ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XLI, s.I.a, Matematică, 1995, f.2

DUALISATION DU CISAILLEMENT TRANSVERSE DANS LE MODÈLE DE NAGHDI POUR LA FLEXION DES COQUES MINCES

PAR

GABRIELA ŢÂRDEA*

Abstract. The Nagdhi's bidimensional model for thin shells is considered. We build a mixed formulation which dualizes the transverse shear only, the bending moment and the membrane stress being searched in $\left[L^2(\omega)\right]_s^4$. For the continuous and discrete problem we prove existence and uniqueness of the solution. A result of error approximation is established.

Résumé. On prend en considèration le modèle bidimensionnel de Naghdi pour les coques minces en flexion. On construit une formulation mixte, duale en cisaillement et primale en l'effort membranaire et le moment de flexion. Pour cette formulation, on démontre l'existence et l'unicité de la solution continue et discrète. Des majorations d'erreur sont établies.

1. Le problème continu. Dans ce qui suit, les lettres grecques (sauf ε) prennent leurs valeurs dans l'ensemble d'indices et exposants $\{1,2\}$ et celles latines les prennent dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. On utilise la convention de sommation des indices et exposants répétés.

On considère une coque élastique, constituée d'un matériau homogène et isotrope et encastrée sur tout son bord latéral. Pour les notations ainsi que la description de la géométrie de la coque on se reporte à [2].

Etant donnés un champ $\underset{\sim}{v}$ de vecteurs tangents à S, la surface moyenne de la coque, ainsi qu'un champ de tenseurs $\underset{\approx}{T}$ tangents à S on utilise les

* Ce papier représente la version écrite de l'exposé presenté aux journées de l'Université "Al.I.Cuza", qui a eu lieu à Iaşi, le 27 Octobre 1995

notations suivantes:

$$\begin{cases} div\ \underset{\sim}{v} = v^{\alpha}{}_{,\alpha}\ ; \quad Div\ \underset{\sim}{v} = v^{\alpha}\ |_{\alpha}; \\ \left(\underset{\sim}{div}\underset{\approx}{T}\right)^{\lambda} = T^{\alpha\lambda}{}_{|\alpha}\ ; \quad \left(\underset{\sim}{Div}\underset{\approx}{T}\right)^{\lambda} = T^{\alpha\lambda}\ |_{\alpha}; \\ e_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{v}) = \dfrac{1}{2}(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}), \end{cases}$$

où | désigne la dérivation covariante par rapport à la métrique $a_{\alpha\beta}$ [2].

Ces quantités sont liées par les deux formules:

$$Div\ \underset{\sim}{v} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ div\left(\sqrt{a}\ \underset{\sim}{v}\right); \quad \underset{\sim}{Div}\underset{\approx}{T} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}T^{\alpha\beta}\overrightarrow{a_\beta}\right)_{,\alpha}\cdot\overrightarrow{a^\lambda}$$

où "·" désigne le produit scalaire.

En vue de l'obtention de la formulation mixte à laquelle on s'intéresse, on part du modèle de Naghdi écrit en formulation primale [2]. Ce problème s'écrit sous la forme suivante:

$$(1) \qquad \begin{cases} trouver\ X = (\xi, s) \in V\ tel\ que \\ \forall(\eta, r) \in V, a((\xi, s), (\eta, r)) = b(\eta, r), \end{cases}$$

avec l'espace $V = \left[H_0^1(\omega)\right]^5$, la forme bilinéaire $a(.,.)$ définie par:

$$\begin{aligned} & a((\xi, s), (\eta, r)) = \\ & = \int_\omega \left\{\varepsilon a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}(\xi)\gamma_{\alpha\beta}(\eta) + \frac{\varepsilon^3}{3}a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\rho\sigma}(\xi, s)\chi_{\alpha\beta}(\eta, r)\right\}\sqrt{a}\ d\omega + \\ & + \int_\omega \varepsilon a^{\alpha3\beta3}\gamma_{\alpha3}(\xi, s)\gamma_{\beta3}(\eta, r)\sqrt{a}\ d\omega, \end{aligned}$$

la forme linéaire $b(\cdot)$ étant donnée par:

$$b((\eta, r)) = \int_\omega p^i\eta_i\sqrt{a}\ d\omega,$$

où, si λ et μ désignent les constantes de Lamé du matériau:

