ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XLIV, s.I.a, Matematică, 1998, f1

FORMULATION EN DIVERGENCE COVARIANTE POUR LE MODÈLE DE NAGHDI

BY

GABRIELA ŢÂRDEA

ABSTRACT. The Naghdi's bidimensional model for thin shells is considered. By the use of covariant derivatives, we build on a mixed formulation which dualizes the transverse shear only, the bending moment and the membrane stress being searched in $[L^2(\omega)]^4_s$. The difference between this formulation and the one of [9] is that this one approximates these quantities themseves and not their products with the square root of a. Existence and uniqueness of the continuous's and discrete's solution problems are proved. The same results of error approximation are obtained as in [9].

Resumé. On considère le modèle bidimensionnel de Naghdi pour les coques minces en flexion. On construit une formulation mixte, duale en cisaillement et primale en l'effort membranaire et le moment de flexion qui approche, moyenant la dérivation covariante, ces quantités elles mêmes, et non pas leurs produits avec la racine de a, comme dans [9]. L'existence et l'unicité de la solution continue et discrete sont montrés. On obtient le même type de majoration d'erreur que dans [9].

1. Introduction. Cette note fait suite à [9] où on a introduit une formulation mixte pour dualiser le cisaillement transverse dans le modèle de Naghdi et laquelle employait la notion de divergence pour celui–là. Les quantités approchées étaient toutes multipliées par la racine de a, et cela à cause de la formule de liaison entre la divergence covariante et celle classique d'un champ de vecteurs tangent à la surface moyenne de la coque, i.e.:

$$Div \underset{\sim}{v} = \frac{1}{\sqrt{a}} div(\sqrt{a} \underset{\sim}{v}).$$

Le reflex d'avoir une formulation homogène a conduit à l'application de la même procèdure pour les deux autres inconnues, qui sont des tenseurs, le résultat étant donc qu'elles aussi étaient multipliées par la racine de a.

En gardant la même idée directrice, on cherche le cisaillement transverse dans $H(div;\omega)$, l'effort membranaire et le moment de flexion dans $[L^2(\omega)]^4_s$, mais on approche ces quantités elles mêmes et non pas leurs produits avec la racine de a.

Le principe de démonstration reste le même que dans [9], sauf qu'il faut adapter les raisonnements pour le cas de la divergence covariante, ce qui conduit à une plus grande technicité et longueur des démonstrations.

2. Preliminaires. Par la suite, les lettres grecques (sauf ε) prennent leurs valeurs dans l'ensemble d'indices et d'exposants $\{1,2\}$ et celles latines les prennent dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. On utilise la convention de sommation des indices répétés.

On considère une coque élastique, constituée d'un materiau homogène et isotrope et incastrée sur tout son bord lateral. Pour les notations ainsi que la description de la géométrie de la coque, on se reporte à [3].

On utilise également les notations introduites dans [9]. Ainsi, on pose:

$$T = (\underset{\sim}{t}, \underset{\approx}{n}, \underset{\approx}{m}); \quad X = (\zeta_3, (\zeta_\alpha)_{1\le\alpha\le2}, (s_\alpha)_{1\le\alpha\le2});$$

$$R = (\underset{\sim}{R}_1, \underset{\approx}{R}_2, \underset{\approx}{R}_3); \quad Y = (\eta_3, (\eta_\alpha)_{1\le\alpha\le2}, (r_\alpha)_{1\le\alpha\le2});$$

$$W = H(div;\omega) \times [L^2(\omega)]^4_s \times [L^2(\omega)]^4_s;$$

$$M = L^2(\omega) \times [H^1_0(\omega)]^2 \times [H^1_0(\omega)]^2;$$

$$g_{\alpha3\beta3} = \tfrac{1+\nu}{4E} a_{\alpha\beta}; \quad g_{\alpha\beta\rho\sigma} = \tfrac{1+\nu}{4E}\left[a_{\alpha\rho}a_{\beta\sigma} + a_{\alpha\sigma}a_{\beta\rho} - \tfrac{2\nu}{1+\nu}a_{\alpha\beta}a_{\rho\sigma}\right];$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) = \tfrac12(\eta_\alpha|_\beta + \eta_\beta|_\alpha) - b_{\alpha\beta}\eta_3; \quad \gamma_{\alpha3}(\eta,r) = \tfrac12(\partial_\alpha\eta_3 + b^\rho_\alpha\eta_\rho + r_\alpha);$$

