ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul L, s.I a, Matematică, 2004, f.2.

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE IONESCU TULCEA. APPLICATION À L'ÉTUDE DES GÉNÉALOGIES D'UN PROCESSUS DE BRANCHEMENT SPATIAL

PAR

PETRU SORIN BOTEZAT

Résumé. On présente une généralisation du théorème de Ionescu Tulcea sur le produit d'une suite infinie de noyaux de probabilité et, comme application, une extension naturelle du formalisme et du résultat central de NEVEU [10], concernant la propriété de branchement.

Mots clés: Arbre, forêt, processus de branchement spatial, généalogie, propriété de branchement, probabilité produit.

Classification AMS: 60J80, 28A35, 05C05

On considère l'ensemble des généalogies, sous-jacent à un processus de branchement spatial. Les généalogies sont des arbres d'individus, marqués de leurs positions dans l'espace. On munit cet ensemble d'une tribu, de la filtration engendrée par les ascendances des individus et d'une famille de décalages qui emmagasine l'auto-similitude de la structure ainsi définie.

Cette structure est l'image, par une application dite de transport, d'une structure analogue, définie sur un espace de probabilité produit. Il s'agit plus exactement du produit d'un arbre infini d'espaces mesurables, muni d'une filtration et d'une famille de décalages similaires à celles définies sur l'ensemble des généalogies, ainsi que d'une loi produit, dont l'existence est assurée par l'extension, au cas d'un arbre infini de noyaux de probabilité, du théorème de Ionescu Tulcea.

La forme et la preuve récursives qu'on donne de ce théorème permettent la gestion du cas des arbres non dénombrables (qui sort du cadre qu'on s'est donné), ainsi que la déduction immédiate de la propriété de branchement de la loi produit.

On munit l'ensemble des généalogies de l'image de la loi produit par l'application de transport. On prouve que l'application de transport envoie la propriété de branchement de la loi produit sur une propriété similaire, qui caractérise la loi image.

Cette démarche vise à retrouver, dans un cadre techniquement plus complexe, le formalisme et le résultat central de NEVEU [10]. Neveu traite en détail le cas des processus de Galton-Watson et esquisse au [10, §5] le cas des processus marqués, se bornant toutefois à la situation où les marques affectées aux descendants sont indépendantes des marques affectées aux ancêtres. Cela lui permet de construire la loi à partir du produit d'une famille de probabilités. On s'occupera ici du cas où la taille et la dispersion dans l'espace de la progéniture d'un individu dépendent de la position qu'il occupe. Ce cas requiert, pour la définition de la loi, l'extension mentionnée du théorème de Ionescu Tulcea.

Dans un travail à venir, ces résultats seront complétés par une étude détaillée de la filtration associée aux *lignes d'arrêt* introduites par CHAUVIN [3], [4], [5].

Ces développements tentent d'éviter la méthode, employée par JAGERS [8], qui consiste à utiliser, dans l'étude des processus spatiaux, des arbres dont chaque nœud comporte une infinité de descendants, méthode qui, malgré son efficacité évidente, a été critiquée dans [10], en raison de sa lourdeur et de sa redondance.

On montrera dans une autre étude comment ces résultats conduisent, par une voie plus élégante et plus simple, aux résultats de [1], sur la file d'attente obtenue en explorant d'abord en profondeur la généalogie d'un processus de branchement, résultats qui étaient obtenus en utilisant la méthode lourde et redondante des descendances infinies.

La matière de ce travail est organisée de la façon suivante. On commence par introduire, dans un cadre purement algébrique, la notion d'arbre et quelques concepts connexes. On démontre ensuite, comme résultat auxiliaire, le théorème de Ionescu Tulcea généralisé, sur le produit d'un arbre de noyaux de probabilité ; quelques lemmes, nécessaires à sa preuve, seront discutés en Annexe. On définit enfin le processus généalogique, en temps non linéaire, sous-jacent à un processus de branchement spatial et on construit sa loi comme l'image, par une application, d'une loi produit.

1. Structure algébrique de l'ensemble des nœuds. Suivant [10], on appelle *nœuds*[1] les suites $u = j_1 j_2 \dots j_n$ finies ($n \in \mathbb{N}$) d'entiers strictement positifs ; la suite vide $u = \varnothing$, obtenue pour $n = 0$, est un nœud.

On désigne par U l'ensemble des nœuds, soit

$$\begin{aligned} U \quad &:= \quad \{ j_1 j_2 \dots j_n \,|\, n \in \mathbb{N},\, j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{N}^* \} = \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*}_{n \text{ fois}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^{*\,n}, \end{aligned}$$

où, par convention, $\mathbb{N}^{*\,0} = \{\varnothing\}$, le recouvrement étant disjoint.

Générations. On définit la *fonction génération* $|\ \ | : U \longrightarrow \mathbb{N}$ par

$$|u| = n \text{ si et seulement si } u \in \mathbb{N}^{*\,n}.$$

Toute fonction partage son domaine de définition entre les images réciproques de ses valeurs. La fonction génération partage U en *générations*, notées $G_n := |\ \ |^{-1}(n) = \mathbb{N}^{*\,n}$. (La génération *ancestrale* G_0 se réduit à $\{\varnothing\}$.)[2]

Enchaînement. Muni de l'opération d'*enchaînement*, soit

$$(u, v) \mapsto uv, \text{ où } uv = i_1 \dots i_k j_1 \dots j_l, \text{ si } u = i_1 \dots i_k \text{ et } v = j_1 \dots j_l,$$

qui est associative et admet $\varnothing$ comme élément neutre, l'ensemble U des nœuds est un monoïde libre (cf. [2]).

On observe sans peine que la fonction génération $|\ \ | : (U, \ \ ) \longrightarrow (\mathbb{N}, +)$ est un morphisme de monoïdes. En effet,

$$|uv| = |u| + |v|, \qquad\qquad |\varnothing| = 0.$$

Si l'on fixe le premier argument $u \in U$ dans l'opération d'enchaînement, on obtient les applications injectives suivantes, dites *translations* :

$$\begin{aligned} &\tau_u : U \to U \\ &\tau_u v = uv. \end{aligned}$$

Les deux propriétés de l'enchaînement, qui confèrent à U une structure de monoïde, se traduisent sans difficulté dans les deux propriétés suivantes des translations :

$$\begin{aligned} &\tau_{\tau_u v} = \tau_u \circ \tau_v, \quad \forall u, v \in U \ ; \\ &\tau_\varnothing \text{ est l'application identique sur } U. \end{aligned}$$

Ordre. On appelle *ordre généalogique* l'ordre de division associé à l'en-

[1] ou encore, selon les circonstances, *individus* ou *mots*.