$$\begin{cases} a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \dfrac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\rho\sigma} + 2\mu\left(a^{\alpha\rho}a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma}a^{\beta\rho}\right), \\ a^{\alpha3\beta3} = 8\mu a^{\alpha\beta}, \\ \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = \dfrac{1}{2}\left(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}\right) - b_{\alpha\beta}\eta_3, \\ \chi_{\alpha\beta}(\eta, r) = \dfrac{1}{2}\left(r_{\alpha|\beta} + r_{\beta|\alpha}\right) - \dfrac{1}{2}b_\alpha^\rho\left(\eta_{\rho|\beta} - b_{\rho\beta}\eta_3\right) - \dfrac{1}{2}b_\beta^\sigma\left(\eta_{\sigma|\alpha} - b_{\alpha\sigma}\eta_3\right), \\ \gamma_{\alpha3}(\eta, r) = \dfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha\eta_3 + b_\alpha^\rho\eta_\rho + r_\alpha\right). \end{cases}$$

On introduit, à l'aide des relations suivantes, les trois quantités:

$$(2) \qquad \begin{cases} n^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta}(X) = \varepsilon\sqrt{a}\ a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}(X), \\ m^{\alpha\beta} = m^{\alpha\beta}(X) = \dfrac{\varepsilon^3}{3}\sqrt{a}\ a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\rho\sigma}(X), \\ t^{\alpha3} = t^{\alpha3}(X) = \varepsilon\sqrt{a}\ a^{\alpha3\beta3}\gamma_{\beta3}(X) \end{cases}$$

Remarque 1. Ces trois quantités, à $\sqrt{a}$ près, sont respectivement l'effort membranaire, le moment de flexion et le cisaillement transverse.

Remarque 2. L'introduction de l'exposant trois dans la dernière relation de (2) permet de garder par la suite une écriture homogène.

Les équations d'équilibre sont:

$$(3) \qquad \begin{cases} -(n^{\alpha\beta}\overrightarrow{a_\beta})_{,\alpha}\cdot\overrightarrow{a^\lambda} + (m^{\alpha\beta}b_\alpha^\rho\overrightarrow{a_\rho})_{,\beta}\cdot\overrightarrow{a^\lambda} + \dfrac{1}{2}t^{\alpha3}b_\alpha^\lambda = \sqrt{a}\ p^\lambda, \\ -\dfrac{1}{2}div\ \underset{\sim}{t} - n^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = p^3\ \sqrt{a}, \\ -(m^{\alpha\beta}\overrightarrow{a_\beta})_{,\alpha}\cdot\overrightarrow{a^\lambda} + \dfrac{1}{2}t^{\lambda3} = 0. \end{cases}$$

La surface moyenne de la coque étant supposée donnée à l'aide d'une carte $\varphi \in C^3(\overline{\omega}; R^3)$, les relations (3) sont vérifiées au sens presque partout dans ω.

On note:

$$\begin{cases} T = (\underset{\sim}{t}, \underset{\approx}{n}, \underset{\approx}{m}); \quad X = (\xi, s); \xi = (\xi_3, (\xi_\alpha)_{\alpha=1,2}); \quad s = (s_\alpha)_{\alpha=1,2}, \\ R = (\underset{\sim 1}{R}, \underset{\approx 2}{R}, \underset{\approx 3}{R}); \quad Y = (\eta, r);\ \eta = (\eta_3, (\eta_\alpha)_{\alpha=1,2}); \quad r = (r_\alpha)_{\alpha=1,2}. \end{cases}$$

On introduit les espaces:

$$\begin{aligned} & W = W_1 \times W_2 \times W_2 = H(div;\omega) \times \left[L^2(\omega)\right]_s^4 \times \left[L^2(\omega)\right]_s^4, \\ & M = L^2(\omega) \times \left[H_0^1(\omega)\right]^2 \times \left[H_0^1(\omega)\right]^2. \end{aligned}$$

On considère les formes bilinéaires $A(\ ,\ )$ et $B(\ ,\ )$ et la forme linéaire

$F(.)$ définies par:

$$A(T,R) = \int_\omega \frac{1}{\varepsilon} t^{\alpha 3} g_{\alpha 3 \beta 3} R_1^{\beta 3} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega + \int_\omega \frac{1}{\varepsilon} n^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_2^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega +$$
$$+ \int_\omega \frac{3}{\varepsilon^3} m^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_3^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega,$$
$$B(R,Y) = \frac{1}{2}\int_\omega div\, \underset{\sim}{R}_1\, \eta_3\, d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} b_\alpha^\rho \eta_\rho\, d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} r_\alpha\, d\omega -$$
$$- \int_\omega R_2^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(Y)\, d\omega - \int_\omega R_3^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}(Y)\, d\omega,$$
$$F(Y) = \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a}\, d\omega,$$

où:

$$g_{\alpha 3 \beta 3} = \frac{1+\nu}{4E} a_{\alpha\beta};\ g_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1+\nu}{4E}\left[a_{\alpha\rho}a_{\beta\sigma} + a_{\alpha\sigma}a_{\beta\rho} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\alpha\beta}a_{\rho\sigma}\right].$$

