitsmatrix läßt sich einfach berechnen und $P_h\vartheta_{i_0}$ wird *nur* in den oben genannten 3 Integralen anstelle von ϑ_{i_0} eingesetzt.

Die Galerkin Matrix ist im allgemeinen schlecht konditioniert; die Konditionszahl wächst mit der Netzverfeinerung. Wenn man die Komponenten σ und ω skaliert, werden die Lösungseigenschaften nicht verändert. Dagegen verändert eine Manipulation der diskreten Gleichungen (geeignete Multiplikation mit reelen Konstanten) die Konditionszahl der Matrix. Eine solche Vorkonditionierung wurde von Wendland und Christiansen [16] studiert und eine optimale Wachstumrate $\mathcal{O}(\frac{1}{h})$ wurde erhalten.

Satz 4.5 *Es existiert ein* $h_0 > 0$ *so, daß für alle* $h \in (0, h_0)$, *das Galerkin System eindeutig lösbar ist in* $Z_h \times \mathbb{R}$. *Für* $h \to 0$ *konvergiert die approximative Lösung* $(\sigma_h, \omega_h) \in Z_h \times \mathbb{R}$ *gegen die exakte Lösung* $(\sigma, \omega) \in Z^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{R}$. *Für* $-2 < t \le r < 1$ *folgt, unter der Voraussetzung*

$$g \in H^{max\{1,r+1\}}(\Gamma)$$

die Existenz einer Konstante $C > 0$ *so, daß*

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{Z^t(\Gamma)} + |\omega - \omega_h| \le C h^{r-t-\varepsilon}\{\|g\|_{H^{r+1}}(\Gamma) + |\beta|\}. \tag{167}$$

Die Konstante C *ist unabhängig von* $(\sigma,\omega), (\sigma_h, \omega_h)$, *von den Daten* (g, β) *und von* h. *Für* $t < 0$ *gilt (167) mit* $\varepsilon = 0$; *ansonsten gilt (167) für* $\varepsilon > 0$ *beliebig.*

Beweis: siehe [10], Th. 5.3.

Seien $(\sigma_h^k, \omega_h^k) = (\sigma_{0,h}^k + c_h^k v_{i_0}, \omega_h^k) \in Z_h \times \mathbb{R}, k = 1, 2$ die approximative Lösungen der Systeme (S1) und (S2). Dann ist

$$(\sigma_h, \omega_h) = (\beta\sigma_{0,h}^1 + \sigma_{0,h}^2 + (\beta c_h^1 + c_h^2)v_{i0}, \beta\omega_h^1 + \omega_h^2) \tag{168}$$

approximative Lösung des ursprünglichen Problems. Diese Lösung ist regulär genau dann wenn

$$\beta c_h^1 + c_h^2 = 0.$$

Aus der Konvergenz der Galerkin Lösung und mit $c^1 \neq 0$ folgt die Existenz eines $0 < h_1 < h_0$ so, daß

$$c_h^1 \neq 0, \quad \forall\, 0 < h \le h_1.$$

Wir wählen also

$$\beta := -\frac{c_h^2}{c_h^1} \tag{169}$$

als den einzigen Wert für β, für den sich eine reguläre (also beschränkte) Lösung in der Nähe von z_{i_0} ergibt. Wie diskutiert, modellieren $-\beta$ und σ die Zirkulation bzw. die normale Ableitung von Ψ_S (Ψ_S = die Stromfunktion der Störströmung). Damit folgt die Regularität von $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$, wobei Ψ die Stromfunktion des gemeinsamen Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}$ ist. Wegen der Identität

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}(z) = v_\tau(z), \quad \forall\, z \in \mathcal{U}(z_{i0}) \tag{170}$$

folgt daßfür die berechnete Zirkulation - β, die tangentielle Geschwindigkeit an der Hinterkante endlich bleibt, d.h. die Kutta - Joukowskische Bedingung erfüllt ist.

LITERATUR

1. B a b u ŝ k a, I., A z i z, A.K. – *Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method*, The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (ed. A.K.Aziz), New York, Academic Press, 1972, 3 - 359.
2. B e r g e r, H., W a r n e c k e, G., W e n d l a n d, W.L. – *Analysis of a FEM/BEM Coupling method for transonic flow computations*, 1993.
3. B e r g e r, H., W a r n e c k e, G., W e n d l a n d, W.L. – *Finite elements for transonic potential flows*, Numer. Meth. Part. Diff. Eqns. 6, 1990, 17 - 42.
4. C o s t a b e l, M., S t e p h a n, E. – *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation*, Math. Models and Methods in Mechanics, Banach Center Publications Warshau, 15, 1985, 175 - 251.
5. D j a o u a, M. – *A method of calculation of lifting flows around two - dimensional corner - shaped bodies*, Mathematics of Comp. 36, vol. 154, 1981.
6. G a i e r, D. – *Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung*, Math. Z. 147, 1976, 113 - 129.
7. G r i s v a r d, P. – *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24 Pitman, 1985.