[2] En d'autres termes, $|u|$ est la *longueur* du mot u.

chaînement, soit l'ordre défini par la condition

$$u \trianglelefteq v \text{ si } \exists\, x \in U : ux = v.$$

On dit alors que *l'individu* u *est un ancêtre de l'individu* v[3]. On voit que $\varnothing = \min U$; $\varnothing$ est donc *l'ancêtre commun* de la population U.

Morphisme de monoïdes, la fonction génération est donc[4] également un morphisme d'ensembles ordonnés :

$$u \trianglelefteq v \Rightarrow |u| \leq |v|.$$

Une *ligne* (ou ligne d'arrêt, au sens de Chauvin [3]) est une collection $l \subset U$ de nœuds $\trianglelefteq$-incomparables. Les générations G_n en sont les plus simples exemples.

Ascendances et descendances. Soit $(V, \leq)$ un ensemble ordonné et soit u un élément de V. On appelle *ascendance* (respectivement *descendance*) de u l'ensemble $S_u := \{v \in V \mid v \leq u\}$ (respectivement $D_u := \{v \in V \mid u \leq v\}$), c'est-à-dire la section à gauche (respectivement à droite) de l'élément u.

Un ensemble ordonné, à ascendances finies et totalement ordonnées (et qui admet un premier élément 0) est dit *forêt* (respectivement *arbre de racine* 0). Si V est un arbre de racine 0, on désignera par $V^* := V \setminus \{0\}$; muni de la trace de l'ordre $\leq$, V^* est une forêt.

Muni de l'ordre généalogique, l'ensemble des nœuds U est un arbre de racine $\varnothing$. On désignera par U^* l'arbre U privé de sa racine.

Compte tenant de l'associativité de l'enchaînement, on voit aisément que τ_u réalise un *isomorphisme* d'arbres entre l'ensemble des nœuds U tout entier et la descendance D_u de u ; en particulier $D_u = \tau_u U = uU$ est un arbre de racine u. Pour $u = \varnothing$, on voit que $U = D_\varnothing$.

La descendance stricte de u est $D_u^* := D_u \setminus \{u\} = uU^*$. Notons que les descendances strictes vérifient la récurrence $D_u^* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\{uk\} \cup D_{uk}^*)$ qui s'écrit aussi $uU^* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\{uk\} \cup ukU^*)$, les recouvrements étant disjoints.

Les opérateurs $u \mapsto S_u$, $u \mapsto D_u$, définis sur U, admettent des extensions à la classe des sous-ensembles de U, à savoir

$$S_A := \bigcup_{u \in A} S_u,\ D_A := \bigcup_{u \in A} D_u,\ \forall A \subset U.$$

[3]ou bien que *le mot* u *est un préfixe du mot* v.

[4]L'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ est l'ordre de soustraction associé à l'addition.

S_A (respectivement D_A) sera dite *l'ascendance* (respectivement *la descendance*) de A.

On appelle *sous-arbre initial* (respectivement *sous-forêt finale*) de U tout point fixe de l'opérateur $A \mapsto S_A$ (respectivement $A \mapsto D_A$), i. e. toute partie $E \subset U$ égale à sa propre ascendance : $E = S_E$ (respectivement à sa propre descendance : $E = D_E$).

Un *arbre généalogique* (ou simplement arbre, au sens de Neveu [10]) est un sous-arbre initial non vide α de U :

$$\forall u,\ \forall v,\ v \trianglelefteq u \in \alpha \Rightarrow v \in \alpha, \tag{1}$$

qui vérifie en outre la propriété suivante:

$$\forall u \in \alpha,\ \exists \nu_u^\alpha \in I\!N,\ \forall k \in I\!N,\ 1 \le k \le \nu_u^\alpha \Leftrightarrow uk \in \alpha. \tag{2}$$

En mots, α possède, avec chaque individu u, toute son ascendance, ainsi qu'un *nombre* fini ν_u^α *de ses fils*, numérotés de 1 à ν_u^α.

On notera Ω^* l'ensemble des arbres généalogiques et on posera $\Omega := \Omega^* \cup \{\varnothing\}$; $\varnothing$ est ici l'arbre généalogique vide.

Soit $\alpha \in \Omega^*$. Si $1 \le k \le \nu_\varnothing^\alpha$, alors l'ensemble $\alpha_k := \{w \in U \,|\, kw \in \alpha\}$ est un arbre généalogique; on notera que $uk\alpha_k^* = u\alpha^* \cap D_{uk}^*$. L'arbre généalogique α vérifie la récurrence $\alpha^* = \bigcup_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} (\{k\} \cup k\alpha_k^*)$, le recouvrement étant disjoint. Si α est un arbre généalogique fini[5] à n générations, les arbres généalogiques α_k ont alors $n-1$ générations au plus.

2. Produit infini de noyaux de probabilité. Les trois sous-paragraphes qui suivent n'exposent pas de résultats nouveaux, mais sont destinés à fixer les notions. U y sera un ensemble quelconque, sans rapport avec l'ensemble des nœuds étudié au paragraphe précédent.

Espace mesurable produit. Soit $(E_u, \mathcal{E}_u)_{u \in U}$ une famille d'espaces mesurables. On désigne par $(E_U, \mathcal{E}_U) := \left(\prod_{u \in U} E_u, \bigotimes_{u \in U} \mathcal{E}_u \right)$ l'espace mesurable produit de la famille, défini comme il suit.

L'élément générique ω de E_U est une application $u \overset{\omega}{\mapsto} \omega_u$, définie sur U et à valeurs $\omega_u \in E_u$ respectivement, pour tout $u \in U$.

Si l'on fixe u et l'on fait varier ω dans E_U, on obtient *(les projections*

[5] Un arbre généalogique à un nombre fini n de générations est fini.

canoniques sur) les coordonnées:

$$\eta_u^U : E_U \longrightarrow (E_u, \mathcal{E}_u), \quad u \in U$$
$$\eta_u^U(\omega) = \omega_u,$$

qui engendrent la tribu $\mathcal{E}_U$; on l'appellera *tribu produit*.

Plus généralement, quelle que soit la sous-famille d'indices $L \subset U$, on désignera par $\mathcal{E}_L^U$ la tribu engendrée sur E_U par la sous-classe $(\eta_u^U)_{u\in L}$ de coordonnées. En particulier, $\mathcal{E}_U^U = \mathcal{E}_U$.