La formulation mixte est la suivante:

$$(4) \qquad \begin{cases} trouver\ T \in W,\ X \in M\ tels\ que: \\ \forall R \in W, A(T,R) + B(R,X) = 0 \\ \forall Y \in M, B(T,Y) = -F(Y) \end{cases}$$

Théorème 1. *Le problème* (4) *admet une solution et une seule* (T,X). *De plus, ce* X *est la solution du problème primal* (1) *et la paire* $(X, T = (\underset{\sim}{t}, \underset{\approx}{n}, \underset{\approx}{m}))$ *est solution du problème* (4), $\underset{\sim}{t}, \underset{\approx}{n}$ *et* $\underset{\approx}{m}$ *étant construits à partir de* X *à l'aide des relations* (2).

Démonstration. On applique la théorie de Babuska-Brezzi (voir [7],[4]). Pour cela on établi d'abord l'ellipticité de $A(.,.)$ sur $Ker\,\mathcal{B}$, où:

$$\mathcal{B} : W \to M^* est\ défini\ par:$$
$$\forall R \in W,\ \forall Y \in M,\ < \mathcal{B}R, Y >_{M^*,M} = B(R,Y).$$

Celle-ci résulte en remarquant que:

$$Ker\,\mathcal{B} \subset K = \left\{R \in W\ ;\ B(R,Y) = 0,\ \forall Y \in L^2(\omega) \times \{0,0\} \times \{0,0\}\right\},$$

et en utilisant la relation:

$$(5) \qquad \exists C > 0,\ \forall R \in W,\ A(R,R) \geq \frac{C}{2}\|R\|^2_{0,\omega}.$$

La condition classique de compatibilité entre les espaces M et W est obtenue en construisant pour tout $Y \in M$ un élément $\mathcal{R}Y \in W$ tel que:

$$B(\mathcal{R}Y, Y) \geq C\|Y\|^2_M \quad \text{et} \quad \|\mathcal{R}Y\|_W \leq C\|Y\|_M.$$

On utilise pour cela le problème auxiliaire:

$$(6) \qquad \begin{cases} trouver\ \varphi_Y \in \left[H_0^1(\omega)\right]^5\ tel\ que: \\ \forall \psi = (\psi_3, (\psi_\alpha), (w_\alpha)) \in \left[H_0^1(\omega)\right]^5.\ A_1(\varphi_Y, \psi) = B_1(\psi), \end{cases}$$

avec:

$$A_1(\varphi_Y, \psi) = \int_\omega \{a^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha 3}(\varphi_Y)\gamma_{\beta 3}(\psi) + a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\alpha\beta}(\varphi_Y)\gamma_{\rho\sigma}(\psi)\}\sqrt{a}d\omega +$$
$$+ \int_\omega a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\alpha\beta}(\varphi_Y)\chi_{\rho\sigma}(\psi)\sqrt{a}\, d\omega,$$
$$B_1(\psi) = -\int_\omega \left\{\eta_3\psi_3 + e^{\alpha\beta}(\eta_\alpha)e_{\alpha\beta}(\psi_\alpha) + e^{\alpha\beta}(r_\alpha)e_{\alpha\beta}(w_\alpha)\right\} d\omega.$$

2. Le problème discret. En supposant l'ouvert ω convexe et polygonal, soient $k \geq 0$ un entier et $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\omega}$ au sens de Ciarlet [5]. On note par D_{k+1} l'espace d'équilibre d'ordre $k+1$ introduit par Raviart et Thomas [7], et par P_k l'espace des polynômes de degré au plus égal à k. On considère ensuite les espaces de dimension finie:

$$W_h = W_{h1} \times W_{h2} \times W_{h2} \subset W,$$
$$M_h = M_{h1} \times M_{h2} \times M_{h2} \subset M,$$
$$W_{h1} = \left\{\underset{\sim}{R}_h \in W_1;\ \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \underset{\sim}{R}_h|_T \in D_{k+1}\right\},$$
$$W_{h2} = \left\{\underset{\approx}{R}_h \in W_2;\ \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \underset{\approx}{R}_h|_T \in [P_k]^4_s\right\},$$
$$M_{h1} = \{\eta_h \in M_1;\ \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \eta_h|_T \in P_k\}$$
$$M_{h2} = \left\{\underset{\sim}{R}_h \in M_2;\ \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \underset{\sim}{R}_h|_T \in [P_{k+1}]^2\right\}.$$