$$\chi_{\alpha\beta}(\eta,r) = \tfrac12(r_\alpha|_\beta + r_\beta|_\alpha) - \tfrac12 b^\rho_\alpha(\eta_\rho|_\beta - b_{\rho\beta}\eta_3) - \tfrac12 b^\sigma_\beta(\eta_\sigma|_\alpha - b_{\alpha\sigma}\eta_3);$$

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \tfrac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\rho\sigma} + 2\mu(a^{\alpha\rho}a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma}a^{\beta\rho}); \quad a^{\alpha3\beta3} = 8\mu a^{\alpha\beta}.$$

De plus, on note:

$$\underset{\approx}{R}:\underset{\approx}{T} = R^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}; \quad \underset{\approx}{E}(\underset{\sim}{v}) = \Big(E_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{v})\Big)_{1\le\alpha,\beta\le2};$$

$$E_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{v}) = \tfrac12(v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha; \quad \underset{\approx}{Grad}\,(\underset{\sim}{v}) = (v_\alpha|_\beta)_{1\le\alpha,\beta\le2};$$

$$H(Div;\omega) = \Big\{\underset{\sim}{v} \in [L^2(\omega)]^2; \quad Div\underset{\sim}{v} \in L^2(\omega)\Big\};$$

$$[H(div;\omega)]^2_s = \{\underset{\approx}{T} = (T^{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le2},$$

$$\forall\beta = 1,2, (T^{\alpha\beta})^T \in H(div;\omega), T^{12} = T^{21}\};$$

$$[H(Div;\omega)]_s^2 = \{\underset{\approx}{T} = (T^{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq 2},$$

$$\forall\beta = 1,2, (T^{\alpha\beta})^T \in H(Div;\omega), T^{12} = T^{21}\}$$

D'après la définition de la dérivée covariante, il s'ensuit:

$$Div\underset{\sim}{v} = v^\alpha|_\alpha = div\underset{\sim}{v} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}v^\beta;$$

$$\left(Div\underset{\sim}{\underset{\approx}{T}}\right)^\beta = T^{\alpha\beta}|_\alpha = T^{\alpha\beta}_{,\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}T^{\beta\lambda} + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda}T^{\lambda\alpha},$$

et en utilisant l'existence de K_1 et K_2, deux constantes strictement positives telles que:

$$K_1 \leq \{\sqrt{a}, |a_{\alpha\beta}|, |\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}|, |b_{\alpha\beta}|, |c_{\alpha\beta}|\} \leq K_2 \tag{1}$$

($\varphi \in C^3(\overline{\omega}; R^3)$), on obtient le résultat suivant:

Proposition 1. *$\underset{\sim}{v} \in H(div;\omega)$ si et seulement si $\underset{\sim}{v} \in H(Div;\omega)$. $\underset{\approx}{T} \in [H(div;\omega)]_s^2$ si et seulement si $\underset{\approx}{T} \in [H(Div;\omega)]_s^2$.* ∎

La définition de a ainsi que les formules de Gauss (voir [2]) conduisent à l'obtention de:

Proposition 2. *On a l'identité:*

$$(\sqrt{a})_{,\alpha} = \sqrt{a}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}.$$

∎

Adaptées aux dérivées covariantes, on a les formules de Green suivantes:

Proposition 3. *$\forall\underset{\sim}{R} \in H(div;\omega),\ \forall v \in H_0^1(\omega)$:*

$$\int_\omega vDiv(\underset{\sim}{R})\sqrt{a}d\omega + \int_\omega \underset{\sim}{R}\cdot \underset{\sim}{grad}v\sqrt{a}d\omega = 0; \tag{2}$$