Cette construction peut être répétée pour toute sous-famille d'indices $K \subset U$. Elle nous fournit d'une manière analogue l'espace produit $(E_K, \mathcal{E}_K)$, les applications coordonnées $(\eta_u^K)_{u\in K}$ et, si $L \subset K$, la tribu $\mathcal{E}_L^K$ engendrée sur E_K par la sous-classe $(\eta_u^K)_{u\in L}$.

Applications multicoordonnées. Soit F un ensemble quelconque. Une application $f : F \to E_K$ étant donnée, les relations $f_u := \eta_u^K \circ f$ ($u \in K$) définissent *les coordonnées* de l'application f. Réciproquement, si une famille d'applications $f_u : F \to E_u$ ($u \in K$) est donnée, il existe une application et une seule $f : F \to E_K$, de coordonnées f_u; on dit alors que *l'application f est définie par ses coordonnées.*

On définit *les applications multicoordonnées* $\eta_K^U : E_U \to E_K$ ($K \subset U$) par leurs coordonnées: ce sont les uniques applications à vérifier $\eta_u^K \circ \eta_K^U = \eta_u^U$ pour tout $u \in K$. (Plus généralement, pour $L \subset K \subset U$ on a $\eta_L^K \circ \eta_K^U = \eta_L^U$; en effet, on prouve, par triple application de la définition précédente, que les coordonnées des deux membres sont égales.)

Une application $f : (F, \mathcal{F}) \to E_K$ est $\mathcal{F}/\mathcal{E}_K$-mesurable si et seulement si ses coordonnées f_u sont $\mathcal{F}/\mathcal{E}_u$-mesurables ($u \in K$). Si, de plus, f est surjective, elle induit, par extension aux sous-ensembles de F, un isomorphisme de tribus entre la tribu engendrée par ses coordonnées $\sigma(f_u)_{u\in K}$ et la tribu produit $\mathcal{E}_K$. Par conséquent les extensions des multicoordonnées η_K^U aux sous-ensembles réalisent des isomorphismes entre les tribus $\mathcal{E}_K^U$ et $\mathcal{E}_K$.

Pavés mesurables. On appelle *pavé* de E_U un sous-ensemble Π de E_U de forme produit: $\Pi = \prod\limits_{u\in U} A_u$, avec $A_u \subset E_u$. Le pavé Π est $\mathcal{E}_U$*-mesurable* si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini K de U, tel que $A_u \in \mathcal{E}_u$, $\forall u \in K$ et $A_u = E_u$, $\forall u \notin K$; on a donc en ce cas $\Pi = \bigcap\limits_{u\in K} (\eta_u^U)^{-1}(A_u)$.

L'ensemble K est appelé *un support* de Π. On voit sans difficulté que la classe des pavés mesurables de support K est un π-système[6] générateur

[6]On appelle π-système toute classe d'ensembles stable à l'intersection finie.

de $\mathcal{E}_K^U$, tandis que la classe des pavés mesurables de support quelconque est un π-système générateur de la tribu $\mathcal{E}_U$. Il s'ensuit que deux probabilités sur $\mathcal{E}_U$ qui coïncident sur toutes les sous-tribus $\mathcal{E}_K^U$ ($K \subset U$ fini) sont égales.

On appelle *système fondamental de sous-ensembles finis de* U toute partie $\subset$-cofinale $\mathcal{K}$ de la classe des sous-ensembles finis de U; $\mathcal{K}$ est donc telle que $\forall K \subset U$ fini, $\exists K' \in \mathcal{K} : K \subset K'$. Tout ensemble fini qui contient un support de Π en est encore un support. Par conséquent on ne restreint point la généralité si l'on ne considère plus par la suite que des pavés mesurables à support choisi dans un système fondamental de sous-ensembles finis.

Dans les considérations qui suivent, U est à nouveau l'ensemble des nœuds.

La classe des arbres généalogiques finis, privés de leurs racines, soit $\mathcal{K} := \{\, \alpha^* \mid \alpha \in \Omega^*,\ \alpha \text{ ensemble fini} \,\}$, constitue alors un choix convenable de système fondamental de sous-ensembles finis de U^*. D'une part $u\mathcal{K}$ est un système fondamental de sous-ensembles finis de D_u^*, car τ_u transportent bijectivement U^* sur D_u^* ($u \in U$). D'autre part, soit $\Pi = \prod_{v \in \alpha^*} A_{uv} \times \prod_{v \in U^* \setminus \alpha^*} E_{uv}$ un pavé de $E_{D_u^*}$ de support $u\alpha^* \in u\mathcal{K}$. Vu les récurrences vérifiées par les descendances et par les arbres généalogiques (v. premier paragraphe), les ensembles $\Pi_k := \prod_{w \in \alpha_k^*} A_{ukw} \times \prod_{w \in U^* \setminus \alpha_k^*} E_{ukw}$ sont des pavés de D_{uk}^*, de supports $uk\alpha_k^* \in uk\mathcal{K}$ respectivement ($1 \le k \le \nu_\varnothing^\alpha$), et la récurrence suivante est vérifiée:

$$\Pi = \left[\prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} (A_{uk} \times \Pi_k) \right] \times \left[\prod_{k=\nu_\varnothing^\alpha+1}^{\infty} E_{D_{uk}} \right]. \tag{3}$$

Noyau produit. Soit $(P_u)_{u \in (U, \trianglelefteq)}$ une famille de noyaux de probabilité entre $\left(\prod_{v \lhd u} E_v, \bigotimes_{v \lhd u} \mathcal{E}_v \right)$ et $(E_u, \mathcal{E}_u)$ respectivement; en particulier $P_\varnothing$ est une probabilité sur $(E_\varnothing, \mathcal{E}_\varnothing)$. Intuitivement, les noyaux P_u modélisent les transitions suivantes: si $u = j_1 \dots j_{k-1} j_k$, on passe des états $x_\varnothing, x_{j_1}, \dots, x_{j_1 \dots j_{k-1}}$, fixés dans $E_\varnothing, E_{j_1}, \dots, E_{j_1 \dots j_{k-1}}$ respectivement, à un état $x_u \in A_u$ avec une probabilité $P_u(x_\varnothing, x_{j_1}, \dots, x_{j_1 \dots j_{k-1}}; A_u)$, quel que soit $A_u \in \mathcal{E}_u$.

