7. N i c o l e s c u, L.J. – *On a weak mean value theorem*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 10 (1965), pp. 145–148.

8. N i c o l e s c u, M. – *Contributions to a hyperbolic analysis of the plane*, (Romanian), St. Cerc. Mat., 3 (1952), pp. 7–51.

Received:28.IV.1995

Seminarul Matematic "Al.Myller"
Universitatea "Al.I.Cuza" Iaşi
11, Bulevardul Copou
6600, Iaşi
ROMANIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XLI, s.I a, Matematică, 1995, f.2

SUR LE THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

PAR

Gh.BANTAŞ

En général, un théorème de type Lagrange pour une fonction $f : X \to Y$ et deux points $a, b \in X$ exprime une évaluation de la différence $f(b) - f(a)$ ou bien de la norme $\|f(b) - f(a)\|$ à l'aide d'une expression dont la structure dépend du but poursuivi. Pour les fonctions à valeurs réelles cette estimation s'exprime par une égalité, tendis que pour celles à valeurs vectorielles, par une relation d'inegalité pour $\|f(b) - f(a)\|$ et d'appartenence pour $f(b) - f(a)$ ([1], [3], [6] – [9]). Mais des exemples simples ont montré que dans le cas des fonctions à values vectorielles on ne peut pas avoir, en général, des formules avec le signe "="comme dans la formule classique de Lagrange où le point intermédiaire c dépend seulement de la fonction f. Une modalité d'obtenir la formule de type Lagrange avec le signe d'égalité, pour les fonctions á valeurs vectorielles òu le point c dépend seulement de l'application f consiste á renoncer que ce point appartienne á l'interval $[a, b]$. Mais dans ce cas le probléme a un caractére locale dans le sens que la formule de Lagrange fonctionne dans un voisinage suffisamment petit du point a dan lequel se trouve autant le point b que le point intermédiaire c. Ainsi, pour la fonction $f(z) = e^z$ avec $z \in \boldsymbol{C}$ et $a = 0$, la formule de Lagrange fonctionne seulement sur le disque $S(0, r)$ avec $r < 2\pi$. Sur le disque $S(0, r')$ avec $r' > 2\pi$ elle ne functionne plus car pour $b = 2\pi i \in S(0, r')$ on ne peut pas avoir $f(2\pi i) - f(0) = e^c 2\pi i$, quelque soit $c \in S(0, r')$. Une formule de type Lagrange dans le sens mentionné implique donc une liaison plus étroite entre la fonction f et la structure des espaces X et Y que dans le cas de l'estimation de la norme $\|f(b) - f(a)\|$. Un premier pas dans cette direction a été fait par D.Pompeiu [10]. Dans cet ouvrage nous présentons un résultat et quelques conséquences relativement à ce sujet.

Définition. *Un interval $[a, b] \subset X$, où X est un espace vectoriel sur $\boldsymbol{R}$, s'appelle de direction $h \in X$ s'il exists un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $b - a = \lambda h$.*

Théoréme. *Soient X, Y des espaces de Banach, $h \in X$ un élément non nul fixé, $D \subseteq X$ un ensemble ouvert et $f : D \to Y$ différentiable dans la direction h. Supposons que $df(\cdot)(h)$ est continue sur D et que $df(D)(h)$ est ouvert. Alors pour chaque $a \in D$ il y a un voisinage $V \subset D$ de a ayant la propriété que pour chaque interval $[a, b] \subset V$ de direction h il existe un point $c \in V$ tel que*

$$f(b) - f(a) = df(c)(b - a).$$

Démonstration. Soient $a \in D$ un point fixé, $d_h(x) = df(x)(h)$ et $\bar{a} = d_h(a)$. Du fait que $d_h(D)$ est ouvert il résulte que $\bar{a}$ est point intérieur de cet ensemble. Soit $S = S(\bar{a}, r) \subset d_h(D)$ une boule ouvert à centre $\bar{a}$ et de rayon $r > 0$. De la continuité de d_h il s'en suit que $V = d_h(S)$ est un voisinage ouvert de a. Nous obtenons