Le problème discret s'écrit sous la forme suivante:

$$(7) \qquad \begin{cases} trouver\ T_h \in W_h, X_h \in M_h\ tels\ que: \\ \forall R_h \in W_h, A(T_h, R_h) + B(R_h, X_h) = 0 \\ \forall Y_h \in M_h, B(T_h, Y_h) = -F(Y_h) \end{cases}$$

Théorème 2. *Sous l'hypothèse que le problème auxiliaire est régulier et pour h assez petit le problème* (7) *admet une solution et une seule* (T_h, X_h).

Démonstration. L'ellipticité de $A(.,.)$ sur $Ker\mathcal{B}_h$ est établie en utilisant le résultat en continu et l'inclusion de $Ker\,\mathcal{B}_h$ dans K_h, l'analogue discret de K.

La condition de Babuska–Brezzi en discret est obtenue pour h assez petit en supposant qu'on a $\varphi_Y \in \left[H_0^1(\omega)\right]^5 \cap \left[W^{s+1,q}(\omega)\right]^5$, $0 < s < 1$, $q \geq 2$, $(s+1)q > 2$ et en utilisant l'égalité évidente:

$$B(R_h, Y_h) = B(R_h - R, Y_h) + B(R, Y_h), \tag{8}$$

avec:

$$\forall Y_h \in M_h, \qquad R = \mathcal{R}Y_h = (\underset{\sim 1}{R}, \underset{\approx 2}{R}, \underset{\approx 3}{R}) \in W,$$

$$\underset{\sim h1}{R} = \mathcal{E}_h^{k+1} \underset{\sim 1}{R}, \quad \underset{\approx h2}{R} = \mathcal{P}_k \underset{\approx 2}{R}, \quad \underset{\approx h3}{R} = \mathcal{P}_k \underset{\approx 3}{R}. \qquad R_h = (\underset{\sim h1}{R}, \underset{\approx h2}{R}, \underset{\approx h3}{R})$$

L'usage des propriétés de l'interpolé équilibre $\mathcal{E}_h$ dans $H(div;\omega) \cap \cap [W^{s,q}(\omega)]^2$ [1] ainsi que celles de la projection $\mathcal{P}_k$ [5] et [8] permet de conclure.

Remarque 3. La régularité C^3 de la carte φ est utilisée en vue de l'application du Lemme 5.5 de N e č a s [6]. Celui-ci permet, en multipliant une fonction $W^{s,q}$ par une fonction $C^{0,1}$, d'obtenir une fonction $W^{s,q}$ (s non entier).

3. Majoration d'erreur. On dénote par $\mathcal{A}$ la constante de continuité de $A(.,.)$, par α la constante d'ellipticité de $A(.,.)$ sur $Ker\,\mathcal{B}_h$, par $\mathcal{B}$ la constante de continuité de $B(.,.)$ et par β la constante de l'inf-sup en discret. On pose:

$$C_1(\varepsilon,\varphi) = (\mathcal{B}+1)\,Max\left(1 + \frac{\mathcal{A}}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right); \; C_2(\varepsilon,\varphi) = Max\left(3\,\frac{\mathcal{A}}{\beta}, 1 + \frac{\mathcal{B}}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right).$$

On utilise ensuite les résultats de majoration d'erreur pour les problèmes mixtes établis dans [7].

L'utilisation de normes naturelles donne le résultat suivant:

$$\varepsilon^2\|T - T_h\|_W + \varepsilon^5\|X - X_h\|_M \leq \tag{9}$$

$$\leq C\left\{\inf_{R_h \in W_h}\|T - R_h\|_W + \inf_{Y_h \in M_h}\|X - Y_h\|_M\right\}.$$

Remarque 4. En utilisant un changement d'échelle de la forme $\underset{\sim}{p} = \varepsilon^i \underset{\sim}{f}$ on trouve une erreur en ε^{-2} pour T et en $\varepsilon^{-(5-i)}$, $i = 1 .. 3$ pour X.