Le théorème suivant montre que les noyaux de probabilité P_u, de quelque manière qu'on les ait choisis, s'amalgament toujours en une loi de probabilité unique P sur $(E_U, \mathcal{E}_U)$, par rapport à laquelle ils modélisent effectivement et simultanément les transitions décrites précédemment. Plus précisément,

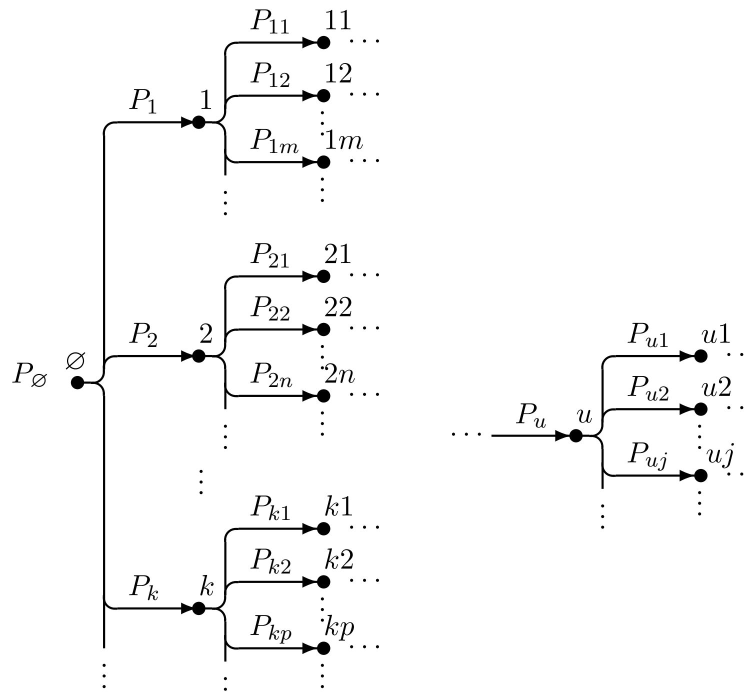

Figure 1: Système de transitions modélisé par la famille $(P_u)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$**.** Le passage à un individu u dépend de tous les états rencontrés sur le chemin qui mène de l'ancêtre $\varnothing$ à u.

les noyaux P_u sont les restrictions, aux tribus $\mathcal{E}_u^U$, des conditionnements, par rapport aux tribus $\mathcal{E}^U_{{}^c D_u}$, d'une même loi P, qui est, comme on peut le voir sur des sous-tribus simples, leur produit.

Théorème 2.1. (de Ionescu Tulcea généralisé) *La famille d'espaces mesurables* $(E_u, \mathcal{E}_u)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$ *et celle de noyaux de transition* $(P_u)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$ *ayant été fixées comme précédemment, il existe une unique famille de noyaux,* $(P^u)_{u\in U}$*, définis entre* $(E_{S_u}, \mathcal{E}_{S_u})$ *et* $(E_{D_u^*}, \mathcal{E}_{D_u^*})$ *respectivement, qui vérifient la récurrence*

$$P^u = \prod_{k=1}^{\infty} P_{uk} \otimes P^{uk}. \tag{4}$$

Cette famille est encore l'unique à vérifier

$$P^u\Big|_{\mathcal{E}^{D_u^*}_{u\alpha^*}} = \left(\bigotimes_{w\in\alpha^*} P_{uw}\right) \circ \eta^{D_u^*}_{u\alpha^*} \tag{5}$$

pour tout arbre généalogique $\alpha \in \Omega^*$ fini.

Dans le membre droit de la relation (5), on trouve le produit fini de noyaux de probabilité $P_{uw_1} \otimes P_{uw_2} \otimes \cdots \otimes P_{uw_p}$, où $w_1, w_2, \ldots, w_p$ est une énumération de α^* faite dans un ordre quelconque qui contient la trace sur α^* de l'ordre généalogique. (Un tel ordre est, par exemple, l'ordre lexicographique.)

Pour plus de rigueur, on renvoie à l'Annexe.

Preuve. La famille $(P_{uk})_{k=1}^{\infty}$ satisfait évidemment aux conditions d'application du théorème A.4. La loi de reproduction de l'individu u est alors donnée par l'expression

$$Q_1^u := \prod_{k=1}^{\infty} P_{uk} = \prod_{w \in G_1} P_{uw}.$$

De manière plus générale, la loi gouvernant la descendance de u de génération n a l'expression

$$Q_n^u := \prod_{w \in G_n} P_{uw}, \quad n \in \mathbb{N},$$

les hypothèses du théorème A.4 étant, cette fois aussi, remplies par la famille $(P_{uw})_{w \in G_n}$. Le théorème de Ionescu Tulcea classique (th. A.3) nous permet alors de considérer, pour tout $u \in U$, le noyau

$$P^u := \bigotimes_{n \geq 1} Q_n^u,$$

qui gouverne l'évolution de toute la descendance de l'individu u. Montrons que ces noyaux vérifient la récurrence (4). En effet, on a, pour $n \geq 1$,

$$Q_{n+1}^u = \prod_{w \in G_{n+1}} P_{uw} = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{w \in G_n} P_{ukw} = \prod_{k=1}^{\infty} Q_n^{uk},$$

grâce à la propriété d'associativité des noyaux de Ulam-Lomnicki. On en déduit que

$$\begin{aligned} P^u &= Q_1^u \otimes \bigotimes_{n \geq 1} Q_{n+1}^u = \left(\prod_{k=1}^{\infty} P_{uk} \right) \otimes \bigotimes_{n \geq 1} \left(\prod_{k=1}^{\infty} Q_n^{uk} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(P_{uk} \otimes \bigotimes_{n \geq 1} Q_n^{uk} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} P_{uk} \otimes P^{uk}, \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant par application du lemme A.5 de l'Annexe.

Le volet existence de la première afirmation du théorème est donc acquis. Observons que le volet unicité de la deuxième affirmation est immédiat.

En effet, deux familles $(P^u)_{u\in U}$ et $(Q^u)_{u\in U}$ de noyaux, entre $(E_{S_u}, \mathcal{E}_{S_u})$ et $(E_{D_u^*}, \mathcal{E}_{D_u^*})$ respectivement, vérifiant chacune la relation (5), sont telles que, quel que soit $u \in U$, P^u et Q^u coïncident au moins sur les tribus $\mathcal{E}_{u\alpha^*}^{D_u^*}$, $\forall \alpha^* \in \mathcal{K}$. Les considérations développées au sous-paragraphe précédent nous permettent alors d'affirmer que $P^u = Q^u$ partout.

Mais alors, pour conclure, il suffit de prouver que toute famille de noyaux, qui vérifie la récurrence (4), vérifie également la relation (5), pour tout $\alpha \in \Omega^*$. En effet, d'une part on en déduit l'existence d'une famille vérifiant (5), celle-là même qui vérifie (4), et d'autre part toute famille vérifiant (4) coïncide avec l'unique famille qui vérifie (5).

