ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XLII, s.I.a, Matematică, 1996, f2.

SUR UNE CONJECTURE DE DELIGNE ET HENNIART SUR LES CONSTANTES LOCALES D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DES FONCTIONS L

BY

AURELIAN CLAUDIU VOLF

Introduction. Le but de cet article est de présenter la conjecture sur les constantes locales ("root numbers", appellées aussi facteurs ε dans cet article) associées á une représentation virtuelle du groupe de Weil d'un corps local, énoncée par P.Deligne et G.Henniart dans [De-He], de la formuler d'une manière (un peu) plus abordable et de démontrer quelques cas de celle-ci, non traités jusqu'à presént.

Soit K un corps local, ψ un caractère additif non trivial de K et η et χ deux caractères de K^* avec $\alpha(\eta) < \alpha(\chi)$. Dans [De-He] on trouve la formule suivante pour la constante locale $\varepsilon((\eta-1)\chi, \psi)$:

$$\varepsilon((\eta-1)\chi, \psi) = \eta(a^{-1}) \cdot (\chi\eta)^{-1}(1 + b/a) \cdot \psi(b),$$

où $a, b \in K$ sont tels que $\chi(1+x) = \psi(bx)$ si $\nu_K(x) > \alpha(\chi)/2; \eta(1+x) = \psi(bx)$ si $\nu_K(x) > \alpha(\eta)/2$. A l'aide de cette formule on trouve une expression pour $\varepsilon\left(\chi \prod_{i\in I}(1-\eta_i)\right)$, pour toute famille $(\eta_i)_I$ de caractères de K^*, avec $\alpha(\eta_i) < \alpha(\chi)$. Cette expresion permet de déduire que

$$\varepsilon\left(\chi \prod\nolimits_{i\in I}(1-\eta_i)\right) = 1 \text{ si } \sum (\alpha(\chi) - \alpha(\eta_i)) > \alpha(\chi).$$

En tenant compte que les $1-\eta_i$ correspondent, via l'application de réciprocité de la théorie locale du corps de classes, à des représentations virtuelles de dimension 0 d'un groupe Galois G d'une extension abélienne de K, on se demande si la formule ci-dessus vaut encore si l'on remplace $1-\eta_i$ par des représentations virtuelles W_i des groupes de Galois G_i. On doit bien sûr

imposer des conditions sur la ramification des groupes G_i et sur les W_i eux-mêmes (plus précisément, sur le cran de la γ-filtration du λ-anneau des représentations virtuelles de G_i qui contient W_i). Pour l'énoncé exact, voir le **3**.

Soit G un groupe fini (le groupe de Galois d'une extension finie de corps locaux), R le λ-anneau des représentations virtuelles de G et R_n le n-iéme cran de la γ-filtration de R. La principale difficulté recontrée dans la tentative de démonstration de cette conjecture est l'absence d'un résultat sur la forme des élements de R_n. Par ailleurs, pour exprimer la constante locale d'une représentation virtuelle de dimension 0, on doit faire appel à des théorèmes du type Brauer sur les représentations induites(voir le théorème **2.1.** sur l'existence et l'unicité des constantes locales). Une autre difficulté majeure est l'absence d'un théorème de ce type, assurant en outre une certaine "compatibilité" avec la γ-filtration du R.

C'est justement parce que que l'on dispose d'un théorème de structure sur le deuxiéme cran R_2 (ce sont les représentations virtuelles V avec $\dim V = 0$ et $\det V = 1$) qu'on a pu démontrer des résultats dans ce cas.

Puisque la conjecture est vraie dans le cas abélien (voir **5.4**), c'est-à-dire quand R est un λ-anneau engendré par des éléments de dimension 1, on serait tenté d'appliquer des résultats du type "principe de scindage" (splitting principle) pour les λ-anneaux ([Fu-La], [At-Ta]). Cela revient à plonger R dans un λ-anneau S engendré par des éléments de dimension 1; le problème est que S n'est plus en général un anneau des représentations virtuelles d'un groupe de Galois G et on perd toute notion de ramification, de constante locale associée à une représentation virtuelle etc.

Ici on a abordé le problème en essayant de reduire le calcul des facteurs ε des représentations virtuelles au cas des caractères, pour lequel on a des formules explicites. Ces formules, combinées avec les hypothéses de la conjecture, permettent de prouver celle-ci dans quelques cas non triviaux, via des estimations (assez techniques) des valuations des éléments qui interviennent.

1. Notations.

1.1 Soit K un corps local non-archimédien (c'est à dire un corp valué complet par raport à la topologie induite par la valuation, avec le corps résiduel fini), de caractéristique résiduelle p. Le corps K et p sont fixés dans tout ce qui suit. On notera:

ν_K: la valuation normalisée de K;

π_K : une uniformisante (i.e., un élément de valuation 1) de K;

A_K : l'anneau des entiers de K, c'est à dire $A_K = \{x \in K | \nu_K(x) \geq 0\}$;

$A_K(t) = \{x \in K | \nu_K(x) \geq t\}$, pour tout t réel; c'est un sous-groupe additif de K;

P_K : l'idéal premier de A_K, c'est à dire $P_K = \{x \in K | \nu_K(x) \geq 1\}$;

$\tilde{K} = A_K/P_K$: le corps résiduel de K. Soit q son cardinal (c'est une puissance de p);

$||_K$: la valeur absolue normalisée de K (pour laquelle $|\pi_K| = q^{-1}$);

U_K : le groupe (multiplicatif) des unités de A_K, c'est à dire $U_K = \{x \in K | \nu_K(x) = 0\}$;

$U_K(t) = \{1 + x | x \in K, \nu_K(x) \geq t\}$, pour tout $t \geq 0$); c'est un sous-groupe de U_K.

S'il n'y a pas de risque de confusion sur le corps, on pourra omettre l'indice K.

On note E l'exponentielle tronquée:

$$E(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{x^i}{i!}, \tag{1.1.1}$$

et L le logarithme tronqué:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^{i+1}(x-1)^i}{i}. \tag{1.1.2.}$$

Pour chaque $t > 0, E$ et L définissent des isomorphismes inverses l'un de l'autre:

$$A(t)/A(pt) \xrightarrow{E} U(t)/U(pt) \xrightarrow{L} A(t)/A(pt). \tag{1.1.3}$$

1.2. On fixe un *caractère additif* ψ de K (i.e. un homomorphisme continu de K dans $\boldsymbol{C}^*$), non trivial. Par ([Weil], **Th. II.5.3., Cor.**) tout caractère additif de K est de la forme $x \mapsto \psi(ax)$, avec $a \in K$. La continuité de ψ implique l'existence d'un entier $n(\psi)$, appelé l'*ordre* de ψ, tel que ψ est trivial sur $\mathrm{A}(-n(\psi))$ et non-trivial sur $\mathrm{A}(-n(\psi) - 1)$. On fixe une mesure de Haar dx sur K.

1.3. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique séparable de K, fixée par la suite. On sous-entendra que *toutes les extensions de K qui interviendront sont incluses dans $\overline{K}$*. Soit K^{nr} l'extension non-ramifiée maximale de K dans $\overline{K}, L$ une extension finie de K et E une extension de K^{nr}.

Le groupe de Weil $\mathbf{W}(E/L)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(E/L)$ formé des L-automorphismes ϕ de E qui ont la propriété $\phi|_{K^{nr}} = Frob^n$, pour un

$n \in \mathbb{Z}, Frob$ étant l'automorphisme de Frobenius de $\mathrm{Gal}(K^{nr}/L)$. On note $\mathbf{W}(\overline{K}/L)$ par $\mathbf{W}_L$ et on l'appele le groupe de Weil absolu de L. Pour plus de détails, voir ([Weil], **App.II**).

1.4. Pour L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G, on definit ([Serr]), **ch.IV**) les *groupes de ramification* G_n, pour n entier, $n \geq -1$. Les G_n forment une suite décroissante de sous-groupes invariants de G, G_0 est le sous-groupe d'inertie de G et $G_n = \{1\}$ pour n assez grand. On trouvera une liste complète des propriétés des groupes de ramification, des quotients G_n/G_{n+1}, ainsi que les définitions des fonctions $\phi_{L/K}$ et $\psi_{L/K} = {\phi_{L/K}}^{-1}$ dans ([Serr], **ch.IV**). On définit la *numérotation supérieure* des groupes de ramification: $G' = G_{\phi_{L/K}(t)}$, pour tout $t \geq -1$; l'intérêt de celle-ci est qu'elle est compatible avec le passage au quotient: si E/K est une sous-extension galoisienne de L/K, alors $G(E/K)^t$ est l'image de $G(L/K)^t$ par l'homomorphisme surjectif $G(L/K) \to G(E/K)$. On écrira parfois $G(t)$ au lieu de G^t.

La propriété de transitivité $\phi_{M/K} = \phi_{L/K} \circ \phi_{M/L}$ (pour M une extension galoisienne finie de L) permet d'étendre la définition de $\phi_{L/K}$ et de $\psi_{L/K}$ pour toute extension *séparable* finie L/K en posant $\phi_{L/K} = \psi_{M/K} \circ \psi_{M/L}^{-1}$, où M est une extension galoisienne finie de K contenant L; ceci ne depend pas du choix de M.

Pour une extension galoisienne *infinie* L/K, de groupe de Galois G, on définit les groupes G^t par $G^t = \lim\mathrm{proj}\, Gal(E/K)^t$, la limite étant prise suivant les sous-extensions galoisiennes finies E de L/K. La compatibilité avec le passage au quotient est conservée; si L contient K^{nr}, alors $\mathbf{W}(L/K) = \mathbf{W}$ contient G^0 et on peut poser $\mathbf{W}^t = G^t$ pour $t \geq 0$. On a $\mathbf{W}^0 = I$ et on pose $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}$.

1.5. Soit G un groupe topologique. On appelle *représentation* de G un homomorphisme continu ρ de G dans le groupe des $\boldsymbol{C}$-automorphismes d'un espace vectoriel complexe V de dimension finie: $\rho\colon G \to GL(V)$. Un élément du groupe de Grothendieck $R(G)$ de la catégorie des représentations d'un groupe topologique G s'appelle *représentation virtuelle* de G. Si V est une représentation virtuelle, elle s'écrit de manière unique sous la forme $V = \Sigma n(U)U$ où U parcourt les représentations irréductibles de G et $n(U) \in \mathbb{Z}$. Si $n(U)$ n'est pas nul, U est un *constituant* de V. Les constituants de V sont en nombre fini.

Vu la définition du groupe de Grothendieck $R(G)$, pour définir un homomorphisme f de $R(G)$ dans un groupe commutatif X, il faut définir $f(V)$ pour toute représentation V de G et vérifier que, pour toute suite exacte de repésentations:

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0,$$

on a $f(V) = f(V') + f(V'')$. On définit ainsi, pour toute représentation virtuelle V:

- la *dimension* $\dim(V), \dim\colon R(G) \to \mathbb{Z}$;
- le *déterminant* $\det(V), \det\colon R(G) \to \mathrm{Hom}(G, \boldsymbol{C}^*)$;
- l'*induction* $\mathrm{Ind}_H^G\colon R(H) \to R(G)$, pour H sous-groupe d'indice fini dans G;
- la *restriction* $\mathrm{Res}_H^G\colon R(G) \to R(H)$, comme restriction des scalaires de $\boldsymbol{C}[G]$ à $\boldsymbol{C}[H]$, pour tout homomorphisme $H \to G$.

Si M/K est une extension galoisienne finie de corps locaux et L/K est une sous extension, $G = G(M/K), H = G(M/L)$, et η un quasi-caractère de H (qui correspond à un quasi-caractère de L^*, noté toujours η), alors $\mathrm{Ind}_L^K \eta$ est une autre notation pour $\mathrm{Ind}_H^G \eta$.

1.6. Si V est une représentation du groupe de Weil $\mathbf{W}(\mathrm{L/K}) = \mathbf{W}$, où L contient K^{nr}, la continuité implique l'existence d'un sous-groupe normal ouvert J du groupe d'inertie $I = \mathrm{Gal}(L/K^{nr})$ (i.e. l'existence d'une extension galoisienne finie E de K^{nr}) tel que V est triviale sur J. Le groupe d'inertie I agit à travers le quotient fini $I/J = \mathrm{Gal}(E/K^{nr})$. On peut donc parler de la représentation d'Artin ([Serr], $Ch.VI$, §2.) $A_{I/J}$ du groupe I/J. On définit alors le *conducteur d'Artin* de V, par la formule:

$$a(V) = \dim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}[I/J]}(A_{I/J}, V)$$

Cette définition ne depend pas du choix du sous-groupe J tel que V est triviale sur J (voir [Deli], 4.4). Pour V donné, $a(V)$ ne depend que de la restriction de V au groupe d'inertie I. Une représentation de $\mathbf{W}$ est dite non-ramifiée si I agit trivialment, et ramifiée dans le cas contraire. Si V est non-ramifiée, alors $a(V) = 0$.