$\forall\underset{\approx}{T} \in [H(div;\omega)]_s^2,\ \ \forall\underset{\sim}{v} \in [H_0^1(\omega)]^2$:

$$\int_\omega \underset{\sim}{v}\cdot \underset{\sim}{Div}\underset{\approx}{T}\sqrt{a}d\omega + \int_\omega \underset{\approx}{T}:\underset{\approx}{E}(\underset{\sim}{v})\sqrt{a}d\omega = 0. \tag{3}$$

Démonstration. On montre d'abord une formule analogue à (3) où on remplace $\underset{\approx}{E}(\underset{\sim}{v})$ par $\underset{\approx}{Grad}(\underset{\sim}{v})$ et ensuite on utilise que pour un tenseur symétrique $\underset{\approx}{T}$ on a:

$$\underset{\approx}{T}\colon \underset{\approx}{E}(\underset{\sim}{v}) = \underset{\approx}{T}\underset{\approx}{Grad}(\underset{\sim}{v}).$$

■

Remarque 1. *De la démonstration de la Proposition précédente on déduit la formule suivante:*

$$Div\underset{\sim}{R} = \frac{1}{\sqrt{a}} div(\underset{\sim}{R}\sqrt{a}),$$

ce qui permet de réduire, à $\frac{1}{\sqrt{a}}$ *près, la divergence covariante à celle classique, mais cela pour un champ de vecteurs tangent à la surface moyenne de la coque.*

Le problème continu. On considère les formes bilinéaires $A^0(\cdot,\cdot)$, $B^0(\cdot,\cdot)$ et la forme linéaire $F(\cdot)$, définies par:

$$\begin{aligned}
A^0(T,R) &= \int_\omega \tfrac{1}{\varepsilon} t^{\alpha 3} g_{\alpha 3 \beta 3} R_1^{\beta 3}\sqrt{a}d\omega + \int_\omega \tfrac{1}{\varepsilon} n^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_2^{\rho\sigma}\sqrt{a}d\omega + \\
&+ \int_\omega \tfrac{3}{\varepsilon^3} m^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_3^{\rho\sigma}\sqrt{a}d\omega, \\
B^0(R,Y) &= \tfrac{1}{2}\int_\omega Div\underset{\sim 1}{R}\,\eta_3\sqrt{a}d\omega - \tfrac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} b_\alpha^\rho \eta_\rho \sqrt{a}d\omega - \\
&- \tfrac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} r_\alpha \sqrt{a}d\omega - \int_\omega R_2^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(Y)\sqrt{a}d\omega - \\
&- \int_\omega R_3^{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(Y)\sqrt{a}d\omega, \\
F(Y) &= \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a}d\omega.
\end{aligned}$$

La formulation primale du problème de Naghdi est:

$$(4)\qquad \begin{cases} \textit{trouver } X = (\underset{\sim}{\zeta}, \underset{\sim}{s}) \in V = [H_0^1(\omega)]^5 \ \textit{ tel que :} \\ \forall Y = (\underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{r}) \in V, \quad a(X,Y) = b(Y), \end{cases}$$

avec:

$$\begin{aligned}
&a(X,Y) = \int_\omega \varepsilon a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}(X)\gamma_{\alpha\beta}(Y)\sqrt{a}d\omega + \\
&+ \int_\omega \tfrac{\varepsilon^3}{3} a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\rho\sigma}(X)\chi_{\alpha\beta}(Y)\sqrt{a}d\omega + \int_\omega \varepsilon a^{\alpha 3\beta 3}\gamma_{\alpha 3}(X)\gamma_{\beta 3}(Y)\sqrt{a}d\omega, \\
&b(Y) = \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a}d\omega.
\end{aligned}$$

La formulation variationnelle mixte étudiée est la suivante:

$$(5)\qquad \begin{cases} \textit{trouver} \;\; T \in W, X \in M \;\; \textit{tels que}: \\ \forall R \in W, A^0(T,R) + B^0(R,X) = 0 \\ \forall Y \in M, B^0(T,Y) = -F(Y). \end{cases}$$

