ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XLIV, s.I.a, Matematică, 1998, f1

FORMULATION AUGMENTÉE POUR LA DUALISATION DU CISAILLEMENT TRANSVERSE DANS LE MODÈLE DE NAGHDI

BY

GABRIELA ŢÂRDEA

Abstract. The Naghdi's bidimensional model for thin shells is considered. We build an augmented formulation that corresponds to the mixed one introduced in [6]. Existence and uniqueness of the solution in the continuous and discrete case are proved. A result of error approximation is established. The advantage of this method consists in the possibility of elliminating the suppositions made upon h and the regularity of the auxiliary problem in the case of the mixed formulation of [6], in order to obtain existence and uniquenesss or the discrete solution.

Resumé. On considère le modèle bidimensionnel de Naghdi pour les coques minces en flexion. On construit une formulation augmentée au sens de Brezzi–Fortin [2] correspondante à celle mixte introduite dans [6]. L'existence et l'unicité de la solution continue et discrète sont montrés. Des majorations d'erreur sont établies. Cette méthode permet de se dispenser des suppositions que h soit petit et que le problème auxiliaire soit régulier, nécessaires pour l'analyse de la précédente formulation.

1. Introduction. Cette note fait suite à [6] où on a introduit une formulation mixte pour dualiser le cisaillement transverse dans le modèle de Naghdi. L'existence et l'unicité de la solution de ce problème étaient obtenus sous la condition que h soit petit et en imposant une régularité suplemmentaire pour le problème auxiliaire.

En demandant que l'inconnue primale soit cherchèe dans $V = [H_0^1(\omega)]^5$, on introduit pour y rémédier une formulation augmentée au sens de Brezzi–Fortin [2] pour laquelle on n'a plus la condition de compatibilité entre les deux espaces à satisfaire. Pourtant, le choix des paramètres dans la formulation reste un problème assez délicat, et cela à cause de la

forme de l'équation d'équilibre pour le cisaillement transverse dans laquelle intervient également le moment de flexion et l'effort membranaire.

2. Le problème continu. Par la suite, les lettres grecques (sauf ε) prennent leurs valeurs dans l'ensemble d'indices et d'exposants $\{1,2\}$ et cellles latines les prennent dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. On utilise la convention de sommation des indices répétés.

On considère une coque élastique, constituée d'un materiau homogène et isotrope et encastreé sur tout son bord lateral. Pour les notations ainsi que la description de la géométrie de la coque on se reporte à [1].

On utilise aussi les notations introduites dans [6]. Ainsi, on pose :

$$\begin{aligned}
A(T,R) &= \int_\omega \frac{1}{\varepsilon} t^{\alpha 3} g_{\alpha 3 \beta 3} R_1^{\beta 3} \frac{1}{\sqrt{a}} d\omega + \int_\omega \frac{1}{\varepsilon} n^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_2^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}} d\omega + \\
&+ \int_\omega \frac{3}{\varepsilon^3} m^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_3^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}} d\omega; \\
B(R,Y) &= \frac{1}{2}\int_\omega div \underset{\sim 1}{R}\, \eta_3 d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} b_\alpha^\rho \eta_\rho d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} r_\alpha d\omega - \\
&- \int_\omega R_2^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(Y) d\omega - \int_\omega R_3^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}(Y) d\omega; \\
F(Y) &= \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a} d\omega;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&T = (\underset{\sim}{t}, \underset{\approx}{n}, \underset{\approx}{m}); X = (\zeta_3, (\zeta_\alpha)_{1\le\alpha\le 2}, (s_\alpha)_{1\le\alpha\le 2}); \\
&R = (\underset{\sim 1}{R}, \underset{\approx 2}{R}, \underset{\approx 3}{R}); Y = (\eta_3, (\eta_\alpha)_{1\le\alpha\le 2}, (r_\alpha)_{1\le\alpha\le 2}); \\
&W = H(div;\omega) \times [L^2(\omega)]_s^4 \times [L^2(\omega)]_s^4;\ M = L^2(\omega) \times [H_0^1(\omega)]^2 \times [H_0^1(\omega)]^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\alpha 3 \beta 3} &= \frac{1+\nu}{4E} a_{\alpha\beta}; \\
g_{\alpha\beta\rho\sigma} &= \frac{1+\nu}{4E}\left[a_{\alpha\rho}a_{\beta\sigma} + a_{\alpha\sigma}a_{\beta\rho} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\alpha\beta}a_{\rho\sigma}\right]; \\
a^{\alpha 3 \beta 3} &= 8\mu a^{\alpha\beta};
\end{aligned}$$