8. Hsiao, G.C., Kopp, P., Wendland, W.L. – *A Galerkin Collocation method for some integral equations of the first kind*, Computing 25, 1980, 89 - 130.
9. Hsiao, G.C., Kopp, P., Wendland, W.L. – *Some applications of a Galerkin Collocation method for boundary integral equations of the first kind*, Math. Meth. in the Appl. Sci. 6, 1984, 280 - 325.
10. Hsiao, G.C., Stephan, E., Wendland, W.L. – *On the Dirichlet problem in elasticity for a domain exterior to an arc*, J. of Comp. and Appl. Math. 34, 1991, 1 - 19.
11. Hsiao, G.C., Wendland, W.L.– *A finite element method for an integral equation of the first kind*, J. Math. Anal. Appl. 58, 1977, 449 - 481.
12. Le Roux, M.N. – *Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problémes extérieurs en dimension 2*, R.A.I.R.O. 11, 1977, 27 - 60.
13. Nedelec, J.C., Planchard, J. – *Une methode variationelle d'elements finis pour la resolution numerique d'un probleme exterieur dans $\mathbb{R}^2$*, R.A.I.R.O., R3, 1973, 105 - 129.
14. Ruotsalainen, K. – *On the boundary element method wish mesh refinement on curves with corners*, Journal of Computational and Applied Mathematics.
15. Stephan, E., Wendland, W.L. – *An augmented Galerkin procedure for the boundary integral method applied in two - dimensional screen and crack problems*, Appl. Anal. 18, 1984, 183 - 219.
16. Wendland, W.L., Christiansen, S. – *On the condition number of the influence matrix belonging to some first kind integral equations with logarithmic kernel*, Appl. Anal. 21, 1986, 175 - 183.
17. Wendland, W.L., Stephan, E., Hsiao, G.C. – *On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem of the Laplacian*, Math. Meth. in Appl. Sci. 1, 1979, 265 - 321.
18. Zierep, J. – *Theoretische Gasdynamik*, G. Braun Karlsruhe, 1976.

Received:5.04.1994

Department of Mathematics
"Al.I.Cuza" University
6600 - Iaşi
ROMANIA

Mathematisches Institut
Angewandte Matematik
Univ. Stuttgart
Lehrstuhl, 6
GERMANY

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matematica, 1994, f.2.

BOOK REVIEWS *RECENZII*

YURII NESTEROV, ARKADII NEMIROVSKII - *Interior - Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM Studies in Applied Mathematics : Vol. 13, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1993, 405 p., ISBN 0 - 89871 - 319 - 6, $ 68.50.

Scopul cărţii este prezentarea unei teorii generale a metodelor de punct interior cu timp polinomial pentru programarea convexă. Monografia dă posibilitatea prezentării unitare a tuturor metodelor cunoscute din această categorie, punându-se accentul pe teoria complexităţii lor. Generalitatea teoriei propuse permite extinderea metodelor cunoscute de punct interior şi dezvoltarea unor metode noi aplicabile la o mare varietate de probleme neliniare convexe de optimizare: programarea pătratică cu restricţii pătratice, programarea geometrică, aproximarea în sensul normei din L_p, rezolvarea unor probleme de design structurat. O clasă de probleme de un interes special acoperite de această schemă generală sunt cele cu matrice pozitiv - semidefinite ca variabile, care au o serie de aplicaţii în teoria controlului optimal, în optimizarea combinatorială, în teoria grafurilor şi informatică.

Lucrarea este adresată celor interesaţi în probleme de optimizare, incluzând teoria, algoritmii de rezolvare şi diferitele aplicaţii. Cartea este structurată pe 8 capitole, 2 apendixuri, o bogată bibliografie, comentarii bibliografice ample şi un index.

C. Ilioi

R.R. AKHMEROV, M.I. KAMENSKII, A.S. POTAPOV, A.E. RODKINA, B.N. SADOVSKII - *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser, 1992, VIII + 249 p., sFr. 128, DM 148, ISBN 3 - 7643 - 2716 - 2.

Monografia de faţă constituie un studiu detaliat şi aprofundat al noţiunilor şi rezultatelor legate de măsurile de necompactitate şi operatorii de condensare. Operatorii de condensare transformă mulţimi cu un