$$\forall x \in V : d_h(x) \in S. \tag{1}$$

Soit $b \in V$ un point fixé tel que $[a, b] \subset V$ ait la direction h. Soit $\lambda > 0$ tel que $b - a = \lambda h$. Pour prouver l'affirmation du théoréme il suffit de montrer que $E = f(b) - f(a) \in \lambda S$, c'est-à-dire que, $\|E - \lambda\bar{a}\| < \lambda r$. Si l'on suppose le contraire nous avons

$$\|E - \lambda\bar{a}\| \geq \lambda r \tag{2}$$

Soit s_0 le milieu de $[a, b]$. Alors $E = \frac{1}{2}[2(f(b) - f(s_0)) + 2(f(s_0) - f(a))]$.

D'ici et de (2) l'on déduit qu'au moins une des expressions, $2(f(b) - f(s_0))$ et $2(f(s_0) - f(a))$ se trouve à l'extérieur de la boule λS. Soient $E_1 = 2[f(b_1) - f(a_1)]$ l'expression ayant cette propriété et $[a_1, b_1]$ l'intervale correspondant. Donc nous avons

$$\|b_1 - a_1\| = \frac{1}{2}\|b - a\|, \|E_1 - \lambda\bar{a}\| \geq \lambda r \tag{3}$$

Avec E_1 nous procédons de la même manière que nous avons procedé avec E. Soit s_1 le milieu de $[a_1, b_1]$. Alors

$$E_1 = \frac{1}{2^2}[2^2(f(b_1) - f(s_1)) + 2^2(f(s_1) - f(a_1))]$$

D'ici et de (3) l'on déduit qu'au moins une des expressions $2^2(f(b_1) - f(s_1))$ et $2^2(f(s_1) - f(a_1))$ se trouve à l'extérieur de la boule λS. Soient $E_2 = 2^2[f(b_2) - f(a_2))]$ l'expression ayant cette propriété et $[a_2, b_2]$ l'intervale correspondant. Nous obtenons

$$\|b_2 - a_2\| = \frac{1}{2^2}\|b - a\|, \qquad \|E_2 - \lambda\bar{a}\| > \lambda r \tag{4}$$

Si l'on continue ce procés, on obtient une suite (E_n) d'expressions

$$E_n = 2^n[f(b_n) - f(a_n)], \ \|b_n - a_n\| = \frac{1}{2^n}\|b - a\|, \ \|E_n - \lambda\bar{a}\| \geq \lambda r \tag{5}$$

D'apres le théorème de Cantor, la suite décroissante de segments $([a_n, b_n])$ a un seul point commun. Soit s ce point. Évidemment, $s \in [a, b]$, $a_n \to s$ et $b_n \to s$ pour $n \to \infty$. Nous démontrons que

$$\lim_{n\to\infty} E_n = df(s)(b - a) \tag{6}$$

Dans ce but considérons la fonction $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$ avec $t \in [0, 1]$. Soit $\tau, \alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$ les points correspondant à $s, a_n, b_n \in [a, b]$ par l'application inverse de $t \to a + t(b - a)$. Nous avons :

$$\beta_n - \alpha_n = 2^{-n}, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \tau \text{ et } \alpha_n \leq \tau \leq \beta_n.$$

Alors, pour $\alpha_n \neq \tau$ et $\beta_n \neq \tau$ nous avons :

$$E_n = 2^n[f(b_n) - f(a_n)] = \frac{\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} =$$

$$= \frac{\varphi(\beta_n) - \varphi(\tau)}{\beta_n - \tau} \cdot \frac{\beta_n - \tau}{\beta_n - \alpha_n} + \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\alpha_n)}{\tau - \alpha_n} \cdot \frac{\tau - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}$$

D'ici il résulte que E_n se trouve entre $\frac{\varphi(\beta_n) - \varphi(\tau)}{\beta_n - \tau}$ et $\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\alpha_n)}{\tau - \alpha_n}$ qui, par hypothése, convergent à $\varphi'(\tau) = df(s)(b - a)$. Donc, $\lim_{n\to\infty} E_n = df(s)(b - a)$.