Théorème 1. *Le problème (5) admet une solution et une seule (T,X). De plus, X est la solution du problème primal (4) et si on pose les relations:*

$$(6)\qquad \begin{aligned} t^{\alpha 3} &= \varepsilon a^{\alpha 3 \beta 3} \gamma_{\beta 3}(X); \\ n^{\alpha\beta} &= \varepsilon a^{\alpha\beta\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma}(X); \\ m^{\alpha\beta} &= \tfrac{\varepsilon^3}{3} a^{\alpha\beta\rho\sigma} \chi_{\rho\sigma}(X), \end{aligned}$$

alors la paire $(X, T = (\underset{\sim}{t}, \underset{\approx}{n}, \underset{\approx}{m}))$ est solution du problème (5) et l'équation:

$$(7)\qquad -\frac{1}{2} Div \underset{\sim}{t} - n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} = p^3$$

est vérifiée p.p. dans ω.

Démonstration. Elle est analogue à celle du Théorème 1 de [9], mais pour construire le rélévement $\mathcal{R}: M \to W$ le problème auxiliaire qu'il faut considèrer est le suivant:

$$\begin{cases} \textit{trouver} \;\; \varphi_Y \in [H_0^1(\omega)]^5 \quad \textit{tel que}: \\ \forall \psi = (\psi_3, (\psi_\alpha), (w_\alpha)) \in [H_0^1(\omega)]^5, A_1(\varphi_Y, \psi) = B_1^0(\psi), \end{cases}$$

avec:

$$\begin{aligned} A_1(\varphi_Y, \psi) \quad &= \textstyle\int_\omega \{a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha 3}(\varphi_Y) \gamma_{\beta 3}(\psi) + a^{\alpha\beta\rho\sigma} \gamma_{\alpha\beta}(\varphi_Y) \gamma_{\rho\sigma}(\psi) + \\ &\quad + a^{\alpha\beta\rho\sigma} \chi_{\alpha\beta}(\varphi_Y) \chi_{\rho\sigma}(\psi)\} \sqrt{a} d\omega, \\ B_1^0(\psi) \quad &= -\textstyle\int_\omega \{\eta_3 \psi_3 + E^{\alpha\beta}(\eta_1, \eta_2) E_{\alpha\beta}(\psi_1, \psi_2) + \\ &\quad + E^{\alpha\beta}(r_1, r_2) E_{\alpha\beta}(w_1, w_2)\} \sqrt{a} d\omega - \textstyle\int_\omega \{\eta_\alpha \psi_\alpha + r_\alpha w_\alpha\} \sqrt{a} d\omega. \end{aligned}$$

Ceci grâce au fait que l'extention de l'inégalité de Korn aux dérivées covariantes (voir [8], Lemme 2.4) s'écrit sous la forme:

$$\left(\int_\omega E_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{v}) E_{\alpha\beta}(\underset{\sim}{v}) d\omega + \int_\omega v_\alpha v_\alpha d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme naturelle de $\underset{\sim}{v}$ sur $[H^1(\omega)]^2$. ∎

Remarque 2. *Les équations d'équilibre prennent la forme:*

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}Div\underset{\sim}{t} - n^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = p^3 \\ -\left(Div\underset{\sim}{n}\right)^{\beta} + (m^{\rho\alpha}b^{\beta}_{\rho})|_{\alpha} + \frac{1}{2}t^{\alpha 3}b^{\beta}_{\alpha} = p^{\beta} \\ -\left(Div\underset{\approx}{m}\right)^{\beta} + \frac{1}{2}t^{\beta 3} = 0 \end{cases}$$

Le problème discret. On travaille dans le même cadre discret que dans [9], c'est à dire qu'on suppose l'ouvert ω convexe et polygonal [1]. On considère $k \geq 0$ un entier, $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\omega}$ au sens de Ciarlet [5], D_{k+1} l'espace de Raviart et Thomas d'ordre $k+1$ [7] et P_k l'espace des polynômes de degré au plus égal à k.