Soit $(P^u)_{u\in U}$ une famille de noyaux, entre $(E_{S_u}, \mathcal{E}_{S_u})$ et $(E_{D_u^*}, \mathcal{E}_{D_u^*})$ respectivement, qui vérifie la récurrence (4). Montrons donc, par récurrence selon le nombre de générations de α, que, $\forall u \in U$, (5) a lieu.

Puisque deux probabilités quelconques sur un même espace mesurable sont égales sur la sous-tribu banale, l'affirmation est acquise pour $\alpha = \{\varnothing\}$.

Supposons maintenant que l'affirmation a été établie pour tout arbre généalogique α, de génération maximum $\leq N$. Soit maintenant un arbre généalogique α, de génération maximum $N+1$, soit $u \in U$ quelconque et établissons pour eux la relation (5). Pour cela, il suffit de prouver que (5) subsiste sur les événements constitutifs d'un π-système générateur de $\mathcal{E}_{u\alpha^*}^{D_u^*}$, par exemple sur les pavés mesurables de support $u\alpha^*$. En effet, si Π est un tel pavé, alors on a :

$$
\begin{aligned}
P^u(\Pi) \;&=\; \left(\prod_{k=1}^{\infty} P_{uk} \otimes P^{uk}\right)\left(\prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} (A_{uk} \times \Pi_k) \;\times \prod_{k=\nu_\varnothing^\alpha+1}^{\infty} E_{D_{uk}}\right) = \\
&= \prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} (P_{uk} \otimes P^{uk})(A_{uk} \times \Pi_k) = \prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} \int_{A_{uk}} P^{uk}(\eta_{uk}, \Pi_k)\, P_{uk}(d\eta_{uk}) = \\
&= \prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} \int_{A_{uk}} \left(\bigotimes_{w\in\alpha_k^*} P_{ukw}\right)\left(\eta_{uk}, \prod_{w\in\alpha_k^*} A_{ukw}\right) P_{uk}(d\eta_{uk}) = \\
&= \prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} \left(P_{uk} \otimes \bigotimes_{w\in\alpha_k^*} P_{ukw}\right)\left(A_{uk} \times \prod_{w\in\alpha_k^*} A_{ukw}\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} \left(P_{uk} \otimes \bigotimes_{w \in \alpha_k^*} P_{ukw} \right) \right) \left(\prod_{k=1}^{\nu_\varnothing^\alpha} \left(A_{uk} \times \prod_{w \in \alpha_k^*} A_{ukw} \right) \right) =$$

$$= \left(\bigotimes_{w \in \alpha^*} P_{uw} \right) \left(\prod_{w \in \alpha^*} A_{uw} \right) = \left(\bigotimes_{w \in \alpha^*} P_{uw} \right) \left(\eta_{u\alpha^*}^{D_u^*}(\Pi) \right),$$

par application successive de (3) et de (4), des théorèmes de Ulam-Lomnicki et de Fubini, de l'hypothèse de récurrence (les arbres α_k n'ayant que N générations au plus), des théorèmes de Fubini et de Ulam-Lomnicki de nouveau et finalement du théorème A.2 (l'ordre d'intégration[7] contenant la trace sur $u\alpha^*$ de l'ordre généalogique).

Le théorème est prouvé. □

On munira $(E_U, \mathcal{E}_U)$ de la probabilité $P := P_\varnothing \otimes P^\varnothing$. Faisons les notations suivantes:

$$P_{G_0} := P_\varnothing$$
$$P_{G_n} := Q_n^\varnothing, \ n \geq 1$$

et observons que

$$P = \bigotimes_{n \geq 0} P_{G_n}.$$

En effet, $P = P_\varnothing \otimes P^\varnothing = P_\varnothing \otimes \bigotimes_{n \geq 1} Q_n^\varnothing = P_{G_0} \otimes \bigotimes_{n \geq 1} P_{G_n}$.

Propriété faible de branchement du noyau produit. Désignons par:

$$P^{S_{G_n}} := P_{G_0} \otimes P_{G_1} \otimes \cdots \otimes P_{G_n}, \ n \geq 0. \tag{6}$$

Remarquons en passant la similitude avec la définition de P, à ceci près que le produit est fini. On montrera que la loi P satisfait aux deux conditions suivantes ($n \geq 0$):

$$P\Big|_{\mathcal{E}_{S_{G_n}}} = P^{S_{G_n}} \circ \eta_{S_{G_n}}^U$$
$$P[\quad | \ \mathcal{E}_{S_{G_n}}] = \prod_{u \in G_n} P^u.$$

La première relation signifie que, sur les sous-tribus qui modélisent le passé, P coïncide avec les lois (6) d'expression plus simple, à un isomorphisme de tribus près. La deuxième relation est la propriété de branchement faible.

[7] C'est l'ordre lexicographique, si les arbres α_k sont eux aussi explorés en ordre lexicographique.

Elle exprime le fait que les descendances des individus de génération n évoluent indépendamment, conditionnellement par rapport au passé. De plus, leur évolution est gouvernée par des noyaux de transition identiques.[8]

La conjonction des deux relations équivaut (cf. les commentaires accompagnant le Th. A.1) à la relation suivante, qui sera prouvée.

Théorème 2.2. (Propriété de branchement faible) *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et dans les notations précédentes, on a*

$$P = P^{S_{G_n}} \otimes \prod_{u \in G_n} P^u$$

Preuve. On a par définition $P = P_\varnothing \otimes P^\varnothing = P_{G_0} \otimes \prod_{u \in G_0} P^u$.

Supposons que $P = P^{S_{G_n}} \otimes \prod_{u \in G_n} P^u$. On a

$$\begin{aligned} P &= P^{S_{G_n}} \otimes \prod_{u \in G_n} \prod_{k=1}^{\infty} (P_{uk} \otimes P^{uk}) = P^{S_{G_n}} \otimes \prod_{u \in G_{n+1}} (P_u \otimes P^u) = \\ &= P^{S_{G_n}} \otimes \left(\prod_{u \in G_{n+1}} P_u \right) \otimes \left(\prod_{u \in G_{n+1}} P^u \right) = \\ &= (P^{S_{G_n}} \otimes P_{G_{n+1}}) \otimes \prod_{u \in G_{n+1}} P^u = P^{S_{G_{n+1}}} \otimes \prod_{u \in G_{n+1}} P^u, \end{aligned}$$

où l'égalité moyenne résulte par application du lemme A.4.