Pour $\alpha_n = \tau$ (respectivement $\beta_n = \tau$) l'affirmation (6) résulte aisément de la définition de la dérivabilité de l'application φ.

De la relation (6) et de $\|E_n - \lambda\bar{a}\| \geq \lambda r$ il s'en suit que $df(s)(b - a) \notin \lambda S$, c'est-à-dire $df(s)(\lambda H) \notin \lambda S$, ou bien $df(s)(h) \notin S$ ce qui contredit l'affirmation (1). Donc il serait absurde de suppose que $f(b) - f(a) \notin \lambda S$. Par conséquent, $f(b) - f(a) \in \lambda S$. D'ici et du fait que $d_h^{-1}(S) = V$ l'on déduit qu'il existe un $c \in V$ tel quel

$$f(b) - f(a) = \lambda df(c)(h) = df(c)(\lambda h) = df(c)(b - a). \ \blacksquare$$

Remarques.

1) La conclusion du théorème précedént peut être enoncé ainsi: Pour chaque point $p \in D$ il y a un voisinage $V \subset D$ de p ayant la propriété

que pour chaque interval $[a, b] \subset V$ de direction h il existe un point $c \in V$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.

2) Si dans ce théorème f est différentiable en chaque direction $h \in X$ alors le voisinage V dépend tant du point choisi $a \in D$ que de la direction choisie $h \in X$. Dans le cas particulier des functions $f: D \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ et $f: D \subset \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, le voisinage V est indépendent du choix de la direction h ce qui est dû à la structure de corps des espaces $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{C}$.

Conséquence 1. *Si $f: D \subseteq \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ est différentiable dans la direction h et $df(\cdot)(h)$ est local injective et continue dans le domaine D, alors la conclusion du théorème est vraie.*

Démonstration. L'affirmation se base sur le théorème précédent et sur le théoréme de Brouwer de l'invariance du domaine. ∎

En ce qui suit nous présentons d'autres conséquences de ce théorème où la condition que $df(D)(h)$ soit ouvert est remplacée par des conditions exprimées en terms d'holomorphie et de différentiabilité Fréchet et Gâteaux.

Conséquence 2. *Si $f: D \subseteq \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ est holomorphe dans le domaine D, alors pour chaque $a \in D$ il y a un voisinage $V \subset D$ de a ayant la propriété que pour chaque interval $[a, b] \subset V$ il existe un point $c \in V$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.*

Démonstration. Si f' est constant dans D, alors f est affine dans D et l'affirmation du théorème est vérifiée. Supposons que f' ne pas constante dans D. Du fait que f est holomorphe dans D il résulte qu'aussi f' est holomorphe dans D. Donc f' est holomorphe et non constant dans D. Donc f' est ouvert dans D. D'ici, du théorème précédent et du fait que l'espace $\boldsymbol{C}$ est un corp il résulte que pour chaque $a \in D$ il y a un voisinage V de a indépendent de la direction h ayant la propriété du théorème. ∎

Remarque. Le résultat de cette conséquence appartient à D.Pompeiu [10].