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\sigma} + 2\mu \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma} a^{\beta\rho}\right);$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) = \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}\right) - b_{\alpha\beta}\eta_3;$$

$$\gamma_{\alpha 3}(\eta, r) = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \eta_3 + b_\alpha^\rho \eta_\rho + r_\alpha\right);$$

$$\chi_{\alpha\beta}(\eta, r) = \frac{1}{2}\left(r_{\alpha|\beta} + r_{\beta|\alpha}\right) - \frac{1}{2} b_\alpha^\rho \left(\eta_{\rho|\beta} - b_{\rho\beta}\eta_3\right) - \frac{1}{2} b_\beta^\sigma \left(\eta_{\sigma|\alpha} - b_{\alpha\sigma}\eta_3\right);$$

En vue de l'établisement de la formulation augmentée au sens de Brezzi– Fortin [2] correspondante à celle établie dans [6], on rapelle d'abord que cette dernière s'écrit sous la forme :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \text{trouver } T \in W,\ X \in M \text{ tels que :} \\ \forall R \in W,\ A(T,R) + B(R,X) = 0 \\ \quad \forall Y \in M,\ B(T,Y) = -F(Y). \end{cases}$$

On note par C_1 et C_2 les deux constantes telles que :

$$\text{(2)} \qquad R^\alpha g_{\alpha 3\beta 3} R^\beta \geq C_1 R^\alpha R^\alpha; \quad R^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\rho\sigma} \geq C_2 R^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$$

et par K_1 et K_2 celles pour lesquelles on a :

$$\text{(3)} \qquad K_1 \leq \{\sqrt{a}, |a_{\alpha\beta}|, |b_{\alpha\beta}|, |c_{\alpha\beta}|\} \leq K_2.$$

On pose :

$$C = \min(C_1, C_2, 3C_2).$$

Soient a et b deux paramètres tels que :

$$a > 0; 0 < b < 1; (1-b)C > 16aK_2^3.$$

On considère les formes bilinéaires $A_1(.,.), B_1(.,.), J(.,.)$ et la forme linéaire $G(.)$ définies par:

$$A_1(T,R) = (1-b)A(T,R) + a\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} div \underset{\sim}{t}\, div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega + 2a\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega -$$

$$- 2a\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} m^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega,$$

$$J(Y,X) = b\int_\omega \left\{\varepsilon a^{\alpha 3\beta 3} \gamma_{\beta 3}(X)_{\gamma\alpha 3}(Y) + \varepsilon a^{\alpha\beta\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma}(X)_{\gamma\alpha\beta}(Y)\right\} \sqrt{a} d\omega +$$

$$+ b\int_\omega \frac{\varepsilon^3}{3} a^{\alpha\beta\rho\sigma} \chi_{\rho\sigma}(X)_{\chi\alpha\beta}(Y) \sqrt{a} d\omega;$$

$$G(R) = -2a\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} p^3 div \underset{\sim 1}{R}\, \sqrt{a} d\omega;$$

$$B_1(R,Y) = (1-b)B(R,Y).$$

La formulation variationnelle étudiée est la suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } T \in W,\ X \in V \ \text{ tels que :} \\ \forall R \in W,\ A_1(T,R) + B_1(R,X) = G(R) \\ \forall Y \in V,\ B_1(T,Y) - J(Y,X) = -F(Y). \end{cases} \tag{4}$$