L'affirmation est donc prouvée, en vertu du principe de récurrence. □

Dans le théorème précédent on peut remplacer les générations par des lignes quelconques. Il y a même des propriétés de branchement faible sur des objets plus généraux que les lignes. Voir [1] pour détails.

On obtient des propriétés fortes de branchement lorsqu'on remplace les lignes par des lignes d'arrêt $L(\omega)$, qui varient en fonction de l'élément aléatoire ω. Elles seront étudiées dans un autre travail.

3. Processus de branchement spatial. Pour mieux comprendre le formalisme qui suit, il n'est pas inutile d'en avoir une représentation intuitive. Pensons donc à l'évolution, dans le temps et dans l'espace, de la descendance d'une plante annuelle. Dans la saison froide, la plante sèche et meurt, ses graines étant dispersées par le vent. Dans la saison chaude suivante, les graines ayant trouvé des conditions propices germineront, reprenant ainsi

[8] Les descendances D_u ne sont pourtant pas identiquement distribuées. En effet, leurs lois d'évolution dépendent, de la même façon (mêmes noyaux de transition!), des passés généalogiques *différents* de leurs ancêtres respectifs $u \in G_n$.

le cycle de la vie.

On suppose que le nombre de graines produites par une plante, qui germineront la saison prochaine, est influencé par la *position* qu'elle occupe. (L'humidité, la qualité du sol, l'exposition au soleil en dépendent. Il y a des endroits favorables et des endroits défavorables au développement de la plante, à la maturation de ses fruits ou à la dispersion de ses graines.) La position de la plante influencera aussi les positions occupées par ses descendants. En revanche tout autre paramètre (génome, densité des individus, accidents climatiques, maladies ou invasions de parasites) est supposé sans effet sur l'évolution des individus.

Mathématiquement, une histoire possible (ou, pour garder la terminologie propre aux processus de Galton-Watson, une généalogie) de cette population végétale est un *choix* fait *au hasard* dans la classe des arbres généalogiques à nœuds marqués par les positions.

Le choix global de la généalogie résulte de l'intéraction d'une multitude de choix locaux de nœuds marqués et on ne peut en saisir directement la loi. Mais on saisit bien les lois gouvernant les choix locaux et la manière dont ces choix s'agencent: en effet, récursivement, pour chaque individu u, on choisit le nombre et les positions de ses descendants selon des noyaux de probabilité qui ne dépendent que de la position de u. La loi abstraite, qui gouverne le choix global, sera construite mathématiquement, à partir de ces informations.

Le processus généalogique. Soit $(E^*, \mathcal{E}^*)$ l'aréal de la plante. Mathématiquement E^* est un espace métrique, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}^*$. Soit $\emptyset \notin E^*$ un point, dit point fictif[9]. Posons $E := E^* \cup \{\emptyset\}$ et considérons la tribu $\mathcal{E} := \sigma_E(\mathcal{E}^*)$ engendrée par $\mathcal{E}^*$ sur E. *L'espace des états* du processus sera $(E, \mathcal{E})$.

Considérons l'ensemble des *généalogies* (ou des *histoires possibles*), dans lequel le choix global est opéré, soit $\Omega^E := \{\, \omega : U \to E \,|\, \omega^{-1}(E^*) \in \Omega \,\}$. Une application ω qui associe un état à chaque nœud de U correspond donc à une histoire possible si la partie ω-non fictive $\omega^{-1}(E^*)$ de U est un arbre généalogique.

Désignons par $\Omega^E_u := \{\, \omega \in \Omega^E \,|\, u \in \omega^{-1}(E^*)\}$ *l'ensemble de réalisation* de l'individu $u \in U$, soit la classe des généalogies où u figure comme un

[9] Un individu dont la position est $\emptyset$ c'est un individu qui n'existe pas. L'introduction de l'état fictif $\emptyset$ n'est qu'un artifice technique, qui nous permettra de regarder toutes les généalogies comme des fonctions ayant le même domaine de définition U.

individu réel. Les deux propriétés suivantes découlent respectivement des deux conditions, (1) et (2), vérifiées par $\omega^{-1}(E^*)$, qui caractérisent les arbres généalogiques:

$$u \trianglelefteq v \Rightarrow \Omega_v^E \subset \Omega_u^E, \quad \forall u, v \in U$$
$$\Omega_{u(k+1)}^E \subset \Omega_{uk}^E, \quad \forall u \in U,\ k \in I\!N^*.$$

On constate que $\Omega^E \subset E^U = \prod_{u\in U} E$. Une généalogie $\omega \in \Omega^E$ peut être regardée, à travers l'identification $\omega \equiv \big(u \mapsto \eta_u^E(\omega)\big)$, comme une trajectoire du *processus stochastique en temps non linéaire* $(\eta_u^E)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$, où

$$\eta_u^E : \Omega^E \longrightarrow E$$
$$\eta_u^E(\omega) = \omega(u)$$

sont les restrictions à Ω^E des applications coordonnées de E^U.

Les ensembles de réalisation sont composés des trajectoires qui rencontrent l'individu: $\Omega_u^E = (\eta_u^E)^{-1}(E^*)$.

Nous munirons Ω^E de la *tribu*

$$\mathcal{F}^E := \sigma\left(\eta_u^E, u \in U\right) = \mathcal{E}^{\otimes U} \cap \Omega^E,$$

la plus petite rendant mesurables les applications η_u^E; c'est la trace sur Ω^E de la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes U} := \bigotimes_{u\in U} \mathcal{E}$.

Il existe une *filtration naturelle*, en ordre généalogique également, de l'espace mesurable $(\Omega^E, \mathcal{F}^E)$:

$$\mathcal{F}_u^E := \sigma\left(\eta_v^E, v \trianglelefteq u\right), \quad u \in (U, \trianglelefteq).$$

Remarquons que $\Omega_u^E \in \mathcal{F}_u^E,\ u \in U$ et que $\mathcal{F}^E = \bigvee_{u\in U} \mathcal{F}_u^E$.

On utilisera surtout une autre filtration, associée aux générations, qui a l'avantage d'être indexée selon un ensemble totalement ordonné :

$$\mathcal{F}_n^E := \bigvee_{u\in G_n} \mathcal{F}_u^E, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Munissons l'espace mesurable $(\Omega^E, \mathcal{F}^E)$ des *opérateurs de décalage*:

$$\theta_u^E : \Omega^E \longrightarrow \Omega^E, \quad u \in U$$
$$\theta_u^E(\omega) = \omega \circ \tau_u.$$

En particulier $\theta_\varnothing^E$ est l'identité de l'espace Ω^E. Si ω représente l'histoire de la population, $\omega \circ \tau_u$ n'en est qu'un fragment: c'est l'histoire de la descendance de u, mais regardée comme s'il s'agissait d'une histoire de la descendance de $\varnothing$.[10] (C'est possible, car les arbres U et uU sont isomorphes.)