Conséquence 3. *Si $f: D \subseteq \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^m$ avec $n \geq m$ est holomorphe et $df(\cdot)(h)$ est non dégénérée dans le domaine D, alors la conclusion du théorème est vraie.*

Conséquence 4. *Si $f: D \subseteq \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^m$ est holomorphe dans le domaine D et chaque $a \in D$ est un point isolé de l'ensemble*

$$(df(\cdot)(h))^{-1}(df(a)(h)).$$

Démonstration. L'affirmation se base sur la théorème précédent et sur le résultat suivant : Si $f: D \subseteq \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^m$ est holomorphe dans le domaine D et chaque point $a \in D$ est un point isolé de l'ensemble $f^{-1}(f(a))$ alors $f(D)$ est ouvert dans $\boldsymbol{C}^m$ ([5], chap.IV, §5, conséquence 1 du théorème 11). ∎

Conséquence 5. *Soit $f: X \to Y$ une application différentiable dans la direction $h \in X$, où X, Y sont des espaces de Banach et D est ouvert en X. Si $df(\cdot)(h)$ est de classe C^1 dans D et sa différentielle Fréchet, $\delta(df(\cdot)(h)(a)$ est un surjection pour chaque $a \in D$ alors la conclusion du théorème précédent se mentient.*

Démonstration. L'affirmation se base sur le théorème précédent et sur un résultat bien connu de Graves [4] qui établit des condition suffisantes pour qu'une application soit ouverte. ∎

Conséquence 6. *Soient X, Y des espaces de Banach et $f: X \to Y$ une application différentiable dans la direction h. Supposons que $df(\cdot)(h)$ est continue et différentiable Gâteaux dans un ouvert $D \subseteq X$ et que, pour chaque $a \in D$ il y a $r > 0$ et $r' > 0$ tel que pour tout $x \in D$ avec $\|s - a\| < r'$ on ait $d^2 f(x)(h)(S(0, 1)) \supseteq S(0, r)$. Alors, la conclusion du théorème reste valable.*

Démonstration. L'affirmation se base sur le théorème précédent et sur le théorème suivant de Cramer et Ray ([2], p.44) : Soient X, Y des espaces de Banach, $f: X \to Y$ un opérateur différentiable Gâteaux ayant le graphe fermé et $D \subseteq X$ un ensamble ouvert. Supposons que pour chaque $a \in D$ il y a un $r > 0$ et $r' > 0$ tels que, si $\|x - a\| \leq r'$ alors $df(x)(S(0, 1)) \supseteq S(0, r)$. Dans ce cas $f(D)$ est un ensemble ouvert dans Y. ∎

Conséquence 7. *Soient X, Y des espaces de Banach, $f: X \to Y$ une application différentiable dans la direction h et $df(\cdot)(h)$ continue dans X. Supposon que $(df(\cdot)(h))^{-1}(K)$ est bornée pour chaque ensamble relativment compact K et que pour tout $r \geq 0$ il existe $r' > 0$ tel que pour chaque $x \in X$ avec $\|x\| \leq r$ on ait $d^2 f(x)(h)(S(0, 1)) \supseteq S(0, r')$. Alors pour chaque $a \in X$ a lieu la conclusion de théorème.*

Démonstration. Cette conséquence découle de notre théorème et du théorème suivant de Cramer et Ray ([2], p.45) : Soient X, Y des espaces de Banach et $f: X \to Y$ un opérateur différentiable Gâteaux ayant le graphe fermé. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites : 1) $f^{-1}(K)$ est borné si K est compact; 2) Pour tout $r > 0$ il y a un $r' > 0$ tel que si

$\|x\| \leq r$ alors $df(x)(S(0,1)) \supseteq S(0,1)$. Dans ce cas, f est une application ouverte de X sur Y. ■

L'auteur desire mentionner les discussions utiles qu'il a eu avec C.Ursescu.