Théorème 1. *Le problème (4) admet une solution et une seule (T,X). De plus (T,X) est la solution du problème(1).*

Démonstration. On considère la forme bilinéaire $fb(.,.)$ et celle linéaire $fl(.)$, définies par :

$$fb((T,X),(R,Y)) = A_1(T,R) + B_1(R,X) - B_1(T,Y) + J(Y,X),$$
$$fl((R,Y)) = G(R) + F(Y).$$

Le probléme (4) est équivalent au probléme suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } T \in W,\ X \in V \ \text{ tels que :} \\ \forall R \in W, \forall Y \in V, fb((T,X),(R,Y)) = fl((R,Y)). \end{cases} \tag{5}$$

Moyennant le Lemme de Lax–Milgram, l'existence et l'unicité de la solution du problème (5) sont obtenus. En effet, l'ellipticité de la forme bilinéaire $fb(.,.)$ revient à celles de $A_1(.,.)$ et $J(.,.)$. Celle de la dernière est un résultat de [1] (voir aussi [3]). Quant à celle de $A_1(.,.)$, considerant la définition de $A(.,.)$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} A_1(R,R) &= (1-b)\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} R_1^{\alpha 3} g_{\alpha 3 \beta 3} R_1^{\beta 3} \frac{1}{\sqrt{a}} d\omega + \\ &+ (1-b)\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} R_2^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_2^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}} d\omega + \\ &+ (1-b)\int_\omega \frac{3}{\varepsilon^3} R_3^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_3^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}} d\omega + a\int_\omega \frac{1}{\varepsilon}(div \underset{\sim 1}{R})^2 d\omega + \\ &+ 2a\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} R_2^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega - 2a\int_\omega \frac{1}{\varepsilon} R_3^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega. \end{aligned}$$

Les relations (2) et (3) donnent ensuite :

$$\begin{aligned} &A_1(R,R) \geq (1-b)\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + \\ &+(1-b)\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + (1-b)\tfrac{1}{\varepsilon^3}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega} + a\tfrac{1}{\varepsilon}\|div\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + \\ &+2a\textstyle\int_\omega \tfrac{1}{\varepsilon} R_2^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega - 2a\int_\omega \tfrac{1}{\varepsilon} R_3^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young utilisée pour les deux derniers termes de droite conduit à :

$$\begin{aligned}
&A_1(R,R) \geq (1-b)\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + (1-b)\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \\
&+(1-b)\tfrac{1}{\varepsilon^3}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega} + \tfrac{a}{2}\tfrac{1}{\varepsilon}\|div\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} - \\
&-4a\tfrac{1}{\varepsilon}\|R_2^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\|^2_{0,\omega} - 4a\tfrac{1}{\varepsilon}\|R_3^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}\|^2_{0,\omega}.
\end{aligned}$$

On employe ensuite la relation (3) pour aboutir à :

$$\begin{aligned}
&A_1(R,R) \geq (1-b)\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + (1-b)\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \\
&+(1-b)\tfrac{1}{\varepsilon^3}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega} + \tfrac{a}{2}\tfrac{1}{\varepsilon}\|div\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} - \\
&-16a\tfrac{1}{\varepsilon}K_2^2\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} - 16a\tfrac{1}{\varepsilon}K_2^2\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega}.
\end{aligned}$$

Or $-1 \geq -\frac{1}{\varepsilon^2}$ et alors :

$$\begin{aligned}
&A_1(R,R) \geq (1-b)\tfrac{1}{\varepsilon}\tfrac{C}{K_2}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + \tfrac{a}{2}\tfrac{1}{\varepsilon}\|div\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + \\
&+\tfrac{1}{\varepsilon}\left[(1-b)\tfrac{C}{K_2} - 16aK_2^2\right]\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \tfrac{1}{\varepsilon^3}\left[(1-b)\tfrac{C}{K_2} - 16aK_2^2\right]\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega}.
\end{aligned}$$