Soit maintenant une représentation irréductible $\rho\colon \mathbf{W} \to GL(V)$. Si ρ est non-ramifiée, on pose $\alpha(\rho) = 0$. Sinon, $\alpha(\rho)$ est le plus grand u réel tel que $\rho(\mathbf{W}^u)$ soit non-trivial. On renvoie à ([Henn], p.161) pour voir que $\alpha(\rho)$ est bien défini. Au même endroit on trouve démontrée la formule:

$$a(\rho) = (\alpha(\rho) + 1) \dim \rho,$$

valable pour tout représentation irréductible ρ de $\mathbf{W}$.

Pour toute représentation virtuelle V de $\mathbf{W}$, on note

$\alpha(V)$ (resp. $\beta(V)$) le plus petit (resp. le plus grand) des $\alpha(U)$, quand U parcourt les constituans de V. Si L/K est une extension finie et M une extension galoisienne de K contenant L, on pose $\alpha(L/K) = inf\{t | \mathrm{Gal}(M/K)^t \subseteq \mathrm{Gal}(M/L)\}$. Ceci ne depend pas du choix de M.

1.7. Par l'intermédiaire de l'isomorphisme de la thórie locale du corps de classes, $\mathbf{W}_K^{ab} \approx K^*$, (qui identifie, pour tout $t, \mathbf{W}^{ab}(t)$ à $U(t)$) on fait correspondre à une représentation V de dimension 1 de $\mathbf{W}$ un quasi-caractère χ de K^*. On retrouve donc $\alpha(\chi)$ comme le plus grand entier n tel que χ soit non-trivial sur $U_K(n)$. Si χ est non-ramifié où modérement ramifié, alors $\alpha(\chi) = 0$. On dit que χ est sauvagement ramifié si $\alpha(\chi) > 0$.

1.8. On note par $|X|$ le cardinal de l'ensemble fini X. La notation $\mathrm{mod}^* X$ après une égalité désigne une congruence dans le groupe multiplicatif d'un corps, modulo le sous-groupe X. Soit $\boldsymbol{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$ le sous-groupe de $\boldsymbol{C}^*$ formé des racines de l'unité d'ordre une puissance de p.

2. Résultats sur les constantes locales.

2.1. On cite sans modification le théorème de l'existence des *constantes locales* $\varepsilon(V, \psi, dx)$ (qu'on appellera parfois *facteurs* ε) dans l'article de Deligne ([Deli], **Th.4.1**, p.535):

Théorème. *Il existe une et une seule fonction ε, vérifiant (1) à (4) ci-dessous, qui associe un nombre $\varepsilon(V, \psi, dx) \in \boldsymbol{C}^*$ à chaque classe d'isomorphisme de sextuples $(K, \overline{K}, \psi, dx, V, \rho)$ formés d'un corps local K, d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, d'un caractère additif non-trivial $\psi\colon K \to \boldsymbol{C}^*$, d'une mesure de Haar dx sur K, d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\boldsymbol{C}$ et d'une représentation $\rho\colon \mathbf{W}(\overline{K}/K) \to GL(V)$.*

(1) Pour toute suite exacte de représentations

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0,$$

on a

$$\varepsilon(V, \psi, dx) = \varepsilon(V', \psi, dx) \cdot \varepsilon(V'', \psi, dx).$$

Cette condition montre que $\varepsilon(V, \psi, x)$ ne dépend que de la classe de V dans le groupe de Grothendieck des représentations de $\mathbf{W}(\overline{K}/K)$ et permet de donner un sens à $\varepsilon(V, \psi, dx)$ pour V seulement une représentation virtuelle.

$$\varepsilon(V, \psi, adx) = a^{\dim V} \varepsilon(V, \psi, dx) \tag{2}$$

En particulier, pour V virtuel de dimension 0, $\varepsilon(V, \psi, dx)$ est indépendant de dx. On le note $\varepsilon(V, \psi)$.

(3) Si L est une extension séparable finie de K dans $\overline{K}$ et que V_K est la représentation virtuelle de $\mathbf{W}(\overline{K}/K)$ induite par une représentation virtuelle de dimension zéro V_L de $\mathbf{W}(\overline{K}/L)$, on a

$$\varepsilon(V_K, \psi) = \varepsilon(V_L, \psi \circ Tr_{L/K}).$$

(4) Si $\dim V = 1, \rho$ *étant défini par un quasi-caractère* χ *de* K^**, on a*

$$\varepsilon(V, \psi, dx) = \varepsilon(\chi, \psi, dx)$$

Si χ est un quasi-caractère de K^*, alors la constante locale $\varepsilon(\chi, \psi, dx)$ est définie par l'équation fonctionelle locale de Tate (voir [Deli], 3.3., p.526); cette équation permet d'obtinir la formule:

$$\varepsilon(\chi, \psi, dx) = \int_{K^*} \chi^{-1}(x)\psi(x)dx. \tag{2.1.2.}$$

Si $a \in K^*$ et $V \in R(\mathbf{W})$, alors la formule ([Deli], **5.4**, p.548):

$$\varepsilon(V, \psi(ax), dx) = \det(V)(a)|a|^{-\dim V}\varepsilon(V, \psi, dx) \tag{2.1.3.}$$

montre que *pour* V *de dimension zéro et de déterminant trivial,* $\varepsilon(V, \psi, dx)$ *ne depend pas de* ψ *et de* dx. On le note $\varepsilon(V)$.

Nous sommes intéressés par les résultats du type $\varepsilon(V \otimes W) = 1$ si V et W remplissent certaines conditions. Par exemple, la formule suivante ([De-He], **5.5.3.**, p.549), valable pour W une représentation virtuelle non-ramifiée

$$\varepsilon(V \otimes W) = \det W(\pi^{a(V)+n(\psi)\cdot\dim V})\varepsilon(V, \psi, dx)^{\dim V} \tag{2.1.4.}$$

montre que $\varepsilon(V \otimes W) = 1$ si $\dim W = 0$ et $\det W = 1$.

Les formules données par la proposition et les corollaires qui suivent ([Deli], **Prop.1.1** et suivantes) sont fondamentales dans nos calculs.

2.2. Proposition. *Soit* χ *et* η *deux quasi-caractères de* K^**, vérifiant* $\alpha(\eta) < \alpha(\chi)$*. Soit* m *le plus petit entier tel que l'on ait* $2m > \alpha(\chi)$ *et soit* a *un élément de* K *tel que l'on ait* $\chi(1 + y) = \psi(ay)$ *dés que l'élément* y *de* K *est de valuation au moins* m*. On a alors* $\nu_K(a) = -(n(\psi) + 1 + \alpha(\chi))$ *et* a *est unique mod*$^*U(\alpha(\chi)/2)$*. De même, soit* b *un élément de* K *vérifiant* $\eta(1 + y) = \psi(by)$ *dés que l'on a* $\nu_K(y) \geq \alpha(\chi)/2$*. Si l'on a* $\alpha(\eta) \geq \alpha(\chi)/2$*, alors* $\nu(b)$ *vaut* $-(n(\psi)+1+\alpha(\eta))$ *et* b *est unique mod*$^*U(\alpha(\eta)-\alpha(\chi)/2+1)$*; sinon,* b *est n'importe quel élément de* K *de valuation au moins* $-(n(\psi) + \alpha(\chi)/2)$*. On a*

$$\varepsilon((\eta - 1)\chi, \psi) = \eta(a^{-1}) \cdot (\chi\eta)^{-1}(1 + b/a) \cdot \psi(b) \tag{2.2.1.}$$

2.3. Corollaire. *Avec les notations de la proposition précédente:*
(1) On a $\varepsilon((\eta-1)\chi,\psi)=\eta(a^{-1})mod^*\boldsymbol{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$.
(2) Si de plus on a $\alpha(\eta)<\alpha(\chi)/2$, *alors*

$$\varepsilon((\eta-1)\chi,\psi)=\eta(a^{-1}) \tag{2.3.1.}$$

2.4. Corollaire. *Soit* χ *un quasi-caractère sauvagement ramifié de* K^* *tel que l'on ait* $\chi(1+y)=\psi(ay)$ *si* $y\in K$ *est de valuation au moins* m. *Soit* $(\eta_i)_{i\in I}$ *une famiile finie, d'au moins deux éléments, de quasi-caractères de* K^*, *vérifiant* $\alpha(\eta_i)<\alpha(\chi)$. *On choisit des éléments* b_i *de* K *tels que* $\eta_i(1+y)=\psi(b_iy)$ *quand* $\nu(y)\geq\alpha(\chi)/2$. *Pour chaque partie* J *de* I, *on pose*

$$\eta(J)=\prod\nolimits_{j\in J}\eta_j,\ b(J)=\sum_{j\in J}b_j,\ \varepsilon(J)=(-1)^{|J|}. \tag{2.4.1.}$$

Alors on a

$$\varepsilon\left(\chi\prod\nolimits_{i\in I}(1-\eta_i)\right)=(\chi\eta(I))^{-1}\left(\prod\nolimits_{J\subseteq I}(1+b(J)/a)^{\varepsilon(J)}\right)\cdot \tag{2.4.2.}$$

$$\cdot\prod\nolimits_{i\in I}\eta_i\left(\prod\nolimits_{J\subseteq I\setminus\{i\}}(1+b(J)/a)^{\varepsilon(J)}\right)$$

2.5. Pour simplifier les notations, on pose, pour $N=|I|$ et $t(J)=\sum_{j\in J}t_j$ si $J\subset I$:

$$P_N(t_1,\cdots,t_N)=\prod\nolimits_{J\subseteq I}(1+t(J))^{\varepsilon(J)} \tag{2.5.1}$$

$P_N(t_1,\cdots,t_N)$ est une série formelle en les indéterminées t_i à coefficients entiers. On voit tout de suite que $P_N=1+Q_N$, où Q_N est une série formelle divisibile par $t_1\cdots t_N$. Avec ces notations, la formule (2.4.2.) devient:

$$\varepsilon\left(\chi\prod\nolimits_{i\in I}(1-\eta_i)\right)=(\chi\eta(I))^{-1}(C)\cdot\prod\nolimits_{i\in I}\eta_i(H_i) \tag{2.5.2.}$$

où $C=P_N\left(\frac{b_1}{a},\cdots,\frac{b_N}{a}\right)$, $H_i=P_{N-1}\left(\frac{b_1}{a},\cdots,\widehat{\frac{b_i}{a}},\cdots,\frac{b_N}{a}\right)$ (le symbole $\hat{}$ désigne l'omission du terme). On a $\nu(b_i/a)\geq\alpha(\chi)-\alpha(\eta_i)>0$ par **2.2.** et donc C est de la forme $1+D$, avec $\nu(D)\geq\sum_{i\in I}(\alpha(\chi)-\alpha(\eta_i)$.

Supposons que $\sum_{i\in I}(\alpha(\chi)-\alpha(\eta_i)>\alpha(\chi)$. Alors $\chi(C)=\eta_i(C)=1$. De plus, $\eta_i(H_i)=1$ car en ces conditions $\nu(H_i-1)>\alpha(\eta_i)$. On obtient donc $\varepsilon(\chi\prod_{i\in I}(1-\eta_i))=1$.

Le raisonnement ci-dessus est en substance celui de ([De-He], **Prop.1.7.**); la généralisation de ce résultat sera l'object de cet article. Pour passer du cas des caractères au celui des représentations virtuelles on utilise l'inductivité en dimension 0 des constantes locales et des variantes du Théorème de Brauer sur les représentations induites, comme celle-ci:

2.6. Proposition. *([De-He], VARIANTE 2.3.)*

Soit G un groupe, extension de $\mathbb{Z}$ par un groupe fini $G(0)$. Soient A un sous-groupe abélien distingué de G, contenu dans $G(0)$, et V une représentation de G. Il existe des sous-groupes d'indice fini H_i de G (en nombre fini), contenant A, des caractères χ_i des H_i et des entiers n_i tels que, dans $R(G)$, on ait

$$V=\sum \mathrm{Ind}_{H_i}^{G}(\chi_i) \tag{2.6.1.}$$

Si V^A est nul, on peut choisir la décomposition de façon que χ_i soit non-trivial sur A.

Avec ceci, on peut obtenir le résultat suivant ([De-He], **Th. 4.9.**):

2.7. Théorème. *Soit V une représentation virtuelle de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré. Soit $(W_i)_{i\in I}$ une famille finie de représentations virtuelles de dimension 0 de $\mathbf{W}$. On suppose que l'on a $\beta(W_i)<\alpha(V)$ pour tout indice i et $\sum_{i\in I}(\alpha(V)-\beta(W_i))>\alpha(V)$. Alors on a*

$$\varepsilon((\otimes_{i\in I}W_i)\otimes V)=1 \tag{2.7.1.}$$

On voit que ce théorème généralise le résultat du **2.5.**, en remplaçant χ par V et les $1-\eta_i$ par W_i.

Les théorèmes qui suivent ([De-He], **Th.4.2.** et **4.6.**) donnent une généralisation de la formule (2.1.4.) et nous seront utiles dans les chapitres suivants.