BIBLIOGRAPHIE

1. B o u r b a k i, N. — *Eléments de Mathématique*, Livre IV, Fonctions d'une variable réelle. Chap.1,2,3, 2nd ed. Herman, Paris, 1958.
2. C r a m e r, W.J. and R a y, W.O. — *Solvability of nonlinear operator equations*, Pacific J.Math., 1981 **95**(1), p.37 - 50.
3. F l e t t, T.M. — *Differential analysis*, Cambridge Univ.Press, 1980.
4. G r a v e s, L.M. — *Some mapping theorems*, Duke Math.J., 1950, **17**, p.111-114.
5. H e r v é, M. — *Several complex variables. Local theory*, Oxford Univ.Press, Bombay, 1963.
6. H i r i a r t - U r r u t y, J.B. — *Mean value theorems in nonsmooth analysis*, Numer.Funct.Anal. and Optimiz., 1980, **2**(1), p.1-30.
7. H i r i a r t - U r r u t y, J.B. — *Théorème de valeur moyenne sous forme d'égalité pour les fonctions à valeurs vectoriells*, Revue Math.Spec., 1983, p.287-293.
8. Mc L e o d, R.M. — *Mean value theorems for vector-valued functions*, Proc.Edinburg Math.Soc., 1965, **14**, p.197-209.
9. N a s h e d, M.Z. — *Differentiability and related properties on nonlinear operators : Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis*, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Proc. Advanced Sem., Math.Res.Center, Univ.of Wisconsin, Madison, 1970, ed. by L. Rall, p.103-309, Academic Press, New-York, 1971.
10. P o m p e i u, D. — *Sur l'extension du théorème des accroissements finis aux fonctions analitiques d'une variable complexe*, Rend.Circolo Mat.Palermo, 1905, **19**, p.309-313.

Received:28.IV.1995

Université "Al.I.Cuza" Iaşi
Seminaire mathématique "A. Myller"
11, Boulevard Copou
Jassy 6600
ROMANIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XLI, s.I a, Matematică, 1995, f.2

BARRELLEDNESS OF CLASS $\aleph_0$ OF THE SPACE $l_0^\infty(X,\mathcal{A})$ AND MEASURE THEORY

BY

J.R.FERRER, L.M.SÁNCHEZ RUIZ

1. Introduction and background. Let us recall that a Hausdorff locally convex space E is Baire-like [5] if given an increasing sequence of closed absolutely convex subsets of E covering E, there is one of them that is a neighbourhood of the origin; and E is suprabarrelled [6] if given an increasing sequence of subspaces of E covering E, there is one of them which is dense and barrelled. Following ideas of [4], we will call barrelled of class 1 to the suprabarrelled spaces and, for each $n \geq 2$, we will say that the space E is barrelled of class n if given an increasing sequence of subspaces of E covering E, there is one of them which is barrelled of class $n-1$, this also being true for $n = 1$ if we consider Baire- like spaces as barrelled spaces of class 0. If E is barrelled of class n for every $n \in \boldsymbol{N}$, then E is said to be barrelled of class $\aleph_0$ [2].

On the other hand, following V a l d i v i a [7], let us denote by $l_0^\infty(X,\mathcal{A})$ the real or complex space generated by the characteristic functions $e(A)$ defined on the elements of a σ-algebra $\mathcal{A}$ on a set X, and endowed with the norm $\|z\| = sup\{z(j): j \in X\}$. In that paper, using duality theory arguments and *sliding hump* methods, Valdivia proved that $l_0^\infty(X,\mathcal{A})$ is suprabarrelled and used that fact to obtain some measure theory results. R o d r i g u e z S a l i n a s [4] stated that $l_0^\infty(X,\mathcal{A})$ was even barrelled of class 2. Indeed, this space is barrelled of class $\aleph_0$, [1], and hence you may reinforce the measure results obtained by Valdivia. In [3] we gave a proof of the suprabarrelledness of $l_0^\infty(X,\mathcal{A})$ using measure theory techniques; the aim of this paper is to show that these techniques are also valid in order to prove that $l_0^\infty(X,\mathcal{A})$ is barrelled of class $\aleph_0$. Throughout all the paper $\mathcal{A}$ will stand for a α-algebra on a set X.

We finish recalling that given $s \in \boldsymbol{N}$, a subset $P \subset \boldsymbol{N}^s$ is said to be of class s [1], if there are infinitely many $n_1 \in \boldsymbol{N}$ such that there are some