Les conditions imposées sur les paramétres a et b donnent que :

$$A_1(R,R) \geq K\left[\frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{H(div;\omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \frac{1}{\varepsilon^3}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega}\right].$$

Pour montrer la deuxième partie du théorème, on prend (T,X), la solution du problème (1). D'après [6], on sait que les relations suivantes sont vèrifiées :

$$\begin{cases}
t^{\alpha 3} = \varepsilon\sqrt{a}a^{\alpha 3\beta 3}\gamma_{\beta 3}(X), \\
n^{\alpha\beta} = \varepsilon\sqrt{a}a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}(X), \\
m^{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon^3}{3}\sqrt{a}a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\rho\sigma}(X), \\
div\underset{\sim}{t} + 2n^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} - 2m^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = -2p^3\sqrt{a} \text{ p.p. dans } \omega
\end{cases}$$

et que $X \in V$.

On veut démonstrer que (T,X) satisfait la deuxième de (4) et pour cela, on utilise que (T,X) vérifie l'équation :

$$\forall Y \in M, B(T,Y) = -F(Y).$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}&\forall Y \in V, B(T,Y) + b\int_\omega \left(t^{\alpha 3} - \varepsilon\sqrt{a}a^{\alpha 3\beta 3}\gamma_{\beta 3}(X)\right)\gamma_{\alpha 3}(Y)d\omega + \\ &+b\int_\omega \left(n^{\alpha\beta} - \varepsilon\sqrt{a}a^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}(X)\right)\gamma_{\alpha\beta}(Y)d\omega + \\ &+b\int_\omega \left(m^{\alpha\beta} - \tfrac{\varepsilon^3}{3}\sqrt{a}a^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\rho\sigma}(X)\right)\chi_{\alpha\beta}(Y)d\omega = -F(Y).\end{aligned}$$

L'utilisation de la définition de $\gamma_{\alpha 3}(Y)$ ainsi de la formule de Green conduit à l'obtention de la relation désirée.

Pour obtenir que (T, X) vérifie aussi la première équation de (4), on utilise que (T, X) satisfait l'autre équation de (1), i.e. :

$$\forall R \in W, A(T,R) + B(R,X) = 0.$$

En conséquence, on a :

$$\begin{aligned}&\forall R \in W, (1-b)A(T,R) + (1-b)B(R,X) + \\ &a\int_\omega \tfrac{1}{\varepsilon}\left(div\underset{\sim}{t} + 2n^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} - 2m^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} + 2p^3\sqrt{a}\right) div\underset{\sim 1}{R}\, d\omega = 0,\end{aligned}$$

d'où la première équation de (4) est déduite.

La conclusion du théorème s'obtient de l'unicité de la solution de (1) (voir [6]). ■

3. Le problème discret. Les deux espaces discrets $W_h \subset W$ et $V_h \subset V$ peuvent être choisis indépendamment l'un de l'autre grâce au fait qu'on n'a plus la condition de compatibilité entre les deux espaces à satisfaire.

La formulation discrète est la suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } T_h \in W_h, X_h \in V_h \text{ tels que :} \\ \forall R_h \in W_h, A_1(T_h, R_h) + B_1(R_h, X_h) = G(R_h) \\ \forall Y_h \in V_h, B_1(T_h, Y_h) - J(Y_h, X_h) = -F(Y_h). \end{cases} \tag{6}$$

Thèorème 2. *Le problème (6) admet une solution et une seule* (T_h, X_h).

Démonstration. On utilise le même raisonement que dans le cas continu car l'approximation est conforme. ■

Remarque 1. On note que l'existence et l'unicité de la solution de (6) sont obtenus en se passant de la supposition que h soit petit est que le problème auxiliaire soit régulier.