2.8. Théorème. *Soit V une représentation virtuelle de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré.*

(i) Il existe un élément γ de K^*, défini de façon unique $mod^*U(1)$, tel que pour toute représentation virtuelle W de $\mathbf{W}$, de dimension 0 et vérifiant $\beta(W)<\alpha(V)$, on ait

$$\varepsilon(W\otimes V,\psi)\equiv \det W(\gamma) mod^* \boldsymbol{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1) \tag{2.8.1.}$$

(ii) La valuation $\nu_K(\gamma)$ est donnée par la formule

$$\nu_K(\gamma) = a(V) + n(\psi) \cdot \dim V \tag{2.8.2.}$$

L'unicité de γ (resp. la formule (2.8.2.)) vaut déjà si l'on suppose seulement que l'égalité (2.8.1.) est vraie quand W est de la forme $\eta - 1$, où η est un quasi-caractère modérément ramifié (resp. non-ramifié) de K^*.

2.9. Théorème. *Soit V une représentation virtuelle de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré. Il existe un élément γ de K^*, défini de façon unique mod$^*U(\alpha(V)/2)$, tel que pour toute représentation virtuelle W de $\mathbf{W}$, de dimension 0 et vérifiant $\beta(W) < \alpha(V)/2$, on ait*

$$\varepsilon(W \otimes V, \psi) = \det W(\gamma) \tag{2.9.1.}$$

Cet élément est congru à celui de (2.8.1.) mod$^*U(1)$.

3. Enoncé du problème.

3.1. Rappels sur la γ-filtration. On renvoie, pour la définition des λ-anneaux, leur propriétés, ainsi que pour la définition des *γ-opérations* et de la *γ -filtration* $(R_n)_{n\geq 0}$ d'un *λ-anneau* R, à [At-Ta].

Proposition. *([At-Ta],* **Prop.4.1***) On a*
(1) $R_m \cdot R_n \subseteq R_{m+n}, \forall m, n \geq 1$;
(2) $R_0 = R, R_1 = J$;
(3) R_n est un λ-idéal pour tout $n \geq 1$.
(4) R_n est un γ-idéal (i.e. R_n est stable pour les opérations γ), pour tout $n \geq 1$.
(5) Pour tout $G, R(G)_2 = \{V \in R | \dim V = 0$ et $\det V = 1\}$. Ceci est une conséquence de la démonstration de ([Fu-La], **Th.III.1.7.***).*

On voit tout de suite que, si G est commutatif, i.e. $R(G)$ (que l'on note R) est engendré par les caractères (représentations de dimension 1) de G, alors

(6) R_1 est le sous-groupe additif engendré par les eléments $1 - \chi$, avec χ caractère de G et

$$R_n = (R_1)^n = < \ \{(1-\chi_1)^{n_1} \cdots (1-\chi_r)^{n_r} | \\ \chi_1, \cdots, \chi_r \text{ caractères de } G, \sum n_i \geq n\} \ >,$$

où $< \ >$ signifie "l'idéal engendré par".

3.2. Enoncé du problème. P.Deligne et G.Henniart énoncent la **conjecture** suivante ([De-He], **4.10.Question**):

"Soit Vune représentation de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré. Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille finie de quotients de $\mathbf{W}$ par des sous-groupes ouverts de I et,

pour chaque indice i, β_i le dernier saut de la filtration de G_i par les groupes de ramification, en numérotation supérieure. On suppose que, pour chaque i, on a $\beta_i < \alpha(V)$. Soient $(n_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers positifs ou nuls, et pour chaque indice i, une représentation virtuelle W_i de G_i, qui se trouve dans le n_i-ème sous-espace de la γ-filtration de l'anneau des représentations de G_i. Pour $n_i = 1$ (resp. $n_i = 2$) cela signifie que W_i est de dimension 0 (resp. de déterminant trivial).

Si on a

$$(^*) \qquad \sum_{i\in I} n_i(\alpha(V) - \beta_i) > \alpha(V),$$

peut-on conclure que $\varepsilon((\otimes_{i\in I} W_i) \otimes V)$ vaut 1 ?"

Remarque. Si touts les n_i valent 1, c'est le **Théorème 2.7.**. Si $|I|$ vaut 1 et si n_1 vaut 2, c'est le **Théorème 2.9.**.

3.3. Obsérvation. *L'inégalité* $(^*)$ *s'écrit de manière équivalente*

$$(^{**}) \qquad \sum_{i\in I} n_i\beta_i < \alpha(V)\left(-1 + \sum_{i\in I} n_i\right)$$

En outre, si $m_i \geq n_i$ *pour tout* $i \in I$, *alors on obtient comme conséquence de* $(^{**})$

$$(^{***}) \qquad \sum_{i\in I} m_i\beta_i < \alpha(V)\left(-1 + \sum_{i\in I} m_i\right)$$

puisque $\beta_i < \alpha(V)$ *pour chaque* i.

On se propose de donner des formulations équivalentes (plus "simples") et de prouver quelques cas de cette conjecture.

4. Résultats sur la ramification. Normes et traces.

4.1. Si E/K est une extension galoisienne finie et L/K est une sous extension, alors on voit facilement que pour tout $t > 0$,

$$(4.1.1.) \qquad G(E/L)(\psi_{L/K}(t)) = G(E/K)(t) \cap G(E/L).$$

En passant à la limite projective, on obtient

$$(4.1.2.) \qquad \mathbf{W}_L(\psi_{L/K}(t)) = \mathbf{W}_K(t) \cap \mathbf{W}_L.$$

Si maintenant V est une représentation irréductible de $\mathbf{W}_K$, alors la formule ci-dessus montre que

$$\alpha\left(V|_{\mathbf{W}_L}\right) \leq \psi_{L/K}(\alpha(V)) \tag{4.1.3.}$$

Si $\alpha(V) > \alpha(L/K)$, alors

$$\alpha\left(V|_{\mathbf{W}_L}\right) = \psi_{L/K}(\alpha(V)) \tag{4.1.4.}$$

car en cette situation, $\mathbf{W}_K(\alpha(V)) \subseteq \mathbf{W}_L$.

La formule (4.1.1.) a comme conséquence la

Proposition. *Soit L une extension finie séparable de K et E une extension finie séparable de L. Alors*

$$\alpha(E/L) \leq \psi_{L/K}(\alpha(E/K)) \tag{4.1.5.}$$

4.2. Proposition. *([De-He].* **Prop.3.2.***) Soient L une extension finie séparable de K, M une extension finie séparable de L.*

(i) La fonction $\psi_{M/L}$ est convexe.

(ii) Si l'extension M/L est modérée (i.e. si $\alpha(M/L)$ est nul), $\psi_{M/L}$ est linéaire. Sinon, le dernier saut de la dérivée de $\psi_{M/L}$ se produit en $\alpha(M/L)$.

(iii) Soit $t \in \boldsymbol{R}_+$. Si $t > \alpha(M/L)$, la pente de $\psi_{M/L}$ en t est l'indice de ramification e de M/L.
Si $t < \psi_{M/L}$, c'est un entier de la forme $e/p^k, k \geq 1$. En conséquence, on a

$$\psi_{M/L}(\alpha(M/L)) \leq \frac{e}{p}\alpha(M/L)$$

4.3. Soit L une extension finie séparable de K . L'application $L^{ab} \to W_K^{ab}$ déduite de l'inclusion $\mathbf{W}_L \to \mathbf{W}_K$ correspond, par l'intermédiaire de l'application de réciprocité, à la *norme* $N_{L/K}\colon L^* \to K^*$. Si χ est un quasi caractère de $\mathbf{W}_K$ (correspondant à un quasi caractère de K^*, noté toujours χ), la réstriction de χ à $\mathbf{W}_L$ correspond donc à $\chi \circ N_{L/K}$. Les formules (4.1.3.) et (4.1.4.) deviennent alors

$$\alpha(\chi \circ N_{L/K}) \leq \psi_{L/K}(\alpha(\chi)) \tag{4.3.1.}$$

et, si $\alpha(\chi) > \alpha(L/K)$,

$$\alpha(\chi \circ N_{L/K}) = \psi_{L/K}(\alpha(\chi)) \tag{4.3.2.}$$

Soit $d_{L/K}$ la valuation de l'idéal différente de L sur K et $\psi^{\infty}_{L/K}$ la fonction affine de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$, de pente $e = e_{L/K}$, et prenant la valeur $-d_{L/K}-1$ en -1. D'aprés [De-He], **3.3.**, on a

$$Tr_{L/K}\left(A_L(\psi^{\infty}_{L/K}(t))\right) = A_K(t) \tag{4.3.3.}$$

pour tout t réel.

On en déduit que $\psi^{\infty}_{L/K}$ est la fonction linéaire qui coïncide avec $\psi_{L/K}$ pour tout t valant au moins $\alpha(L/K)$. On a donc, pour tout $t > \alpha(L/K)$,

$$\psi_{L/K}(t) + d_{L/K} + 1 = e(\alpha(L/K) + 1) \tag{4.3.4}$$

4.4. Proposition. *([De-He],* **Prop.3.5.***, p.104) Soit L une extension finie séparable de K, d'indice de ramification e, et y un élément de l'idéal maximal de A_L. On a*

$$N_{L/K}(Ey) \equiv E(Tr_{L/K}y) mod^* U_K(\frac{p}{e}\nu_L(y)) \tag{4.4.5.}$$

5. Réductions. On garde les notations de l'énoncé de la **conjecture 3.2.** Pour simplifier, on pose $\alpha = \alpha(V)$, R, l'anneau des représentations virtuelles de $\mathbf{W}_K$. Soit E_i l'extension finie de K_{nr} telle que $G_i = \mathbf{W}(E_i/K)$.

Dans les conditions énoncées, $(\otimes_{i\in I} W_i) \otimes V$ *est de dimension 0 et de dimension 1, ce qui justifie l'omission de ψ et de dx dans l'écriture de ε.* La multiplicativité des facteurs ε nous autorise à supposer que V *est irréductible.*

5.1. *On peut supposer que* $\dim V = 1$ *(i.e. V est défini par un caractère χ de K^*).*

Démonstration. Soit $H = I \cap kerV$. Le sous-corps F de $\overline{K}$ fixé par H est une extension galoisienne finie de K^{nr}. Alors V se factorise par $G = \mathbf{W}/H$, qui est une extension de $\mathbb{Z}$ par $\mathrm{Gal}(F/K^{nr})$; $G(\alpha)$ est un sous-groupe abélien distingué de G. De plus, l'espace des points de V fixés par $G(\alpha)$ est trivial car V est irréductible et on applique le théorème de Clifford. On est en mesure d'appliquer le Corollaire **2.6.**, qui donne

$$V = \sum m_j \mathrm{Ind}^G_{H_i}\chi_j,$$

où $m_j \in \mathbb{Z}, H_j$ sont des-groupes d'indice fini de $G, G(\alpha) \subseteq H_j$ et χ_j sont des caractères de H_j tels que $\chi_j(G(\alpha)) \neq \{1\}$. Donc

$$\varepsilon((\otimes_{i\in I} W_i) \otimes V) = \varepsilon\left((\otimes_{i\in I} W_i) \otimes \left(\sum m_j \mathrm{Ind}_{H_j}^G \chi_j\right)\right) =$$
$$= \prod_j \varepsilon\left((\otimes_{i\in I} W_i) \otimes \mathrm{Ind}_{H_j}^G \chi_j\right)^{m_j} = \prod_j \varepsilon\left(\left(\otimes_{i\in I} \mathrm{Res}_{H_j}^G\right) \otimes \chi_j\right)^{m_j}$$

On a utilisé l'inductivité en dimension 0 des facteurs ε et la formule $W \otimes \mathrm{Ind}_H^G U \cong \mathrm{Ind}_H^G\left(\left(\mathrm{Res}_H^G W\right) \otimes U\right)$ (pour H sous- groupe de $G, W \in \mathbf{R}(G)$, $U \in \mathbf{R}(H)$). Il suffit de voir maintenant que $\left(\mathrm{Res}_H^G W_i\right)_{i\in I}$ et χ_j remplissent la condition **3.2.**(*) de la conjecture, pour chaque j fixé. Ici on considère W_i comme représentation de $\mathbf{W}$ et $\mathrm{Res}_{H_j}^G W_i = W_i'$ est en fait la réstriction de W_i à $H_j' = \mathbf{W}(\overline{K}/L_j)$, où L_j est le corps fixé par H_j. On a affaire maintenant à des représentations de $\mathbf{W}(\overline{K}/L_j)$. On remarque que $\alpha(\chi_j) \geq \psi_{L_j/K}(\alpha)$ puisque χ_j est non trivial sur $\mathbf{W}_K(\alpha)$, $\mathbf{W}_K(\alpha) \subseteq H_j'$ et $\mathbf{W}_L(\psi_{L/K}(t) = \mathbf{W}_K(t) \cap \mathbf{W}_L$ pour toute extension finie L/K. De même, $\beta(\mathrm{Res}_{H_j}^G W_i) = \psi_{L_j/K}(\beta_i)$.