Mais le problème se préte très bien à l'utilisation des normes dépendant de l'épaisseur. Ainsi, on considère la norme suivante dans W:

$$\|R\|^2_{W,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{H(div;\omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \frac{1}{\varepsilon^3}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega}.$$

Ensuite, si on choisit la norme dans M égale à $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|Y\|_M$, on obtient:

$$\varepsilon\|\underset{\sim}{t} - \underset{\sim h}{t}\|_{W_1} + \varepsilon\|\underset{\approx}{n} - \underset{\approx h}{n}\|_{W_2} + \|\underset{\approx}{m} - \underset{\approx h}{m}\|_{W_2} + \varepsilon^3\|X - X_h\|_M \leq \tag{10}$$
$$\leq C\left(\inf_{R_h \in W_h}\|T - R_h\|_W + \inf_{Y_h \in M_h}\|X - Y_h\|_M\right).$$

Remarque 5. Un changement d'échelle de la forme $\underset{\sim}{p} = \varepsilon^\alpha \underset{\sim}{f}$ donne une erreur en $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon^{-(3-\alpha)}$. Par contre, quand $\underset{\sim}{p} = \varepsilon^3 \underset{\sim}{f}$, l'erreur est en $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}$.

Remarque 6. Les résultats restent vrais si on utilise, au lieu de D_{k+1}, un des espaces: BDM_{k+1}, $BDFM_{k+1}$, $BDM_{[k+1]}$, $BDFM_{[k+1]}$ (voir [4] pour les notations), les deux derniers étant utilisés dans le cas d'une triangulation formée par des quadrilatères.

Remarque 7. Le théorème du mouvement rigide reste vrai si $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; R^3)$ car il suffit d'utiliser le résultat de [3] en employant les techniques de [2].

Remarque 8. La supposition que la solution du problème auxiliaire (6) appartient à $\left[W^{1,q}(\omega)\right]^5$, $q > 2$, permet d'utiliser un résultat dû à C i a r l e t ([5], pag. 192). On peut alors travailler avec une carte $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; R^3)$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. A g o u z a l, A. – *Analyse numérique de méthodes de décomposition de domaines. Méthodes des domaines fictifs avec multiplicateurs de Lagrange*, Thèse de doctorat, Université de Pau, 1993.
2. B e r n a d o u, M., C i a r l e t, P.G. and M i a r a, B. – *Existence Theorems for Two-Dimensional Linear Shell Theories*, Journal of Elasticity 34, pp.111-138, 1994.
3. B l o u z a, A. et L e D r e t, H. – *Sur le lemme du mouvement rigide*, CRAS, t. 319, Série I, pp. 1015-1020, 1994.
4. B r e z z i, F. and F o r t i n, M. – *Mixed and Hybrid Finite Elements Methods*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
5. C i a r l e t, P.G. – *The Finite Element Method for Eliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
6. N e č a s, J. – *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
7. R o b e r t s, J.E. and T h o m a s, J.-M. – *Mixed and Hybrid Methods*, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet & J.L. Lions Editors, vol. II, Finite Element Methods (Part 1), North Holland, Amsterdam, 1991.
8. Ţ â r d e a, G. – *Sur une formulation équilibre pour un problème de coques minces*, Thèse de doctorat, Université de Pau, 1995.

Reçu:21.XI.1995

Universitatea "Al.I. Cuza"
Seminarul Matematic "Al. Myller"
6600 Iaşi
ROMANIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XLI, s.I.a, Matematică, 1995, f.2

THE RELAXATION SCHEMES FOR THE TWO DIMENSIONAL ANISOTROPIC ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION USSING MULTIGRID METHOD

BY

HASSAN NASR A., M.OSAMA EL GIAR, FATEMA HASSAN M.

1. Introduction. The case of a linear elliptic boundary value problem is considered. The discretization of such problem on a uniform grid of mesh size h yields a linear $N \times N$ system of equations denoted by

$$Lu = f \qquad \text{on} \qquad (\Omega) \tag{1}$$

with Dirichlet boundary conditions

$$u = q \qquad \text{on} \qquad (\partial\Omega) \tag{2}$$

Ω denote $2D$ rectangular domain and L is a 2nd order differential operator with variable coefficients. The variable coefficients of the defferential equation are allowed to have arbitrary anisotropies, e.g. to differ considerably from each other in various parts of Ω (see [1], [2], [3], [10], [11], [12], [13] and [14]).

The multigrid algorithm is characterized by its components: correction scheme, multigrid iterations or Full Multigrid, standard coarsening, difference operators L^H on coarse grid Ω^H, are built in the same way as L^h on Ω^h, linear interpolation (for the coarse-to-fine transfer of corrections), full weighting (for the fine-to-coarse restriction of residuals) and relaxation scheme for error smoothing.

The goal of any multigrid method is to exploit smoothness by the use of coarser grids. Since the error becomes smooth by relaxation, coarse grid corrections make sense only in terms of the error, see [4], [11] and [14]. Error smoothing is performed by *red-black relaxation, line relaxation*