On pose:

$$\begin{aligned} &W_h = W_{h1} \times W_{h2} \times W_{h2} \subset W; \quad M_h = M_{h1} \times M_{h2} \times M_{h2}; \\ &W_{h1} = \left\{\underset{\sim h}{R} \in W_1; \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \underset{\sim h}{R}|_T \in D_{k+1}\right\}; \\ &W_{h2} = \left\{\underset{\approx h}{R} \in W_2; \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \underset{\approx h}{R}|_T \in [P_k]^4_s\right\}; \\ &M_{h1} = \{\eta_h \in M_1; \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \ \eta_h|_T \in P_k\}; \\ &M_{h2} = \left\{\underset{\sim h}{R} \in M_2; \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \underset{\sim h}{R}|_T \in [P_{k+1}]^2\right\}. \end{aligned}$$

Le problème discret s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} trouver \ \ T_h \in W_h, \ X_h \in M_h \quad tels \ \ que: \\ \forall R_h \in W_h, \ A^0(T_h, R_h) + B^0(R_h, X_h) = 0 \\ \forall Y_h \in M_h, \ B^0(T_h, Y_h) = -F(Y_h) \end{cases} \tag{8}$$

Théorème 2. *Sous l'hypothèse que le problème auxiliaire est plus régulier et pour h assez petit le problème (8) admet une solution et une seule (T_h, X_h).*

Démonstration. L'ellipticité de $A^0(\cdot,\cdot)$ sur $Ker\mathcal{B}^0_h$ résulte en prenant:

$$\begin{aligned} &R_h \in Ker\mathcal{B}^0_h \subset S_h = \{R_h \in W_h; \quad \forall Y_h \in M_{h1} \times \{0,0\}\times \\ &\qquad\qquad \times\{0,0\}, B^0(R_h, Y_h) = 0\}, \\ &Y_h = (Div^h\underset{\sim h1}{R}, 0,0,0,0), \\ &Div^h\underset{\sim h}{R} = div\underset{\sim h}{R} + \mathcal{P}_k(\Gamma^{\alpha}_{\lambda\alpha}R^{\lambda}_h) = Div\underset{\sim h}{R} + Div^h\underset{\sim h}{R} - Div\underset{\sim h}{R}, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{P}_k$ la projection au sens L^2 sur l'espace des polynômes P_k.

Alors:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_\omega \left(Div \underset{\sim h1}{R} + Div^h \underset{\sim h1}{R} - Div \underset{\sim h1}{R} \right) Div \underset{\sim h1}{R} \sqrt{a} d\omega + \\
&+ \int_\omega R^{\alpha\beta}_{h2} b_{\alpha\beta} \left(Div \underset{\sim h1}{R} + Div^h \underset{\sim h1}{R} - Div \underset{\sim h1}{R} \right) \sqrt{a} d\omega - \\
&- \int_\omega R^{\alpha\beta}_{h3} c_{\alpha\beta} \left(Div \underset{\sim h1}{R} + Div^h \underset{\sim h1}{R} - Div \underset{\sim h1}{R} \right) \sqrt{a} d\omega = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Or $Div^h \underset{\sim h1}{R} - Div \underset{\sim h1}{R} = \mathcal{P}_k(\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} R^\lambda_{h1}) - \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} R^\lambda_{h1}$.
Les propriétés de la projection $\mathcal{P}_k$ jointes à la relation (1) conduisent à l'obtention de:

$$
\| Div^h \underset{\sim h1}{R} - Div \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} \leq C \| \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega}.
$$

En conséquence, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy– Schwartz et de la relation (1) dans (9) donne:

$$
\begin{aligned}
\| Div \underset{\sim h1}{R} \|^2_{0,\omega} \leq \quad & 2C \Big\{ \| \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} \| Div \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} + \| \underset{\approx h2}{R} \|_{0,\omega} \| Div \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} + \\
& + \| \underset{\approx h2}{R} \|_{0,\omega} \| \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} + \| \underset{\approx h3}{R} \|_{0,\omega} \| Div \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} + \\
& + \| \underset{\approx h3}{R} \|_{0,\omega} \| \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} \Big\}.
\end{aligned}
$$

L'inégalité de Young conduit à $\| Div \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} \leq C \| R_h \|_{o,\omega}$.