Les n_i restent les mêmes; en effet, si $H \to G$ est un homomorphisme de groupes, alors $V \in \mathbf{R}(G)^n$ implique $\mathrm{Res}_H^G V \in \mathbf{R}(H)_n$. Il faut donc démontrer l'inégalité **3.2.** (**), en remplaçant α par $\psi_{Lj/K}(\alpha)$ et β_i par $\psi_{L_j/K}(\beta_i)$. On pose $\psi = \psi_{L_j/K}$. C'est une fonction convexe, croissante, et $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$. On applique maintenant le

Lemme. *Soit ψ: $[0, \infty[\to \boldsymbol{R}$ une fonction convexe, croissante, dérivable par morceaux, avec $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$. Soient N un entier positif, $\beta_i \geq 0$ rééls et $n_i \geq 1$ entiers pour chaque $l \leq i \leq N$, et $\alpha > 0$ tels que $\beta_i > \alpha$ pour tout i et $\sum n_i\beta_i < (-1 + \sum n_i)\alpha$. Alors on a $\psi(\beta_i) < \psi(\alpha)$ et $\sum n_i\psi(\beta_i) < (-1 + \sum n_i)\psi(\alpha)$.*

Preuve du lemme. Puisque ψ est croissante, $\psi(\beta_i) < \psi(\alpha)$. En rénumérotant éventuellement les β_i, on peut considérer que $n_i = 1$ et que

$\beta_i > 0$ pour tout i. Les inégalités de l'hypothése deviennent maintenant $\beta_i < \alpha, \sum \beta_i < (N-1)\alpha$. La fonction $x \mapsto \psi(x)/x$ est croissante sur $]0, \infty[$ et on a

$$\sum_{i\in I} \psi(\beta_i) = \sum_{i\in I} \frac{\psi(\beta_i)}{\beta_i}\beta_i \leq \sum_{i\in I} \frac{\psi(\alpha)}{\alpha}\beta_i = \frac{\psi(\alpha)}{\alpha}\sum_{i\in I}\beta_i < \psi(\alpha)(N-1)$$

où $N = |I|$.

Observation. La dernière partie de la démonstration ci-dessus montre

Soient W_i, n_j et χ comme dans **5.1.** *Si $i \in I$ et $W_i = Ind_H^{G_i} U$, avec $H = \mathbf{W}(E_i/L)$ un sous groupe d'indice fini de G_i et $U \in \mathbf{R}(H)_1$, alors*

$$\varepsilon\left(Ind_H^{G_i} U \otimes (\otimes_{j\neq i} W_j) \otimes \chi\right) = \varepsilon(U \otimes (\otimes_{j\neq i} W'_j) \otimes \chi \circ \boldsymbol{N}_{L/K})$$

avec W'_j représentation de $G'_j = \mathbf{W}(E_j L/L)$. On a $\alpha(\chi \circ \boldsymbol{N}_{L/K}) =$ $= \psi_{L/K}(\alpha(\chi))$ et $\alpha(G'_j) \leq \psi_{L/K}(\beta_j)$. On a les inégalités

$$\psi_{L/K}(\beta_j) < \psi_{L/K}(\alpha) \text{ et } \sum_{i\in I} n_i(\psi_{L/K}(\alpha) - \psi_{L/K}(\beta_i)) > \psi_{L/K}(\alpha).$$

Cette Observation sera utilisée fréquemment et parfois tacitement au cours des raisonnements suivants.

5.2. Proposition. *$\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)$ est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p.*

Démonstration. Par le théorème **2.7.**, appliqué à $W = \otimes_I W_i$ et V, on a $\varepsilon(W \otimes V, \psi) \equiv \det W(\gamma) \bmod^* \boldsymbol{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$, avec $\gamma \in K^*$. Mais on a vu que $\det W = 1$. (On a pu appliquer le théorème car $\beta(\otimes_I W_i) \leq \sup_I \beta(W_i) < \alpha$).

5.3. *On peut supposer que chacune des représentations W_i est galoisienne (i.e. se factorise à travers un quotient fini de $\mathbf{W}$, i.e.* **chaque G_i est fini***). De même pour V.*

Démonstration. On utilise le résultat suivant ([Henn], Cor. 3., p. 158): *Toute représentation linéaire irréductible R de $\mathbf{W}$ s'écrit sous la forme $R = S \otimes \chi$, où S est galoisienne et χ est un caractère non-ramifié.*

On voit facilement (en regardant la définition de la γ-filtration) que chaque W_i peut être considéré de la forme $\gamma^{m_1}(x_1)\ldots\gamma^{m_r}(x_r)$, avec $\sum m_j \geq n_i$ et $\dim x_i = 0$. L'idée est d'écrire chaque x_i comme une somme du type $\sum q_j y_j$, avec $q_j \in \mathbb{Z}$ et y_i irréductible; de prouver qu'on peut remplacer, si besoin est, y_j par $y'_j = y_j \otimes \chi_j, \chi_j$ caractère non-ramifié (de sorte que y'_j soit **galoisienne**), **sans changer la valeur du facteur** ε. Dans les lemmes suivantes, G est $\mathbf{W}$ ou un quotient de $\mathbf{W}$ par un sous-groupe ouvert.

Lemme 1. *Si $y \in \boldsymbol{R}(G)$ et χ est un caractère de G, alors $\lambda^n(y\chi) = \lambda^n(y)\chi^n$.*
Pour la démonstration, voir par example ([Fu-La], formule I.1.3.) ∎

Lemme 2. *Soient $U, V \in \boldsymbol{R}(G)$, avec $\dim U = 0, V$ irréductible, $\dim V = 1$ et $\beta(U) < \alpha(V)$. Alors $\mathrm{a}(U \otimes V) = 0$.*

Preuve du lemme 2. On a $U = \sum n_i U_i$, avec U_i irréductibles et n_i entiers. Alors $\mathrm{a}(U \otimes V) = \sum n_i \mathrm{a}(U_i \otimes V)$. On rappelle que $\mathrm{a}(U_i) = (\alpha(U_i) + 1) \dim U_i$. Mais on a le résultat suivant ([Henn], Cor. 3.6.1., p. 362, énoncé légèrement modifié):

Soient R et S deux représentations linéaires de $\mathbf{W}$. Supposons que R, S et $R \otimes S$ sont irréductibles. Alors on a $\mathrm{a}(R \otimes S) \leq \sup(\ \mathrm{a}(S) \dim R,$ $\mathrm{a}(R) \dim S)$, avec égalité si $\mathrm{a}(S) \dim R \neq \mathrm{a}(R) \dim S$.
On a donc $\mathrm{a}(U_i \otimes V) = \sup((\alpha(U_i)+1) \dim V,\ (\alpha(V)+1) \dim U_i) = (\alpha(V)+1) \dim U_i$, car $\alpha(U_i) < \beta(U) < \alpha(V)$. Puisque $0 = \dim U = \sum n_i \dim U_i$, on a $\mathrm{a}(U \otimes V) = \sum n_i(\alpha(V) + 1) \dim U_i = 0$. ∎

Lemme 3. *Si $U, y \in \boldsymbol{R}(G)$ et $n \in \boldsymbol{N}^*$, tels que $\mathrm{a}(\lambda^n(y)U) = 0$ et $\dim(\lambda^n(y)U) = 0$, alors $\varepsilon(\lambda^n(y\chi)U, \psi) = \varepsilon(\lambda^n(y)U, \psi)$ et $\varepsilon(\gamma^n(y\chi)U) = \varepsilon(\gamma^n(y)U)$ pour tout caractère non-ramifié χ de G.*

Preuve du lemme 3. On a $\varepsilon(\lambda^n(y\chi)U, \psi) = \varepsilon(\lambda^n(y)\chi^n U, \psi) = \chi^n(\gamma)\varepsilon(\lambda^n(y)U, \psi)$ où γ est de valuation $\mathrm{a}(\lambda^n(y)U) + \mathrm{n}(\psi) \dim(\lambda^n(y)U)$, qui est nul par hypothèse; donc $\chi(\gamma) = 1$.

On a $\varepsilon(\gamma^n(y\chi)U) = \varepsilon(\gamma^n(y)U)$. En effet

$$\gamma^n(y\chi) = \lambda^n(y\chi + n - 1) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j(n-1)\lambda^{n-j}(y\chi) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \lambda^{n-j}(y\chi).$$

Donc

$$\varepsilon(\gamma^n(y\chi)U) = \varepsilon\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \lambda^{n-j}(y\chi)U, \psi\right) =$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon(\lambda^{n-j}(y\chi)U, \psi)^{\binom{n-1}{j}(parL.3)} =$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon(\lambda^{n-j}(y)U, \psi)^{\binom{n-1}{j}} = \varepsilon(\gamma^n(y)U).$$

Fixons maintenant $s \in I$. On suppose que $W_s = \gamma^m(y) \otimes W'$, avec $\dim y = 0, 1 \leq m \leq n_s$ et $W' \in R(G_s)^{n_s - m}$. Soit $U = W' \otimes (\otimes_{I-\{s\}} W_i) \otimes V$.

On peut écrire $y = \sum_{j=1}^{t} m_j x_j$, avec x_j irréductibles, $\dim x_j = d_j; \dim y = 0$ signifie que $\sum m_j d_j = 0$, donc $y = \sum_{j=1}^{t} m_j(x_j - d_j)$. Pour chaque j il existe un caractère non- ramifié χ_j tel que $x_j\chi_j$ soit galoisienne. On a

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\gamma^m(y) \otimes U) = \varepsilon\left(U \otimes \sum_{i_1+\ldots+i_t=m} \gamma^{i_1}(m_1(x_1 - d_1))\ldots\right.\\
&\left.\ldots\gamma^{i_t}(m_t(x_t - d_t)), \psi\right) =\\
&= \varepsilon\left(U \otimes \textstyle\sum_{i_1+\ldots+i_t=m} \gamma^{i_1}(m_1(x_1 - d_1)\chi_1)\ldots\right.\\
&\left.(\ldots\gamma^{i_t}(m_t(x_t - d_t)\chi_t), \psi\right) =\\
&= \prod_{i_1+\ldots+i_t=m} \varepsilon(\gamma^{i_1}(m_1(x_1\chi_1 - d_1 - d_1\chi_1 + d_1))\ldots\\
&\ldots\gamma^{i_t}(m_t(x_t\chi_t - d_t - d_t\chi_t + d_t))U, \psi)
\end{aligned} \tag{5.3.1.}$$

Dans ces égalités, on a appliqué le Lemme 3. Ceci est légitime, car, pour chaque j, $\dim m_j(x_j - d_j) = 0$, donc $\dim\left(\lambda^{i_j}(m_j(x_j - d_j))\right) = 0$; par le Lemme 2, on déduit que

a $\left(U \otimes \lambda^{i_j}(m_j(x_j - d_j)) \prod_{h\neq j} \gamma^{i_h}(m_h x_h\chi_h - d_h - d_h\chi_h + d_h)\right)$ est nul.

Pour chaque j entre 1 et m, soit $x = x_j$, $d = d_j$, $\chi = \chi_j$, $i = i_j$, $r = m_j$ et $U' = \otimes \prod_{h\neq j} \gamma^{i_h}(m_h x_h\chi_h - d_h - d_h\chi_h + d_h)$. Alors

$$\varepsilon(\gamma^i(r(x\chi - d + d(1-\chi))) \otimes U', \psi) =$$

$$= \prod_{k=0}^{i} \varepsilon(\gamma^k(r(x\chi - d))\gamma^{i-k}(rd(1-\chi)) \otimes U', \psi).$$

Dans le produit, tous les facteurs ε sont 1, à l'exception de celui qui correspond à $k = i$. C'est une conséquence du Théorème **2.9.**, qui donne la formule

$$\varepsilon(W \otimes V, \psi) = \det W(\gamma),$$

qui est applicable [avec $W = \gamma^{i-k}(rd(1-\chi))$] car $\gamma^{i-k}(rd(1-\chi))$ est de dimension 0 et non-ramifiée et $\gamma^k(r(x\chi - d)) \otimes U'$ est sans constituant modéré. Si $i - k > 1$, alors $\gamma^{i-k}(rd(1-\chi))$ est de déterminant trivial, donc le facteur ε corespondant est 1. Si $i - k = 1$, alors $\det rd(1-\chi) = \chi^{-rd}$ est non-ramifié et la valuation de l'élément γ correspondant est nulle, par le Lemme 2. Il reste alors

$$\varepsilon(\gamma^i(r(x\chi - d + d(1-\chi))) \otimes U', \psi) = \varepsilon(\gamma^i(r(x\chi - d)) \otimes U', \psi)$$

La formule (5.3.1) devient maintenant

$$\varepsilon(\gamma^m(y)\otimes U) = \prod_{i_1+\ldots+i_t=m} \varepsilon(\gamma^{i_1}(m_1(x_1\chi_1-d_1))\ldots\gamma^{i_t}(m_t(x_t\chi_t-d_t))U,\psi)$$

$$= \varepsilon(\gamma^m(y')\otimes U.),$$

avec $y' = \sum_{j=1}^{t} m_j x_j \chi_j$, galoisienne.