Remarque 2. Pour le sous–espace discret de $H(div;\omega)$ on peut utiliser les éléments finis de type D_k (voir [4]), ou BDM_k, $BDFM_k$, $BDM_{[k]}$, $BDFM_{k]}$ (voir [2] pour les notations), les deux dernièrs étant utilisés dans le cas d'une triangulation formée par des quadrilatères.

4. La majoration d'erreur. Tout au long de ce paragraphe on étudie la majoration d'erreur en utilisant des normes qui dépendent de l'épaisseur ε.

On tient également compte de la variation des forces exterieures selon l'épaisseur en posant $\underset{\sim}{p} = \varepsilon^i \underset{\sim}{f}$, $i = 0, 1, 2, 3$, avec $\underset{\sim}{f}$ une force independante de l'épaisseur ε.

Les formes bilinéaires $A_1(.,.), J(.,.)$ et celle linéaire $G(.)$ devient:

$$
\begin{aligned}
&A_1(T,R) = (1-b)\int_\omega \varepsilon^{i-1} t^{\alpha 3} g_{\alpha 3\beta 3} R_1^{\beta 3} \tfrac{1}{\sqrt{a}} d\omega + \\
&+(1-b)\int_\omega \varepsilon^{i-1} n^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_2^{\rho\sigma} \tfrac{1}{\sqrt{a}} d\omega + (1-b)\int_\omega \varepsilon^{i-3} m^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_3^{\rho\sigma} \tfrac{1}{\sqrt{a}} d\omega + \\
&+a\int_\omega \varepsilon^{i-1} div \underset{\sim}{t}\, div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega + 2a\int_\omega \varepsilon^{i-1} n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega - \\
&-2a\int_\omega \varepsilon^{i-1} m^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} div \underset{\sim 1}{R}\, d\omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&J(Y,X) = b\int_\omega \varepsilon^{1-i} a^{\alpha 3\beta 3} \gamma_{\beta 3}(X)\gamma_{\alpha 3}(Y)\sqrt{a}\, d\omega + \\
&+b\int_\omega \varepsilon^{1-i} a^{\alpha\beta\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma}(X)\gamma_{\alpha\beta}(Y)\sqrt{a}\, d\omega + \\
&+b\int_\omega \tfrac{\varepsilon^{3-i}}{3} a^{\alpha\beta\rho\sigma} \chi_{\rho\sigma}(X)\chi_{\alpha\beta}(Y)\sqrt{a}\, d\omega, \\
&G(R) = -2a\int_\omega \varepsilon^{i-1} p^3 div \underset{\sim 1}{R} \sqrt{a}\, d\omega.
\end{aligned}
$$

Quant aux formes bilinéaires $B_1(.,.)$ et $F(.)$, elles restent inchangées.

On considère respectivement dans W et V les deux normes suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\|R\|_{W,\varepsilon} = \left(\varepsilon^{i-1}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{H(div;\omega)} + \varepsilon^{i-1}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^{i-3}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\|Y\|_{V,\varepsilon} = \left(\varepsilon^{1-i}\sum_{\alpha=1}^{2}\|\gamma_{\alpha 3}(Y)\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^{1-i}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\|\gamma_{\alpha\beta}(Y)\|^2_{0,\omega} + \right. \\
&\left. + \varepsilon^{3-i}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\|\chi_{\alpha\beta}(Y)\|^2_{0,\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

On dénote par $\mathcal{A}_1$ la constante de continuité de $A_1(.,.)$, par α_1 la constante d'ellipticité de $A_1(.,.)$, par $\mathcal{D}_1$ la constante de continuité de $J(.,.)$, par μ_1 la constante d'ellipticité de $J(.,.)$ et par $\mathcal{B}_1$ la constante de continuité de $B_1(.,.)$.