Par conséquent $\| div \underset{\sim h1}{R} \|_{0,\omega} \leq C \| R_h \|_{o,\omega}$.

Finalement $\| R_h \|_W \leq C \| R_h \|_{0,\omega}$.

Or l'approximation est conforme et donc on obtient l'ellipticité de $A^0(\cdot,\cdot)$ sur $Ker \mathcal{B}^0_h$.

Quant à la condition de Babuška–Brezzi (en discret), elle est obtenue en supposant plus de régularité sur le problème auxiliaire, i.e.

$$
\varphi_Y \in [H^1_0(\omega)]^5 \cap [W^{s+1,q}(\omega)]^5, \quad 0 < s < 1, \quad q \geq 2, \quad (s+1)q > 2 \tag{10}
$$

et $\| \varphi_Y \|_{s+1,q} \leq C \| Y \|_M$.

En effet, la condition inf–sup en continu conduit a la construction d'un relèvement $\mathcal{R}$ tel que:

$$\forall Y \in M, B^0(\mathcal{R}Y, Y) \geq C_1 \|Y\|_M^2 \text{ et } \|\mathcal{R}Y\|_W \leq C_2 \|Y\|_M.$$

L'hypothèse de régularité (10) donne $\varphi_Y \in [W^{s+1,q}(\omega)]^5$.

La définition du relévement $\mathcal{R}$ et le Lemme 5.5 de Nečas [6] conduisent à:

$$\mathcal{R}Y \in [W^{s,q}(\omega)]^2 \times [W^{s,q}(\omega)]_s^4 \times [W^{s,q}(\omega)]_s^4.$$

De plus, $\forall Y \in M, \|\mathcal{R}Y\|_{s,q} \leq C\|Y\|_M$.

On note pour $\forall Y_h \in M_h$ par:

$$\begin{aligned}
&R = \mathcal{R}Y_h = (\underset{\sim 1}{R}, \underset{\approx 2}{R}, \underset{\approx 3}{R});\\
&\underset{\sim h1}{R} = \mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R}; \quad \underset{\approx h2}{R} = \mathcal{P}_k\underset{\approx 2}{R};\\
&\underset{\approx h3}{R} = \mathcal{P}_k\underset{\approx 3}{R}; \quad R_h = (\underset{\sim h1}{R}, \underset{\approx h2}{R}, \underset{\approx h3}{R}) \in W_h,
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_h^{k+1}$ l'interpolé équilibre.

Par conséquent $\forall Y_h \in M_h, \|\mathcal{R}Y_h\|_{s,q} \leq C\|Y_h\|_M$.

Or $B^0(R_h, Y_h) = -B^0(R - R_h, Y_h) + B^0(R, Y_h)$. Mais la définition de $B^0(\cdot,\cdot)$ permet d'écrire:

$$\begin{aligned}
B^0(R - R_h, Y_h) \quad &= \tfrac{1}{2}\int_\omega \left(Div\underset{\sim 1}{R} - Div\underset{\sim h1}{R}\right)\eta_{h3}\sqrt{a}d\omega -\\
&-\tfrac{1}{2}\int_\omega (R_1^{\alpha 3} - R_{h1}^{\alpha 3})b_\alpha^\beta \eta_{h\beta}\sqrt{a}d\omega -\\
&-\tfrac{1}{2}\int_\omega (R_1^{\alpha 3} - R_{h1}^{\alpha 3})r_{h\alpha}\sqrt{a}d\omega -\\
&-(\int_\omega (R_2^{\alpha\beta} - R_{h2}^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta}(Y_h)\sqrt{a}d\omega -\\
&-\int_\omega (R_3^{\alpha\beta} - R_{h3}^{\alpha\beta})\chi_{\alpha\beta}(Y_h)\sqrt{a}d\omega.
\end{aligned}$$

La définition de la divergence covariante conduit à:

$$Div\underset{\sim h1}{R} - Div\underset{\sim 1}{R} = \left(div\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R} - div\underset{\sim 1}{R}\right) + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \left(\left(\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R}\right)^\lambda - R_1^{\lambda 3}\right).$$