5.4. *Supposons que le groupes G_i (qui peuvent être supposés finis par* **5.3***) sont tous abéliens. Alors $\varepsilon((\otimes_I W_i)\otimes V) = 1$. (La* **conjecture** *est* **vraie** *dans ce cas).*

Démonstration. Pour un groupe abélien $G, R(G)_n$ est engendré par les produits de la forme $(1-\chi_1)^{n_1}\ldots(1-\chi_r)^{n_r}$, avec $n_1+\ldots+n_r \geq n$ et $\chi_1,\ldots,\chi_r$ caractères de G. (cf. [Fu-La], III.1., p. 49). Il faut donc prouver que

$$\varepsilon((1-\chi_1)^{n_1}\ldots(1-\chi_r)^{n_r}\chi) = 1,$$

dans les hypothèses $\alpha(\chi) > 0, \alpha(\chi_i), \sum n_i(\alpha(\chi)-\alpha(\chi_i)) > \alpha(\chi)$. Mais ceci est exactement le Théorème **2.7**. ∎

5.5. *On peut supposer que tous les groupes G_i sont des p-groupes.*

Démonstration. Par **5.3.**, il existe une extension galoisienne finie L/K telle que W_i et V se factorisent à travers $G(L/K) = G$. On note L_1 le sous-corps fixé par $G(L/K)_1$. Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G, contenant le p-groupe $G(L/K)_1$. On a

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left(\mathrm{Res}_P^G((\otimes_I W_i)\otimes V)\right) = \varepsilon\left(\mathrm{Ind}_P^G\mathrm{Res}_P^G((\otimes_I W_i)\otimes V)\right) = \\ &= \varepsilon\left((\otimes_I W_i)\otimes V\otimes \mathrm{Ind}_P^G \mathbf{1}_P\right) = \\ &= \varepsilon((\otimes_I W_i)\otimes V)^m \varepsilon\left((\otimes_I W_i)\otimes V\otimes\left(\mathrm{Ind}_P^G\mathbf{1}_P - m\mathbf{1}_G\right)\right) \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

où $m = [G\colon P]$ (on a $(m,p)=1$). Supposons que $\varepsilon\left(\mathrm{Res}_P^G((\otimes_I W_i)\otimes V)\right) = 1$. Alors il s'ensuit que $\varepsilon((\otimes_I W_i)\otimes V) = 1$. En effet, $\alpha((\otimes_I W_i)\otimes V) > 0$, $\beta(\mathrm{Ind}_P^G\mathbf{1}_P - m\mathbf{1}_G) = \alpha(\mathrm{Ind}_P^G\mathbf{1}_P) = 0$ car $\mathrm{Ind}_P^G\mathbf{1}_P$ est la représentation de permutation de G sur G/P, dont le noyau contient G_1; on peut donc appliquer le Thórème **2.9.**, qui done

$$\varepsilon\left((\otimes_I W_i)\otimes V\otimes\left(\mathrm{Ind}_P^G\mathbf{1}_P - m\mathbf{1}_G\right)\right) = \det(\mathrm{Ind}_P^G\mathbf{1}_P)(\gamma) = \pm 1 \tag{5.5.2.}$$

avec $\nu(\gamma) = 0$ par la formule **2.8.** Si $p > 2$, alors $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)^m = \pm 1$, avec $(m, p) = 1$, donc $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)^{2m} = 1$ et $(2m, p) = 1$, ce qui entraîne $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) = 1$ car c'est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p.

Si $p = 2$, on applique le raisonnement suivant: $\det(\mathrm{Ind}_P^G \boldsymbol{1}_P)$ est un caractère de K^*, modérément ramifié. Mais on voit facilement que tout caractère modérément ramifié, d'ordre 2, d'un corps local de caractèristique résiduelle 2 est nécéssairement non ramifié. Puisque $\gamma \in U_K$, $\det(\mathrm{Ind}_P^G \boldsymbol{1}_p)(\gamma) = 1$; par conséquent $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)^m = 1$ avec $(m, 2) = 1$, donc $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) = 1$ car c'est une racine de l'unité d'ordre une puissance de 2. ∎

5.6. *Si $n_i = 1$ pour un indice i, alors on peut supposer que $W_i = 1 - \eta_i$, avec η_i un caratère de K^*.*

Démonstration. Soit E_i/K l'extension telle que $G_i = \mathrm{Gal}(E_i/K)$. Par le théorème de Brauer, $W_i = \sum m_j \mathrm{Ind}_{H_j}^{G_j}(1 - \eta_j)$, avec $m_j \in \mathbb{Z}, H_j$ sous groupes de G_i et η_j caractère de H_j. Soit L_j le corps fixé par H_j.

Si on désigne par $\mathbf{W}_j$ le groupe de Weil $\mathbf{W}(\overline{K}/L_j)$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) &= \varepsilon\left(W_i \otimes \left(\bigotimes_{t \neq i} W_t\right) \otimes V\right) = \\ &= \prod \varepsilon^{m_j}\left(\mathrm{Ind}_{H_j}^{G_j}(1 - \eta_j) \otimes \left(\bigotimes_{t \neq i} W_t\right) \otimes V\right) = \\ &= \prod \varepsilon^{m_j}\left((1 - \eta_j) \otimes \left(\bigotimes_{t \neq i} W_t|_{\mathbf{W}_j}\right) \otimes V|_{\mathbf{W}_j}\right) \end{aligned} \tag{5.6.1.}$$

Dans les hypothèses de la conjecture, on est amenés à remplacer K par L_j, W_i par $1 - \eta_j$ (et G_i par H_j), W_t par $W_t\big|_{\mathbf{W}_j}$ (et G_t par $\mathrm{Gal}(L_j E_t/L_j)$), V par $V\big|_{\mathbf{W}_j}$. L'inégalité **3.2.**(*) de l'hypothèse est vérifiée, avec α et β_i remplacés par $\psi_{L_j/K}(\alpha)$ et $\psi_{L_j/K}(\beta_i)$ (voir l'Observation qui suit **5.1.**) On voit que, si un W_t avec $N_t = 1$ est déja de la forme $1 - \eta_t$, alors il est remplacé par $1 - \eta_t \circ \boldsymbol{N}|_{Lj/K}$. On peut donc appliquer le procédé décrit ci dessus pour tout indice i avec $n_i = 1$ et on obtient la conclusion. ∎

5.7. On est en mesure d'énoncer la conjecture **(3.2.)** de la manière (équivalente) suivante:

"Soit χ un caractère de K, avec $\alpha(\chi) > 0$. Soient I un ensemble fini et, pour chaque indice $i \in I$, une extension E_i/K telle que $G_i = \mathrm{Gal}(E_i/K)$ est un p-groupe fini. On note β_i le dernier saut de la filtration de G_i par les groupes de ramification, en numérotation supérieure. On suppose que, pour chaque i, on a $\beta_i < \alpha(\chi)$. Soient $(n_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers positifs ou nuls, et pour chaque indice i, une représentation virtuelle W_i de G_i, qui se trouve dans le n_i- ème sous-espace de la γ-filtration de l'anneau des représentations de G_i.

Si on a

$$\sum_{i\in I} n_i(\alpha(\chi) - \beta_i) > \alpha(\chi),$$

peut-on conclure que $\varepsilon((\otimes_{i\in I} W_i) \otimes V)$ vaut 1 ?"

6. Le cas $n_i \leq 2$. Réduction au cas des extensions cycliques d'ordre p.

6.1. Dorénavant on suppose que $\boldsymbol{n_i \leq 2}$ **pour tout** i. Dans ce cas, en tenant compte des réductions démontrées, la conjecture peut s'énoncer de la façon suivante:

"Soit χ un caractère de K, avec $\alpha(\chi) > 0$ et N un entier positif. Soient $I = \{1, \ldots, N\}$ un ensemble fini et, pour chaque indice $i \in I$, une extension E_i de K telle que $G_i = \mathrm{Gal}(E_i/K)$ est un p-groupe fini. On note β_i le dernier saut de la filtration de G_i par les groupes de ramification, en numérotation supérieure. On suppose que, pour chaque i, on a $\beta_i < \alpha(\chi)$. Soit n un entier positif, $n < N$. Pour chaque indice $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit W_i une représentation virtuelle de G_i qui se trouve dans le deuxième sous-espace de la de la γ- filtration de l'anneau des représentations de G_i; pour $i \in \{n+1, \ldots, N\}$, soit η_i un caractère de G_i et $W_i = 1 - \eta_i$. Si on a

$$\sum_{i=1}^{n} 2(\alpha(\chi) - \beta_i) + \sum_{i=n+1}^{N} (\alpha(\chi) - \beta_i) > \alpha(\chi),$$

peut-on conclure que $\varepsilon((\otimes_{i\in I} W_i) \otimes \chi)$ vaut 1 ?"

Notre approche est de tenter de démontrer la conjecture ci-dessus par récurrence sur n, le nombre de représentations dans le deuxième cran. Pour $n = 0$, c'est la proposition **2.6.**

6.2. *Si $W_i \in R(G_i)_2$, alors on peut supposer que W_i est de la forme $Ind_{F_i}^K(1-\eta_i) - (1-\eta_i|_{K^*})$, avec F_i/K sous extension de E_i/K et η_i un caractère de $Gal(E_i/F_i)$.*

Démonstration. Par le Théorème de Brauer, on peut écrire

$$(6.2.1.)\quad W_i = \sum_{j=1}^{s} m_j \left(\mathrm{Ind}_{F_j}^{E_i}(1-\eta_j) - (1-\eta_j|_{K^*})\right) + \sum_{j=1}^{s} m_j(1-\eta_j)|_{K^*}),$$

avec $m_j \in \mathbb{Z}, F_j/K$ sous extensions de E_i/K et η_j caractères de $\mathrm{Gal}(E_i/F_j)$ (qui correspondent à des caractères η_j de F_j). La condition $\det W_i = 1$ s'écrit

$$(6.2.2.)\qquad \prod_{j=1}^{s} \det{}^{m_j}\left(\mathrm{Ind}_{F_j}^{E_i}(1-\eta_j)\right) = 1$$

Mais on a la formule suivante ([Deli], Prop. 1.2.)

$$\det\left(\mathrm{Ind}_H^G \rho\right)(x) = \varepsilon^{\dim\rho}\det(\rho)(t(x)), \quad \forall x \in G^{\mathrm{ab}},$$

où G est un groupe, H est un sous groupe d'indice fini, ρ est une représentation virtuelle de H, ε est le déterminant de la représentation de permutation de G sur G/H et $t\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$ est le transfert. En tenant aussi compte du fait que l'inclusion correspond (par l'application de réciprocité) au transfert, (6.2.2.) devient

$$(6.2.3.)\qquad \prod \eta_j|_{K^*}{}^{m_j} = 1$$

On peut supposer que $m_j = 1$ pour $1 \le j \le r$ et $m_j = -1$ pour $r+1 \le j \le s$. Soit $\sigma_j = \eta_j|_{K^*}$ pour $1 \le j \le r$ et $\tau_{j-r} = \eta_j|_{K^*}$ pour $r+1 \le j \le s$. Alors (6.2.3.) devient $\sigma_1 \dots \sigma_r = \tau_1 \dots \tau_t$ (avec $t = s-r$) et

$$\sum_{j=1}^{s} m_j(1-\eta_j|_{K^*}) = \sum_{j=1}^{r}(\sigma_j - 1) - \sum_{j=1}^{t}(\tau_j - 1)$$

Par la formule $(\sigma-1)+(\sigma'-1) = (\sigma\sigma'-1)-(\sigma-1)(\sigma'-1)$, appliquée de manière répétée, on obtient

$$\sum_{j=1}^{r}(\sigma_j - 1) = (\sigma_1 \dots \sigma_r - 1) -$$

$$-[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)+(\sigma_1\sigma_2-1)(\sigma_3-1)+\ldots+(\sigma_1\ldots\sigma_{r-1}-1)(\sigma_r-1)]$$

et de même pour les τ_j. Donc $\sum_{j=1}^{s} m_j(1-\eta_j\big|_{K^*})$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{j=1}^{s} m_j(1-\eta_j\big|_{K^*}) = \sum \pm(\sigma-1)(\sigma'-1), \tag{6.2.4.}$$

avec σ et σ' caractères de K^*, car on a vu que $\sigma_1\ldots\sigma_r=\tau_1\ldots\tau_t$.

En outre, si σ est un caractère qui apparaît dans la some (6.2.4.), $\alpha(\sigma)\leq\beta_i$ puisqu'il correspond à un caractère de G_i. Donc $\varepsilon((\otimes_{j\in I}W_j)\otimes\chi)$ s'écrit, utilisant (6.2.1.), comme un produit de facteurs ε dans lesqueles W_i est remplacé soit par une représentation virtuelle de la forme annoncée, soit par $(\sigma-1)(\sigma'-1)$, avec σ et σ' caractères de K^*. Mais ces derniers facteurs sont égaux à 1 par l'hypothèse de la récurrence.