D'après la définition de $B_1(.,.)$ et en utilisant une formule de Green on obtient :

$$B_1(R,Y) = -(1-b)\int_\omega R_1^{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}(Y)d\omega - (1-b)\int_\omega R_2^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(Y)d\omega -$$

$$-(1-b)\int_\omega R_3^{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(Y)d\omega.$$

Par conséquent, $\mathcal{B}_1$ est une constante qui ne dépend pas de ε. Le Lemme de Céa donne alors la majoration d'erreur suivante :

$$\|T_h - T\|_{W,\varepsilon} + \|X_h - X\|_{V,\varepsilon} \leq C\big\{\inf_{R_h\in W_h}\|T-R_h\|_{W,\varepsilon} + \inf_{Y_h\in M_h}\|X-Y_h\|_{V,\varepsilon}\big\}.$$

Il s'ensuit alors :

$$\varepsilon\|\underset{\sim}{t}_h - \underset{\sim}{t}\|_{H(div;\omega)} + \varepsilon\|\underset{\approx}{n}_h - \underset{\approx}{n}\|_{0,\omega} + \|\underset{\approx}{m}_h - \underset{\approx}{m}\|_{0,\omega} + \varepsilon^{3-i}\|X_h - X\|_V \leq$$
$$\leq C\left(\inf_{R_h\in W_h}\|T-R_h\|_W + \inf_{Y_h\in V_h}\|X-Y_h\|_V\right),$$

avec C une constante strictement positive et indépendante de l'épaisseur ε et du paramètre de discretisation h, quant $\underset{\sim}{p} = \varepsilon^i, \underset{\sim}{f}, i = 0,1,2$.

Dans le cas òu $\underset{\sim}{p} = \varepsilon^3\underset{\sim}{f}$, on obtient la majoration d'erreur suivante :

$$\varepsilon^2\|\underset{\sim}{t}_h - \underset{\sim}{t}\|_{H(div;\omega)} + \varepsilon^2\|\underset{\approx}{n}_h - \underset{\approx}{n}\|_{0,\omega} + \varepsilon\|\underset{\approx}{m}_h - \underset{\approx}{m}\|_{0,\omega} + \varepsilon\|X_h - X\|_V \leq$$
$$\leq C\left(\inf_{R_h\in W_h}\|T-R_h\|_W + \inf_{Y_h\in V_h}\|X-Y_h\|_V\right),$$

avec C une constante strictement positive et indépendante de l'épaisseur ε et du paramètre de discretisation h.

Remarque 3. On note qu'on obtient les mêmes résultats de majoration d'erreur que pour le cas de la formulation mixte (1), sauf biensûr que cette fois–ci l'inconnue primale appartient à l'espace V.

REFERENCES

1. B e r n a d o u, M., C i a r l e t, P.G. et M i a r a, B. (1994), – *Existence Theorems for Two–dimensional Liniar Shell Theories*, Journal of Elasticity, 34, pp.111–138.
2. B r e z z i, F. et F o r t i n, M.(1991), – *Mixed and Hybrid Finite Elements Methods*, Springer–Verlag, New York.
3. C o u t r i s, N. – *Théorème d'existence et d'unicité pour un problème de coque élastique dans le cas d'un modèle linéaire de P.M.Naghdi*, R.A.I.R.O. Analyse Numérique, Vol.12, no.1, pp.51–57.
4. R o b e r t s, J.E. et T h o m a s, J.–M.(1991), – *Mixed and Hybrid Methods*, in Handbook of Numerical Analysis, vol.2: Finite Element Methods, P.G. Ciarlet et J.L. Lions editors, North–Holland, Amsterdam, pp.523–639.
5. Ţâ r d e a, G.(1995), – *Sur une formulation équilibre pour un problème de coques minces*, Thèse de doctorat, Université de Pau, France.
6. Ţâ r d e a , G.(1996), – *Dualisation du cisaillement transverse dans le modèle de Naghdi pour la flexion des coques minces*, Analele Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi.

Received: 7.V.1997

Faculté de Mathématiques
Université "Al.I.Cuza"
6600–Iaşi
ROUMANIE