En écrivant $\sqrt{a} = \mathcal{P}_0(\sqrt{a}) + (\sqrt{a} - \mathcal{P}_0(\sqrt{a}))$ on obtient ensuite:

$$
\begin{aligned}
B^0(R-R_h,Y_h) &= \tfrac{1}{2}\int_\omega \left(-div\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R} + div\underset{\sim 1}{R}\right)\eta_{h3}\mathcal{P}_0(\sqrt{a})d\omega+\\
&+\tfrac{1}{2}\int_\omega \left(-div\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R} + div\underset{\sim 1}{R}\right)\eta_{h3}(\sqrt{a}-\mathcal{P}_0(\sqrt{a}))d\omega+\\
&+\tfrac{1}{2}\int_\omega \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha}\left(-\left(\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R}\right)^\lambda + R_1^{\lambda 3}\right)\eta_{h3}\sqrt{a}d\omega-\\
&-\tfrac{1}{2}\int_\omega (R_1^{\alpha 3}-R_{h1}^{\alpha 3})b_\alpha^\beta\eta_{h\beta}\sqrt{a}d\omega-\\
&-\tfrac{1}{2}\int_\omega (R_1^{\alpha 3}-R_{h1}^{\alpha 3})r_{h\alpha}\sqrt{a}d\omega-\\
&-\int_\omega (R_2^{\alpha\beta}-R_{h2}^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta}(Y_h)\sqrt{a}d\omega-\\
&-\int_\omega (R_3^{\alpha\beta}-R_{h3}^{\alpha\beta})\chi_{\alpha\beta}(Y_h)\sqrt{a}d\omega.
\end{aligned}
$$

Les propriétés de l'interpolé équilibre nous donnent que le premier terme est nul.

L'inégalité de Cauchy–Schwartz et (1) conduisent à:

$$
\begin{aligned}
B^0(R-R_h,Y_h) &\le C\|div\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R} - div\underset{\sim 1}{R}\|_{0,\omega}\|Y_h\|_M\|\sqrt{a}-\mathcal{P}_0(\sqrt{a})\|_{0,\omega}+\\
&+C\|\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R} - \underset{\sim 1}{R}\|_{0,\omega}\|Y_h\|_M+\\
&+C\|\underset{\approx 2}{R} - \mathcal{P}_k\underset{\approx 2}{R}\|_{0,\omega}\|Y_h\|_M + C\|\underset{\approx 3}{R} - \mathcal{P}_k\underset{\approx 3}{R}\|_{0,\omega}\|Y_h\|_M.
\end{aligned}
$$

Or $\sqrt{a}\in C^2(\overline{\omega})$, donc $\sqrt{a}\in W^{s,q}(\omega)$ et par conséquent d'après [10]:

$$\|\sqrt{a}-\mathcal{P}_0(\sqrt{a})\|_{0,\omega}\le Ch^{s+1-\frac{2}{q}}|\sqrt{a}|_{s,q}.$$

De plus $\sqrt{a}\le K_2$ et alors $|\sqrt{a}|_{s,q}\le C$.

D'autre part d'après [1] $div\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim 1}{R} = \mathcal{P}_k(div\underset{\sim 1}{R})$ et donc les propriétés de la projection $\mathcal{P}_k$ donnent:

$$
\begin{aligned}
B^0(R-R_h,Y_h) &\le Ch^{s+1-\frac{2}{q}}\|\mathcal{R}Y_h\|_W\|Y_h\|_M + C\|\underset{\sim h1}{R} - \underset{\sim 1}{R}\|_{0,\omega}\|Y_h\|_M+\\
&+C\|\underset{\approx 2}{R} - \mathcal{P}_k\underset{\approx 2}{R}\|_{0,\omega}\|Y_h\|_M + C\|\underset{\approx 2}{R} - \mathcal{P}_k\underset{\approx 2}{R}\|_{0,\omega}\|Y_h\|_M.
\end{aligned}
$$