6.3. *Si $W_i\in\boldsymbol{R}(G_i)_2$, alors on peut supposer que W_i est de la forme $Ind_{F_i}^{K}(1-\eta_i)-(1-\eta_i\big|_{K^*})$, avec F_i/K* **sous extension cyclique d'ordre** *p de E_i/K et η_i un caractère de $Gal(E_i/F_i)$.*

Démonstration. Si dans **6.2.**, F_i/K est une sous extension d'ordre p, on a fini. Sinon, puisque G_i est un p-groupe et $\mathrm{Gal}(E_i/F_i)$ un sous groupe de G_i, il existe une sous extension galoisiene L_i de F_i/K, d'ordre p. (En effet, pour un p-groupe G et un sous groupe d'indice fini H de G, $[G\colon H]=p^s$, il existe pour chaque $0\leq j\leq s$ un sous groupe H_j tel que $H\leq H_j\leq G$ et $[G\colon H_j]=p^j$. [Hupp], III.7.2.e., p. 301). Ici on prend $j=1$ et le sous groupe H_j est maximal, donc normal, i.e. l'extension L_i/K est galoisienne). On peut écrire (pour simplifier les notations, on omet l'indice i)

$$W=\mathrm{Ind}_L^K\left(\mathrm{Ind}_F^L(1-\eta)-(1-\eta\big|_{L^*})\right)+\mathrm{Ind}_L^K(1-\eta\big|_{L^*})-(1-\eta\big|_{K^*})$$

Donc

$$\varepsilon(W\otimes(\otimes_{j\neq i}W_j)\otimes\chi)=\varepsilon(\mathrm{Ind}_L^K(\mathrm{Ind}_F^L(1-\eta)-(1-\eta\big|_{L^*}))\otimes(\otimes_{j\neq i}W_j)\otimes\chi)\cdot$$
$$\cdot\varepsilon(\mathrm{Ind}_L^K(1-\eta\big|_{L^*})-(1-\eta\big|_{K^*})\otimes(\otimes_{j\neq i}W_j)\otimes\chi).$$

Dans le deuxième facteur ε, W_i est remplacée par une représentation de la forme annoncée et on n'a pas modifié les autres représentations. Le premier facteur ε est égal à

$$\varepsilon((\mathrm{Ind}_F^L(1-\eta)-(1-\eta\big|_{L^*}))\otimes(\otimes_{j\neq 1}W_j\big|_{\mathbf{W}_L})\otimes\chi\circ\boldsymbol{N}_{L/K})$$

Ici on a $[F_i\colon L_i]=[F_i\colon K]/p$. Si $[F_i\colon L_i]=p$, on a fini; sinon on reprend le procédé avec F_i/L_i au lieu de F_i/K.

Lemme. *Si L et E sont des extensions finies de K et η est un caractère d'ordre fini de E^*, alors*

$$(\mathrm{Ind}_E^K\eta)\big|_L=\sum_\sigma \mathrm{Ind}_{L\cdot\sigma E}^L(\eta\circ\sigma^{-1}\circ\boldsymbol{N}_{L\cdot\sigma E/\sigma E}), \tag{6.3.1.}$$

où la somme porte sur un-système complet et indépendant de représentants σ des doubles classes de $\mathbf{W}_L\backslash\mathbf{W}_K/\mathbf{W}_E$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème de Mackey à la situation indiquée, en tenant compte de la correspondance donnée par l'application de réciprocité et du fait que toutes les représentations se factorisent à travers des quotients finis (i.e. au lieu de prendre des groupes de Weil, on aurait pu prendre un groupe de Galois fini, suffisamment grand). ∎

Il faut vérifier que $W_j\big|_{\mathbf{W}_L}$ et $\chi\circ\boldsymbol{N}_{L/K}$ sont des représentations qui satisfont aux inégalités (*) de la conjecture (cela est garanti par l'Observation du 5.1.); d'autre part, il faut voir que, si $W_j=\mathrm{Ind}_{F_j}^K(1-\eta_j)-(1-\eta_j\big|_{L^*})$, avec $[F_j\colon K]=p$, alors $W_j\big|_{\mathbf{W}_L}$ est de la forme $\mathrm{Ind}_{L_j}^L(1-\eta_j')-(1-\eta_j'\big|_{L^*})$, avec L_j extension de L, η_j' caractère de L_j^* et $[L_j\colon L]=p$. Cela signifie que, si W_j était déjà comme dans l'énoncé, elle le reste, c'est à dire que la manipulation décrite ici peut être appliquée successivement pour tous les $j\leq n$.

Fixons $1\leq j\leq n$ et posons $F=F_j,\ L=L_i,\ \eta=\eta_j$. Puisque $\mathbf{W}_L\triangleleft\mathbf{W}$, $\mathbf{W}_L\backslash\mathbf{W}_K/\mathbf{W}_F=\mathbf{W}_K/\mathbf{W}_L\mathbf{W}_F=\mathbf{W}_K/\mathbf{W}_{L\cap F}$. Il n'y a pas d'extension intérmédiaire entre L et K, donc il a deux possibilités: $L\cap F=K$ ou $L\cap F=L$.

i) $L\cap F=L$. Dans ce cas $\mathbf{W}_K/\mathbf{W}_{L\cap F}=\mathbf{W}_K/\mathbf{W}_K=\{1\}$ et (6.3.1.) donne

$$W_j\big|_{\mathbf{W}_L}=\mathrm{Ind}_{LF}^L(1-\eta\circ\boldsymbol{N}_{LF/F})-(1-\eta\big|_{K^*}\circ\boldsymbol{N}_{L/K})$$

Mais $\eta\big|_{K^*}\circ\boldsymbol{N}_{L/K}=(\eta\circ\boldsymbol{N}_{LF/F})\big|_{L^*}$.

ii) $L \subseteq F$. Alors $\mathbf{W}_K/\mathbf{W}_{L\cap F} = \mathbf{W}_K/\mathbf{W}_L \cong \mathrm{Gal}(L/K)$ et on a

$$\begin{aligned} W_j\big|_{\mathbf{W}_L} &= \sum_{\sigma\in G(L/K)} \mathrm{Ind}_{\sigma F}^{L}(1-\eta\circ\sigma^{-1}) - (1-\eta\big|_{K^*}\circ \boldsymbol{N}_{L/K}) = \\ &\sum_{\sigma\in G(L/K)} (\mathrm{Ind}_{\sigma F}^{L}(1-\eta\circ\sigma^{-1}) - (1-\eta\circ\sigma^{-1}\big|_L))+ \\ &+ \sum_{\sigma\in G(L/K)} (1-\eta\circ\sigma^{-1}\big|_L) - (1-\eta\big|_{K^*}\circ \boldsymbol{N}_{L/K}) \end{aligned} \tag{6.3.2.}$$

La première somme porte sur des représentations de la "bonne" forme et $[\sigma F\colon L] < [F\colon K]$; quant au terme

$$C = \sum_{\sigma\in G(L/K)} (1-\eta\circ\sigma^{-1}\big|_L) - (1-\eta\big|_{K^*}\circ \boldsymbol{N}_{L/K}),$$

c'est une somme du type $\sum \pm(\sigma-1)$, avec σ caractère de L^* et de déterminant $\det C = (\eta\big|_{K^*}\circ \boldsymbol{N}_{L/K}).\prod_{\sigma\in G(L/K)}(\eta\circ\sigma^{-1}\big|_L)^{-1} = 1$; on peut alors écrire C sous la forme $\sum \pm(\sigma-1)(\sigma'-1)$, comme le montre le raisonnement de la fin de la démonstration de **6.2.** En remplaçant $W_j\big|_{\mathbf{W}_L}$ par (6.3.3.), le facteur ε correspondant à C sera alors 1, par l'hypothèse de la récurrence. ∎

7. Estimations des valuations. Soit ψ un caractère additif non trivial de K^*, fixé dans ce numéro. A un changement de notation près, la Proposition qui suit est la Proposition II.5.12., p. 42, [Weil]. Elle nous servira systématiquement dans tous les calculs décisifs.

7.1. Proposition. *Soit n l'ordre du caractère additif ψ et $a \in K$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\psi(ax) = 1$ pour tout x avec $\nu_K(x) \geq m$ si et seulement si $\nu_K(a) \geq -n-m$.* ∎

La formule (2.3.1.) fait intervenir, pour un caractère χ de K^*, un élément $a \in K$ tel que $\chi(1+x) = \psi(ax)$, pour tout $x \in K$ tel que $\nu(x) > \alpha(\chi)/2$. On s'intéresse à ces éléments.

7.2. Proposition. *Soit χ un caractère de K^* avec $\alpha = \alpha(\chi) > 0$ et $t \in \boldsymbol{R}$, $\alpha/p \leq t < \alpha$. Alors il existe un élément $a \in K$ tel que*

$$\chi(Ex) = \psi(ax), \quad \forall x \in K, \nu_K(x) > t.$$

La valuation de a est $-(1+n(\psi)+\alpha)$ et a est unique mod$^*U(\alpha-t)$. Si $t \leq \alpha/2$, pour a comme ci-dessus on a aussi $\chi(1+x) = \psi(ax)$, $\forall x \in K, \nu_K(x) > \alpha(\chi)/2$. En outre, si $y \in K$ est de valuation plus grande que $\alpha(\chi)$, alors $\chi(1+x+y) = \chi(1+x)$, pour tout $x \in P_K$.

La démonstration est standard et on la omet. ∎

7.3. Proposition. *Soient E et L des extensions galoisiennes finies de K avec $L \supseteq E, \chi$ un caractère de K^*, η un caractère de Gal(L/E) (on note toujours η le caractère correspondant de E^*), avec $\alpha(\chi) > \alpha(L/K)$. Soit e l'indice de ramification de l'extension $E/K, \alpha = \alpha(\chi)$, $\beta = \alpha(L/K)$. La* **Prop.7.2.** *garantit l'existence des éléments:*

$a \in K$ *tel que* $\chi(Ex) = \psi(ax), \quad \forall x \in K, \ \nu_K(x) > \alpha/p$;
$a' \in E$ *tel que* $\chi \circ \boldsymbol{N}_{E/K}(Ey) = \psi \circ Tr_{E/K}(a'y), \forall y \in E, \ \nu_E(y) >$
$> \psi_{E/K}(\alpha)/p$;
$c \in E$ *tel que* $\eta(Ey) = \psi \circ Tr_{E/K}(cy), \quad \forall y \in E, \ \nu_E(y) > \psi_{E/K}(\beta)/p$;
$b \in K$ *tel que* $\eta_j\big|_{K^*}(Ex) = \psi(bx), \quad \forall x \in K, \ \nu_K(x) > \beta/p$.

Alors on peut choisir ces éléments de sorte que:
(i) $b = Tr_{E/K}(c)$;
(ii) $\nu_E(a' - a) \leq -n(\psi \circ Tr_{E/K}) - \frac{e\alpha(\chi)}{p} - 1$.

Démonstration. Tout d'abord on remarque que $\alpha(\chi \circ \boldsymbol{N}_{E/K}) \leq \psi_{E/K}(\alpha(\chi))$ et que $\alpha(\eta) \leq \alpha(E/K) \leq \psi_{E/K}(\beta)$; le caractère $\eta_j\big|_{K^*}$ correspond à un caractère de Gal(L/K), donc $\alpha(\eta_j\big|_{K^*}) \leq \beta$. L'application de la **Prop. 7.2.** est donc légitime.

(i) Si $x \in K, \nu_K(x) > \beta/p$, alors $\nu_E(x) > e\beta/p \geq \psi_{E/K}(\beta)/p$, donc

$$\psi(bx) = \eta(Ex) = \psi \circ Tr_{E/K}(cx) = \psi(Tr_{E/K}(c)x)$$

On peut choisir donc $b = Tr_{E/K}(c)$.

(ii) Soit $y \in E, \ \nu_E(y) > e\alpha/p$. Par la formule (4.4.5.), on a $\boldsymbol{N}_{E/K}(Ey)$ $\equiv ETr_{E/K}(y) \mathrm{mod}^* U_K(\alpha')$, avec $\alpha' > \alpha$, donc $\chi \circ \boldsymbol{N}_{E/K}(Ey) =$ $= \chi \circ Tr_{E/K}(y)$, c'est à dire $\psi \circ Tr_{E/K}(a'y) = \psi(aTr_{E/K}(y)) =$ $= \psi(Tr_{E/K}(ay))$, puisque $\nu_K(Try) = e^{-1}\nu_E(Try) \geq e^{-1}\nu_E(y) > \alpha/p$. Donc $\psi \circ Tr_{E/K}((a - a')y) = 1, \quad \forall y \in E, \ \nu_E(y) \geq 1 + e\alpha/p$. Par la **Prop. 7.1.**, $\nu_E(a' - a)$ est au moins $-(n(\psi \circ Tr_{E/K}) + e\alpha/p + 1)$.

Observation. Dans la démonstration des divers cas de la conjecture on peut supposer, pour simplifier les calculs, que $n(\psi) = 0$, puisque $\varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes \chi)$ ne depend pas du choix du caractère additif ψ. Dans ce cas, $n(\psi \circ Tr_{E/K}) = d_{E/K}$, la valuation de la differente de l'extension E/K.