Puisque Ω^E est un sous-ensemble d'un espace produit et θ_u^E sont des opérateurs à valeurs dans Ω^E, ils peuvent être complètement caractérisés par leurs coordonnées. On a donc la proposition suivante.

Proposition 3.1. (Propriété de récurrence des projections. Mesurabilité des décalages) *Soit $u \in U$ fixé.*

(i) Alors θ_u^E est l'unique opérateur : $\Omega^E \to \Omega^E$ qui vérifie la récurrence

$$\begin{tikzcd} \Omega^E \arrow[r, "\theta_u^E"] \arrow[dr, "\eta^E_{\tau_u v}"'] & \Omega^E \arrow[d, "\eta_v^E"] \\ & E \end{tikzcd} \qquad \eta_v^E \circ \theta_u^E = \eta^E_{\tau_u v}, \quad \forall v \in U.$$

En particulier $\eta_\varnothing^E \circ \theta_u^E = \eta_u^E$ et $\eta_v^E \circ \theta_\varnothing^E = \eta_v^E$.

(ii) De plus θ_u^E est $\mathcal{F}^E_{\tau_u v}/\mathcal{F}^E_v$-mesurable, $\forall v \in U$, donc $\mathcal{F}^E_{n+|u|}/\mathcal{F}^E_n$- et $\mathcal{F}^E/\mathcal{F}^E$-mesurable également.

Preuve. En effet, $\eta_v^E \circ \theta_u^E(\omega) = \eta_v^E(\omega \circ \tau_u) = \omega(\tau_u v) = \eta^E_{\tau_u v}(\omega)$. Pour la deuxième affirmation, il suffit d'avoir que $\eta_w^E \circ \theta_u^E$ est $\mathcal{F}^E_{\tau_u v}/\mathcal{E}$-mesurable pour tout $w \trianglelefteq v$. Mais $\eta_w^E \circ \theta_u^E = \eta^E_{\tau_u w} \in \mathcal{F}^E_{\tau_u w}/\mathcal{E} \subset \mathcal{F}^E_{\tau_u v}/\mathcal{E}$. $\square$

Corollaire 3.1. (Propriété de récurrence des décalages)

$$\theta_v^E \circ \theta_u^E = \theta^E_{\tau_u v}, \quad \forall u, v \in U.$$

Preuve. Par double application de la proposition précédente, on a successivement $\eta_w^E \circ (\theta_v^E \circ \theta_u^E) = (\eta_w^E \circ \theta_v^E) \circ \theta_u^E = \eta_{vw}^E \circ \theta_u^E = \eta_{uvw}^E$, $\forall w \in U$. Or, en vertu de la même proposition, ceci suffit à montrer que $\theta_v^E \circ \theta_u^E$ vaut θ_{uv}^E. $\square$

Corollaire 3.2. (Propriété de récurrence des ensembles de réalisation)

$$(\theta_u^E)^{-1}(\Omega_v^E) = \Omega_{uv}^E, \quad \forall u, v \in U.$$

Preuve. On a successivement $\omega \in (\theta_u^E)^{-1}(\Omega_v^E) \Leftrightarrow \theta_u^E(\omega) \in \Omega_v^E \Leftrightarrow \eta_v^E(\theta_u^E(\omega)) \in E^* \Leftrightarrow \eta_{uv}^E(\omega) \in E^* \Leftrightarrow \omega \in \Omega_{uv}^E$, l'avant-dernière relation résultant par application de la proposition précédente. $\square$

[10] par suppression du préfixe u des noms des nœuds.

Définissons *le nombre de fils de* v ($v \in U$):

$$\begin{aligned} &\nu_v^E : \Omega^E \longrightarrow I\!N \\ &\nu_v^E(\omega) := \mathrm{card}\left(vG_1 \cap \omega^{-1}(E^*)\right) = \begin{cases} \nu_v^{\omega^{-1}(E^*)} & \text{si } v \in \omega^{-1}(E^*) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Proposition 3.2. (Propriété de récurrence et mesurabilité du nombre de fils) *Soit* $v \in U$ *fixé.*

(i) $\nu_v^E \circ \theta_u^E = \nu_{\tau_u v}^E$, $\forall u \in U$. *En particulier* $\nu_v^E = \nu_\varnothing^E \circ \theta_v^E = \nu_v^E \circ \theta_\varnothing^E$.

(ii) La fonction ν_v^E *est* $\mathcal{F}_{|v|+1}^E$*-mesurable.*

Preuve. En effet, $\nu_{\tau_u v}^E(\omega) = \mathrm{card}\big(uvG_1 \cap \omega^{-1}(E^*)\big) = \mathrm{card}\, \tau_u^{-1}\big(uvG_1 \cap \omega^{-1}(E^*)\big) = \mathrm{card}\big(vG_1 \cap (\omega \circ \tau_u)^{-1}(E^*)\big) = \mathrm{card}\big(vG_1 \cap (\theta_u^E(\omega))^{-1}(E^*)\big) = \nu_v^E(\theta_u^E(\omega))$, ce qui montre la première relation.

D'autre part, par (7) et par (2), $\{\nu_v^E \geq n\} = \{\nu_v^{\omega^{-1}(E^*)} \geq n\} = \{vn \in \omega^{-1}(E^*)\} = \{\eta_{vn}^E \in E^*\} = \Omega_{vn}^E \in \mathcal{F}_{vn}^E$, $\forall n \in I\!N^*$ et $\{\nu_u^E \geq 0\}$ est l'événement certain, ce qui prouve la deuxième partie de la proposition. $\square$

On vient donc de définir tous les éléments associés d'habitude à un processus stochastique: l'espace mesurable, la filtration, la famille de décalages et le processus lui-même:

$$\left(\Omega^E, \mathcal{F}^E, \left(\mathcal{F}_u^E\right)_{u \in U}, \left(\theta_u^E\right)_{u \in U}, \left(\eta_u^E\right)_{u \in U}\right).$$

Il y manque seulement la définition de la loi. (On a même défini un deuxième processus, $(\nu_u^E)_{u \in U}$, fonction déterministe du premier.)

Introduisons les noyaux de probabilité qui modélisent les choix locaux:

- Q de $(E^*, \mathcal{E}^*)$ sur lui-même; $Q(x_u, A_{uk})$ représente la probabilité, pour le k ème descendant de u, d'être situé dans l'ensemble A_{uk}, sachant que u occupe la position x_u.