Or d'après [1]:

$$\|\mathcal{E}_h^{k+1}\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{p}\|_{0,\omega}\le Ch^{s+1-\frac{2}{q}}|\underset{\sim}{p}|_{s,q}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} B^0(R-R_h,Y_h) &\leq Ch^{s+1-\frac{2}{q}}\|\mathcal{R}Y_h\|_W\|Y_h\|_M + Ch^{s+1-\frac{2}{q}}|\underset{\sim 1}{R}|_{s,q}\|Y_h\|_M + \\ &+Ch^{s+1-\frac{2}{q}}|\underset{\approx 2}{R}|_{s,q}\|Y_h\|_M + Ch^{s+1-\frac{2}{q}}|\underset{\approx 3}{R}|_{s,q}\|Y_h\|_M. \end{aligned}$$

Donc:

$$B^0(R-R_h,Y_h) \leq Ch^{s+1-\frac{2}{2}}\|\mathcal{R}Y_h\|_{s,q}\|Y_h\|_M.$$

Or $\|\mathcal{R}Y_h\|_{s,q} \leq C\|Y_h\|_M$ et alors:

$$B^0(R-R_h,Y_h) \leq C_1h^{s+1-\frac{2}{2}}\|Y_h\|_M.$$

D'autre part $B^0(R,Y_h) \geq C_2\|Y_h\|_M^2$.
Donc:

$$B^0(R_h,Y_h) \geq (C_2 - C_1h^{s+1-\frac{2}{q}})\|Y_h\|_M^2.$$

En prenant

$$h \leq h_0 < \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{q}{sq+q-2}},$$

on obtient:

$$B^0(R_h,Y_h) \geq C\|Y_h\|_M^2,$$

avec $C = C_2 - C_1h_0^{s+1-\frac{2}{q}}$, une constante strictement positive et indépendente de l'épaisseur $\mathcal{E}$ et du paramètre de discretisation h.

D'autre part $\|R_h\|_W \leq K\|Y_h\|_M$ et donc la condition inf- -sup en discret est assurée.

Remarque 3. *On obtient les mêmes résultats de majoration d'erreur que dans [9].*

Remarque 4. *Les résultats restent vrais si on employe, au lieu de D_{k+1}, un des espaces: $BDM_{k+1}, BDFM_{k+1}, BDM_{[k+1]}, BDFM_{[k+1]}$ (voir [4] pour les notations), les deux derniers étant utilisés dans le cas d'une triangulation formée par des quadrilatères.*

REFERENCES

1. A g o u z a l, A. – *Analyse numérique de méthodes de décomposition de domaines. Méthodes des domaines fictifs avec multiplicateur de Lagrange*, Thèse de doctorat, Université de Pau, (1993).
2. B e r n a d o u, M. – *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, Masson, Paris, (1994).
3. B e r n a d o u, M., C i a r l e t, P.G. and M i a r a, B. – *Existence Theorems for Two–dimensional Linear Shell Theories*, Journal of Elasticity 34, pp. 111-138, (1994).
4. B r e z z i, F. and F o r t i n, M. – *Mixed and Hybrid Finite Elements Methods*, Springer–Verlag, New York, (1991).
5. C i a r l e t, P.G. – *The Finite Element Method for Eliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, (1978).
6. N e č a s, J. – *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
7. R o b e r t s, J.E. and T h o m a s, J.-M. – *Mixed and Hybrid Methods*, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet & J.L. Lions Editors, vol. II, Finite Element Methods (Part 1), North Holland, Amsterdam, (1991).
8. R o u g é e, P. – *Equilibre des coques élastiques minces inhomogènes en théorie non linéaire*, Thèse, Université de Paris, (1969).
9. Ţ â r d e a, G. – *Dualisation du cisaillement transverse dans le modèle de Naghdi pour la flexion des coques minces*, Analele Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, (1995).
10. Ţ â r d e a, G. –*Sur une formulation équilibre pour une problème de coques minces*, Thèse de doctorat, Université de Pau, France, (1995).

Received: 07.V.1997

Faculté de Mathématiques
Université "Al.I.Cuza"
6600–Iaşi
ROUMANIE