8. Le cas $\boldsymbol{n}_1 = 2, \boldsymbol{n}_2 = \ldots = \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{N}} = 1$. Dans ce cas, vu les réductions démontrées, le problème peut s'énoncer comme suit:

"Soit χ un caractère de K, avec $\alpha = \alpha(\chi) > 0$ et N un entier positif. Soient $I = \{1, \ldots, N\}$ un ensemble fini, E_1 une extension de K telle que $G_1 = \mathrm{Gal}(E_1/K)$ est un p-groupe fini et E/K une sous extension de E_1/K,

cyclique d'ordre p. Soit η_1 un caractère de $\mathrm{Gal}(E/E_1)$ et, pour chaque $i \in \{2, \ldots, N\}$, soit η_i un caractère de K^*. On pose $\beta_1 = \alpha(E_1/K)$ et $\beta_i = \alpha(\eta_i)$. On suppose que $\beta_i < \alpha(\chi)$ pour tout $i \in I$ et que

$$2(\alpha - \beta_1) + \sum_{i=2}^{N} (\alpha - \beta_i) > \alpha.$$

Alors $\varepsilon((\mathrm{Ind}_E^K(1-\eta_1)(1-\eta_1\big|_{K^*})) \otimes \prod_{i\geq 2}(1-\eta_i) \otimes \chi) = 1$. "

Observation. L'inégalité de l'hypothèse o pour conséquence immédiate $\sum_{i=1}^{N}(\alpha - \beta_i) > \beta_i$. On va utiliser fréquemment cette obsérvation.

L'idée de la démonstration est la suivante: on exprime $\varepsilon((\otimes_{i\in I} W_i \otimes \chi)$ comme un produit de facteurs du type $\varepsilon(\chi \prod(1-\eta_i))$, pour lesquels on applique la formule (2.4.2.); aprés une évaluation des éléments qui interviennent, on exprime les facteurs du type $\chi(1+C)$ comme $\psi(aC)$; on démontre que la valuation de aC est au moins $-n(\psi)$, donc $\psi(aC) = 1$.

Démonstration.

8.1. Soit $\varepsilon = \varepsilon((\mathrm{Ind}_E^K(1-\eta_1) - (1-\eta_1\big|_{k^*})) \otimes \prod_{i\geq 2}(1-\eta_i) \otimes \chi)$. Alors

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varepsilon(\mathrm{Ind}_E^K(1-\eta_1)\otimes\prod_{i\geq 2}(1-\eta_i)\otimes\chi)}{\varepsilon((1-\eta_1\big|_{K^*})\otimes\prod_{i\geq 2}(1-\eta_i)\otimes\chi)} = \\ &= \frac{\varepsilon((1-\eta_1)\otimes\prod_{i\geq 2}(1-\eta_i\circ \boldsymbol{N}_{E/K}\otimes\chi\circ\boldsymbol{N}_{E/K}}{\varepsilon((1-\eta_1\big|_{K^*})\otimes\prod_{i\geq 2}(1-\eta_i)\otimes\chi)}. \end{aligned} \tag{8.1.1.}$$

Pour abrèger, on note ψ_E la function de Herbrand $\psi_{E/K}, e$ l'indice de ramification $e_{E/K}(e = \text{ou } e = p), d$ la valuation de l'idéal differente de l'extension $E/K, \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_{E/K}, Tr = Tr_{E/K}$. On a aussi besoin de $\gamma = \alpha(E/K)$ (évidement, $\gamma \leq \beta_1$).

Si E/K est non ramifiée, alors $\psi_E(t) = t$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$.

Si E/K est ramifiée, alors

$$\psi_E(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \gamma \\ pt - (p-1)\gamma & \text{si } \gamma \leq t \end{cases}$$

Notre approche est d'essayer d'appliquer la formule **(2.4.2.)** à chaque facteur ε dans la relation ci-dessus et on a donc besoin des éléments fournis par la **Prop. 7.2.**. En ce qui concerne les conducteurs, on a

$\alpha(\eta_1) \leq \alpha(E_1/E) \leq \psi_E(\beta_1)$;
$\alpha(\eta_j\big|_{K^*}) \leq \alpha(E_1/K) = \beta_1$,
puisque $\eta_j\big|_{K^*}$correspond à un caractère de $\mathrm{Gal}(E_1/K)$;
$\alpha(\eta_i \circ \boldsymbol{N}_{E/K}) \leq \psi_E(\beta_i)$;
$\alpha(\chi \circ \boldsymbol{N}_{E/K}) = \psi_E(\alpha)$.

Soient $a, b_i \in K(i \in I)$ et $a', c_i \in E(i \in I)$ tels que

$a \in K$ tel que $\chi(Ex) = \psi(ax),\ \forall x \in R, \nu_K(x) > \alpha/p$;
$b_1 \in K$ tel que $\eta_j\big|K^*(Ex) = \psi(b_1 x),\ \forall x \in K,\ \nu_K(x) > \beta_1/p$;
$b_i \in K$ tel que $\eta_i(Ex) = \psi(b_i x),\ \forall x \in K, \nu_K(x) > \beta_i/p,$ pour tout $i \geq 2$;
$a' \in E$ tel que $\chi \circ N_{E/K}(Ey) = \psi \circ Tr_{E/K}(a'y),\ \forall y \in E, \nu_E(y) > \psi(\alpha)/p$;
$c_1 \in E$ tel que $\eta_1(Ey) = \psi \circ Tr_{E/K}(c_1 y),\ \forall y \in E, \nu_E(y) > \psi_{E/K}(\beta_1)/p$;
$c_i \in E$ tel que $\eta_i(Ey) = \psi \circ Tr_{E/K}(c_i y),\ \forall y \in E, \nu_E(y) > \psi_{E/K}(\beta_i)/p$,
pour tout $i \geq 2$.

Les valuations de ces éléments sont

$$\nu_E(a) = -e(1+\alpha); \nu_E(a') = -(1+d+\psi_E(\alpha)) = -e(1+\alpha),$$
puisque $\alpha > \alpha(E/K)$;
$$\nu_E(b_1) \geq -e(1+\beta_1); \nu_E(c_1) \geq -(1+d+\psi_E(\beta_1)) = -e(1+\beta_1);$$
$$\nu_E(b_i) = -e(1+\beta_i);\quad \nu_E(c_i) \geq -(1+d+\psi_E(\beta_1)).$$

En fait, on a besoin plutôt des rapports $p_i = b_i/a, q_i = c_i/a'$ et des différences $s_i = q_i - p_i$. On estime la valuation de ceux-ci:

$$\text{(8.1.2.)}\qquad \begin{array}{ll} \nu_K(p_1) \geq a - b_1; & \nu_E(q_1) \geq \psi_E(\alpha) - \psi_E(\beta_1) = e(\alpha - \beta_1); \\ \nu_K(p_i) \geq \alpha - \beta_i; & \nu_K(q_i) \geq \psi_E(\alpha) - \psi(\beta_i); \end{array}$$

Soit $r_i = c_i - b_i$ pour $i \geq 2$ et $r = a' - a$. Par la **Prop. 7.3.**,

$$\nu_E(r) \geq -d - \frac{e\alpha}{p} - 1 \text{ et } \nu_E(r_i) \geq -d - \frac{e\beta_i}{p} - 1.$$

Alors $\nu_E(s_i) = \nu_E\left(\frac{b_i + r_i}{a+r} - \frac{b_i}{a}\right) = \nu_E\left(\frac{r_i a - r b_i}{a(a+r)}\right)$
$\geq \min\left(\nu_E\left(\frac{r_i}{a+r}\right), \nu_E\left(\frac{r b_i}{a(a+r)}\right)\right)$. En regardant les estimations ci-dessus, on obtient

$$\nu_e\left(\frac{r_i}{a+r}\right) \geq \psi_E(\alpha) - \frac{e\beta_i}{p};\quad \nu_E\left(\frac{r b_i}{a(a+r)}\right) \geq \psi_E(\alpha) - \frac{e\alpha}{p} + e(\alpha - \beta_i).$$

C'est immédiat que la plus petite de ces valeurs est $\psi_E(\alpha) - \frac{e\beta_i}{p}$, donc

$$\text{(8.1.3.)}\qquad \nu_E(s_i) \geq \psi(\alpha) - \frac{e\beta_i}{p}$$

Le lemme suivant est une conséquence directe du **Cor. 2.4.**, obtenu par réarrangement des facteurs.

8.2. Lemme. *Avec les notations du* **Cor. 2.4.**,*et en posant* $p_i = b_i/a$, *on a*

$$\varepsilon\left(\chi\prod_{i\in I}(1-\eta_i)\right) = \tag{8.2.1}$$

$$= \chi^{-1}\left(\prod_{J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}\right)\cdot\prod_{i\in I}\eta_i^{-1}\left(\prod_{i\in J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}\right)$$

8.3. En appliquant ce lemme, la formule (8.1.1.) devient

$$\varepsilon = \chi^{-1}\left(\frac{N\left(\prod_{J\subseteq I}(1+q(J))^{\varepsilon(J)}\right)}{\prod_{J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}}\right)\cdot \tag{8.3.1.}$$

$$\cdot\eta_1^{-1}\left(\frac{\prod_{1\in J\subseteq I}(1+q(J))^{\varepsilon(J)}}{\prod_{1\in J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}}\right)\cdot\prod_{i\in I-\{1\}}\eta_i^{-1}\left(\frac{N\left(\prod_{i\in J\subseteq I}(1+q(J))^{\varepsilon(J)}\right)}{\prod_{i\in J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}}\right)$$

Maintenant on regarde chaque facteur de cette relation.

8.4. *On a* $H_1 = \eta_1^{-1}\left(\frac{\prod_{1\in J\subseteq I}(1+q(J))^{\varepsilon(J)}}{\prod_{1\in J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}}\right) = 1.$

Démonstration. On remarque que $\nu_K(p_1\cdots p_N) \geq \sum_{i\in I}(\alpha-\beta_i) > \beta_1 \geq \alpha(\eta_1|_{K^*})$ et que $\nu_E(q_1\cdots q_N) \geq \sum_{i\in I}(\psi_E(\alpha)-\psi_E(\beta_i)) > \psi_E(\beta_1) \geq \alpha(\eta_1)$.

Puisque $\prod_{J\subseteq I}(1+t(J))^{\varepsilon(J)} \equiv 1 \pmod{\ }(\prod_I t_i)$, on obtient $\eta_1\left(\prod_{J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}\right) = 1$ et $\eta_i\left(\prod_{J\subseteq I}(1+q(J))^{\varepsilon(J)}\right) = 1$.

Mais $\prod_{1\in J\subset I}(1+t(J))^{\varepsilon(J)} \equiv \prod_{1\notin J\subset I}(1+t(J))^{-\varepsilon(J)} \bmod (\prod_I t_i)$, donc

$$H_1 = \eta_1^{-1}\left(\frac{\prod_{1\notin J\subseteq I}(1+q(J))^{-\varepsilon(J)}}{\prod_{1\notin J\subseteq I}(1+p(J))^{-\varepsilon(J)}}\right) =$$

$$= \eta_1\left(\prod_{1\notin J\subseteq I}\left(\frac{(1+p(J)+s(J))}{(1+p(J))}\right)^{\varepsilon(J)}\right)$$

Lemme 1. *Avec les notations ci-dessus,* $\nu_E\left(\prod_J p_j\prod_T s_t\right) > \beta_1$, *pour toute paire de sous-ensembles de* $I-\{1\}$ *avec les propriétes* $J\cup T = I-\{1\}, J\cap T = \emptyset, T\neq\emptyset$.

Preuve du lemme. En tenant compte des formules (8.1.2.) et (8.1.3.),

$$\nu_E\left(\prod_J p_j \prod_T s_t\right) \geq \sum_J e(\alpha-\beta_j) + \sum_T \left(\psi_E(\alpha) - \frac{e\beta_t}{p}\right)$$

Si E/K est non ramifiée, il suffit de prouver que

$$\sum_J (\alpha-\beta_i) + \sum_T (\alpha - \frac{\beta_t}{p}) > \beta_1$$

$$\leftrightarrow (N-1)\alpha > \beta_1 + \sum_J \beta_j + \sum_T \frac{\beta_t}{p}$$

$$\leftrightarrow p(N-1)\alpha > p\beta_1 + \sum_J p\beta_j + \sum_T \beta_t$$

La dernière inégalité est vraie, si on tient compte de (***) de l'**Observation 3.3.**

Si E/K est ramifiée, on doit prouver que

$$\sum_J p(\alpha-\beta_j) + \sum_T (p\alpha - (p-1)\gamma_1 - \beta_t) > p\beta_1 - (p-1)\gamma_1$$

$$\Leftrightarrow p(N-1)\alpha > p\beta_1 - (p-1)\gamma_1 + p\sum_J \beta_j + \sum_T \beta_t + \sum_T (p-1)\gamma_1$$

$$\Leftarrow p(N-1)\alpha > p\beta_1 + (p-1)(|T|-1)\beta_1 + \sum_J p\beta_j + \sum_T \beta_t$$

En appliquant toujours (***) de l'**Observation 3.3.**, on se rend compte que la dernière inégalité est vraie: on a

$$p + (p-1)(|T|-1) + p|J| + |T| = p(N-1)+1$$

et $p \geq 2$, ce qui assure les hypothèses de (***). ∎

Ce lemme permet donc de négliger dans le calcul de H_1 les monômes divisbles par un monôme du type $\prod_J p_j \prod_T s_t$ avec $J \cup T = I - \{1\}, J \cap T = \emptyset, T \neq \emptyset$.

Il faut calculer alors $\prod_{J \subseteq I} \left(\frac{(1+p(J)+s(J))}{(1+p(J))}\right)^{\varepsilon(J)}$ (mod L), où L est l'idéal de $\mathbb{Z}[[(p_i)_I, (s_i)_I]]$ engendré par $\left\{\prod_J p_j \prod_T s_t \middle| J \cup T = I, J \cap T = \emptyset, T \neq \emptyset\right\}$.

Lemme 2. *Soit I un ensemble fini, $|I| = N$. Pour chaque N-uple d'entiers positifs ou nuls $\boldsymbol{n} = (n_i)_I$ on pose $|\boldsymbol{n}| = \sum_I n_i$, $\boldsymbol{n}! = \prod_I n_i$, $J(\boldsymbol{n}) = \{i \in I | n_i \neq 0\}$. Si $\boldsymbol{p} = (p_i)_I$, soit $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}} = \prod_I p_i^{n_i}$. Alors, dans $\mathbb{Z}[[(p_i)_I, (s_i)_I]]$, avec les notations ci-dessus, on a*

$$f = \prod_{J \subseteq I} \left(\frac{(1 + p(J) + s(J))}{(1 + p(J))} \right)^{\varepsilon(J)} \equiv 1 mod L.$$

Preuve du lemme. Puisqu'il s'agit partout de séries aux coéfficients entiers, il suffit de démontrer la relation dans $\boldsymbol{Q}[[(p_i)_I, (s_i)_I]]$. On a

$$\log \prod_{J \subseteq I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} = \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) \log(1 + t(J)) =$$

$$= \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t(J)^n = \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) t(J)^n$$

Mais on a

$$\sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) t(J)^n = \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) \sum_{|\boldsymbol{n}| = n, J(\boldsymbol{n}) \subseteq J} \frac{|\boldsymbol{n}|!}{\boldsymbol{n}!} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}} =$$

$$\sum_{|\boldsymbol{n}| = n} \frac{|\boldsymbol{n}|!}{\boldsymbol{n}!} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}} \sum_{J(\boldsymbol{n}) \subseteq J \subseteq I} \varepsilon(J) = \sum_{|\boldsymbol{n}| = n, J(\boldsymbol{n}) = I} \frac{|\boldsymbol{n}|!}{\boldsymbol{n}!} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}} (-1)^N$$

Donc

$$\log \prod_{J \subset I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} = \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{|\boldsymbol{n}| = n, J(\boldsymbol{n}) = I} \frac{|\boldsymbol{n}|!}{\boldsymbol{n}!} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}} (-1)^N =$$

$$= \sum_{J(\boldsymbol{n}) = I} (-1)^{N + |\boldsymbol{n}| - 1} \frac{(|\boldsymbol{n}| - 1)!}{\boldsymbol{n}!} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}}$$

Revenant à f:

$$\log f = \sum_{J(\boldsymbol{n}) = I} (-1)^{N + |\boldsymbol{n}| - 1} \frac{(|\boldsymbol{n}| - 1)!}{\boldsymbol{n}!} \left((\boldsymbol{p} + \boldsymbol{s})^{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}} \right)$$

Mais $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{s})^{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}} = (p_1+s_1)^{n_1}\cdots(p_N+s_N)^{n_N} - p_1^{n_1}\cdots p_N^{n_N}$ est un élément de L si $n_i \geq 1$ pour chaque i. Alors

$$f = \exp\log f \equiv 1 \bmod L$$

Ce Lemme, combiné avec le Lemme 1, permet de conclure.

8.5. *On a* $H_i = \eta_i^{-1}\left(\frac{N(\prod_{i\in J\subseteq I}(1+q(J))^{\varepsilon(J)})}{\prod_{i\in J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}}\right) = 1.$

Démonstration. On remarque d'abord que

$$\prod_{i\in J\subseteq J}(1+t(J))^{\varepsilon(J)} \equiv 1 \ mod \left(\prod_{i\neq j\in I} t_j\right).$$

Ceci découle du fait que le produit devient identiquement 1 chaque fois qu'on pose $t_j = 0$ pour $j \neq i$.

On peut donc écrire

$$\prod_{i\in J\subseteq I}(1+t(J))^{\varepsilon(j)} = 1 + \sum_{\substack{n_i\geq 0\\ n_j\geq 1, j\neq 1}} d_{\mathbf{n}}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}.$$

Par ailleurs, on a

$$\nu_K\left(\prod_{j\neq i} p_j\right) \geq \sum_{j\neq i}(\alpha-\beta_j) > \frac{\beta_i}{2} \geq \frac{\alpha(\eta_i)}{2}$$

et

$$\nu_K\left(\prod_{j\neq i} q_j\right) \geq \sum_{j\neq i}(\psi_E\alpha-\psi_E\beta_j) > \frac{\psi_E\beta_i}{2} \geq \frac{\alpha(\eta_i\circ N)}{2}$$

Donc

$$\eta_i\left(\prod_{i\in J\subseteq I}(1+p(J))^{\varepsilon(J)}\right) = \eta_i\left(1+\sum_{\substack{n_i\geq 0\\ n_j\geq 1, j\neq i}} d_{\mathbf{n}}\mathbf{p}^{\mathbf{n}}\right)$$

$$= \psi\left(b_i \sum_{\substack{n_i\geq 0\\ n_j\geq 1, j\neq i}} d_{\mathbf{n}}\mathbf{p}^{\mathbf{n}}\right) \overset{1}{=} \psi\left(b_1 \sum_{\substack{n_i\geq 0\\ n_j\geq 1, j\neq i}} d_{\mathbf{n}} p_i p_1^{n_1-1} p_2^{n_2}\cdots p_N^{n_N}\right)$$

$$\overset{2}{=} \psi \circ \ \mathrm{Tr}\left(c_1 \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq 1}} d'_{\mathbf{n}} \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}} \right),$$

avec $d'_{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}$. Dans l'égalité 1 on a utilisé $p_i = b_i/a$ et fait que $n_1 \geq 1$. Pour l'égalité 2 on se rappelle que $b_1 = \mathrm{Tr} c_1$. La dernière somme porte sur des monômes divisibles par $p_2 \dots p_N$.

En appliquant le même procédè à $\eta_i \circ \boldsymbol{N}$, on obtient

$$\eta_i \circ \boldsymbol{N} \left(\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)} \right) = \eta_i \circ \boldsymbol{N} \left(1 + \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_{\boldsymbol{n}} q^{\boldsymbol{n}} \right) =$$

$$\psi \circ \mathrm{Tr} \left(c_i \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_{\boldsymbol{n}} q^{\boldsymbol{n}} \right) = \psi \circ \mathrm{Tr} \left(c_1 \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq 1}} d'_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}} \right), \text{avec les mêmes}$$

$d'_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{Z}$. Si on fait le rapport des deux valeurs, on obtient

$$H_i = \psi \circ \ \mathrm{Tr} \left(-c_1 \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq 1}} d'_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}) \right)$$

Chaque terme de la somme est une combinaison linaire de monômes de la forme $\prod_J p_j \prod_T s_t$, avec $J \cup T = I - \{1\}$, $J \cap T = \oslash$, $T \neq \emptyset$. Le lemme 2 du paragraphe précedent montre que ces monômes sont de valuation supérieure à $\psi_E(\beta_1)$. Pour voir que $H_i = 1$, il reste à prouver que $1 + \nu_E(c_1) + \psi_E(\beta_1) \geq -d \Leftrightarrow \ 1 + \psi_E(\beta_1) - 1 - d - \psi_E(\beta_1) \geq -d$, évident. ∎

8.6. *On a* $H = \chi^{-1} \left(\frac{N(\prod_{J \subseteq I} (1+q(J))^{\varepsilon(J)})}{\prod_{J \subseteq I} (1+p(J))^{\varepsilon(J)}} \right) = 1.$

Démonstration. On peut écrire

$$\prod_{J \subset I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} = 1 + \sum_{J(\boldsymbol{n}) = I} h_{\boldsymbol{n}} t^{\boldsymbol{n}}, \text{ avec } h_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs

$$\nu_K(\prod_I p_i) \geq \sum_I (\alpha - \beta_i) > \frac{\alpha}{2}$$

$$\nu_E(\prod_I q_i) \geq \sum_I (\psi_E\alpha - \psi_E\beta_i) > \frac{\psi_E\alpha}{2} = \frac{\alpha(\chi \circ N)}{2}$$

Par consqúent

$$H = \psi\left(a \sum_{J(\boldsymbol{n})=I} h_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}} - \ \mathrm{Tr}\left(a' \sum_{J(\boldsymbol{n})=I} h_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}}\right)\right) =$$

$$= \psi\left(b_1 \sum_{J(\boldsymbol{n})=I} h_{\boldsymbol{n}} p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} \cdots p_N^{n_N} - \ \mathrm{Tr}\left(c_1 \sum_{J(\boldsymbol{n})=I} h_{\boldsymbol{n}} q_1^{n_1-1} q_2^{n_2} \cdots q_N^{n_N}\right)\right)$$

$$= \psi\left(\mathrm{Tr} c_1 \sum_{J(n)=I} h_{\boldsymbol{n}} (p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} \cdots p_N^{n_N} - q_1^{n_1-1} q_2^{n_2} \cdots q_N^{n_N})\right)$$

Mais l'expression ci-dessus est du même type que H_i dans le n° précédent. H vaut donc 1, par le même argument.

La démonstration est maintenant complète.

9. Le cas $\boldsymbol{N} = 2, \boldsymbol{n}_1 = n_2 = 2$.

Dans ce cas, le problème devient:

"Soit χ un caractère de K, avec $\alpha = \alpha(\chi) > 0$. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, on considère: E_i une extension de K telle que $G_i = \ \mathrm{Gal}(E_i/K)$ est un p–groupe fini, F_i/K une sous extension de E_i/K, cyclique d'ordre p et η_i un caractère de $\mathrm{Gal}(E/F_i)$. On pose $\beta_i = \alpha(E_i/K)$ et

$$W_i = \ \mathrm{Ind}_{F_i}^K(1 - \eta_i) - \left(1 - \eta_i\big|_K^*\right)$$

On suppose que $\beta_i < \alpha(\chi)$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et que

$$2(\alpha - \beta_1) + 2(\alpha - \beta_2) > \alpha.$$

Alors $\varepsilon(W_1 \otimes W_2 \otimes \chi) = 1$."

Dans la démonstration, on distingue deux cas: $F_1 = F_2$ ou $F_1 \neq F_2$ (on rappelle que toutes les extension considérées sont des extensions de $\overline{K}$). On applique le même principe qu'au paragraphe précédent, avec toutefois des particularités pour chaque cas. Les calculs détaillés peuvent être trouvés dans ma thèse doctorale, parue à l'Université Paris-Sud.

Remerciements

Je suis particulièrement reconnaissant à mon Professeur de l'Université Paris-Sud, M. Guy Henniart, qui m'a stimulé et guidé tout au long de la recherche sur ce sujet. Sans les encouragements de M. Ioan Tofan de l'Université de Iasi cet article n'aurait pas vu le jour et je tiens à lui apporter ma gratitude.

REFERENCES

[At-Ta] M. ATIYAH and D.O. TALL : Group representations, λ-rings and the J-homomorphism, *Topology* **8** (1969) 253-297

[Cu-Re] C.W. CURTIS and I. REINER : *Methods of Representation Theory* I, Wiley & Sons, New York, 1981

[Deli] P. DELIGNE : Les constantes locales des équation fonctionnelles des fonctions L, in *Modular Functions of One Variable II*, Lectures of Math. **349**, 501-597, Springer Verlag 1973

[De-He] P. DELIGNE et G. HENNIART : Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équation fonctionnelles de fonction L, Inv.Math.**64** (1981), 88-118

[Fu-La] W. FULTON, S. LANG: *Riemann-Roch Algebra*, Springer Veerlag 1985

[Henn] G. HENNIART : Représentations du groupe de Weil d'un corps local, *L'Enseignement mathématique*, T. XXVI, fasc 1-2 (1980) 155-172

[Hupp] B. HUPPERT : *Endliche Gruppen I*, Springer Verlag 1967

[Serr] J.-P. SERRE : *Corps locaux*, 2-ème édition , Publ.Inst.Math. Nancago, Hermann, Paris 1968

[Weil] A. WEIL : *Basic Number Theory*, in Grundlehren der Math. Wiss., Springer Verlag 1973

Received:21.III.1995

Department of Mathematics,
University "Al.I. Cuza",
6600 IAŞI,
ROMANIA