- p entre $(E^*, \mathcal{E}^*)$ et $(I\!N, \mathcal{P}(I\!N))$; $p(x_u, \nu_u)$ représente pour u la probabilité d'avoir exactement ν_u fils, sachant que sa position est x_u.

Si l'on se laissait tromper par les apparences, on pourrait croire que la loi de probabilité pouvait être construite récursivement, d'une manière très simple, à partir de ces deux noyaux. En effet, si l'ancêtre commun a la position $x_\varnothing$, alors il donne naissance, avec une probabilité égale à $p(x_\varnothing, k)$, à k fils qui occupent les positions η_1^E, $\eta_2^E, \dots, \eta_k^E$ situées respectivement dans les domaines mesurables A_1, $A_2, \dots, A_k$ et

$$P\,(\ \eta_1^E \in A_1,\ \eta_2^E \in A_2, \ldots,\ \eta_k^E \in A_k,\ \nu_\varnothing^E = k \mid \eta_\varnothing^E = x_\varnothing\ ) = \\ = p(x_\varnothing, k)\, Q(x_\varnothing, A_1) \ldots Q(x_\varnothing, A_k)$$

De proche en proche, on peut construire de cette manière la probabilité de tout événement simple de ce type; ce sera, chaque fois, une loi produit, sur un ensemble d'indices différent.

Mais ces calculs n'assurent aucunement, ils supposent, au contraire, l'existence de la loi P à laquelle on prétend attribuer toutes ces valeurs. On attire tout particulièrement l'attention sur le fait que $(\Omega^E, \mathcal{F}^E)$ n'est pas un espace produit et que, donc, même si P a une forme produit sur les événements simples, elle n'est pas une loi produit. L'arbre des individus réels $\omega^{-1}(E^*)$ change avec ω, modifiant l'ensemble même des indices sur lequel le produit doit être effectué.

La solution correcte est celle indiquée par Neveu [10]. Elle consiste à construire, sur un espace mesurable produit $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$, un processus auxiliaire gouverné par une loi produit, dont l'existence sera assurée par le théorème de Ionescu Tulcea généralisé. Une application mesurable $\psi : \widetilde{\Omega} \to \Omega^E$ transportera ensuite la loi produit sur la loi qu'on cherche.

Le processus auxiliaire. La source du problème, qu'on va maintenant contourner en construisant un processus auxiliaire, est la géométrie variable de $\omega^{-1}(E^*)$. On y remédiera par un artifice technique.

À côté de l'information relative à leur emplacement, on enregistrera dans les codes des individus l'information relative au nombre de leurs fils. Pour savoir si un individu u est fictif, il suffira alors de faire un calcul à partir des codes de ses ancêtres. Point n'est besoin de le distinguer, de quelque manière que ce soit, d'un individu réel, en lui attribuant par exemple une marque spéciale. On lui attribuera, au contraire, une vraie position $x_u \neq \varnothing$ et un nombre $\tilde{\nu}_u$ de fils, comme s'il s'agissait d'un individu réel. Le nombre de fils d'un individu devient alors un paramètre abstrait, sans impact sur l'arbre généalogique, qui reste identique à U. Puisque les individus réels et ceux fictifs reçoivent les mêmes marques, l'espace mesurable est un espace produit.

On obtient ainsi le processus auxiliaire: un modèle différent de l'évolution de la population, redondant, mais conceptuellement plus simple.

L'espace des états du processus auxiliaire sera $(E^* \times I\!N, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P}(I\!N)) =: (E_u, \mathcal{E}_u),\ \forall u \in U$.

Le processus sera défini sur l'espace mesurable produit

$$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}) := \left(\prod_{u \in U} E_u, \bigotimes_{u \in U} \mathcal{E}_u \right)$$

et sera donné par les applications coordonnées (cf. paragraphe 2):

$$\begin{aligned} &\tilde{\eta}_u : \widetilde{\Omega} \longrightarrow (E_u, \mathcal{E}_u) \\ &\tilde{\eta}_u(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}(u). \end{aligned}$$

On a $\tilde{\eta}_u = (x_u, \tilde{\nu}_u)$. On considérera, sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$, les familles croissantes de sous-tribus $(\widetilde{\mathcal{E}}_u)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$, $(\widetilde{\mathcal{P}}_u)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$, $(\widetilde{\mathcal{F}}_u)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$, $(\widetilde{\mathcal{E}}_n)_{n\in(I\!N,\le)}$, $(\widetilde{\mathcal{P}}_n)_{n\in(I\!N,\le)}$, $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)_{n\in(I\!N,\le)}$, définies de la façon suivante:

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\mathcal{E}}_u := \sigma(x_v\,;\, v \trianglelefteq u) & \widetilde{\mathcal{P}}_u := \sigma(\tilde{\nu}_v\,;\, v \trianglelefteq u) & \widetilde{\mathcal{F}}_u := \widetilde{\mathcal{E}}_u \vee \widetilde{\mathcal{P}}_u \\ \widetilde{\mathcal{E}}_n := \sigma(x_v\,;\, |v| \le n) & \widetilde{\mathcal{P}}_n := \sigma(\tilde{\nu}_v\,;\, |v| \le n) & \widetilde{\mathcal{F}}_n := \widetilde{\mathcal{E}}_n \vee \widetilde{\mathcal{P}}_n \end{array}$$

Définissons les décalages:

$$\begin{aligned} &\tilde{\theta}_u : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \widetilde{\Omega}, \quad u \in U, \\ &\tilde{\theta}_u(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} \circ \tau_u. \end{aligned}$$

En particulier, $\tilde{\theta}_\varnothing$ est l'identité de l'espace $\widetilde{\Omega}$. Puisque $\widetilde{\Omega}$ est un espace produit et $\tilde{\theta}_u$ prennent leurs valeurs dans $\widetilde{\Omega}$, ils peuvent être complètement caractérisés par leurs projections sur les coordonnées. On a donc:

Proposition 3.3. (Propriété de récurrence des projections. Mesurabilité des décalages) *Soit $u \in U$ fixé.*

(i) Alors $\tilde{\theta}_u$ est l'unique opérateur : $\widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Omega}$ qui vérifie la récurrence

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Omega} \arrow[r, "\tilde{\theta}_u"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}_{\tau_u v}"'] & \widetilde{\Omega} \arrow[d, "\tilde{\eta}_v"] \\ & E^* \times I\!N \end{tikzcd} \qquad \tilde{\eta}_v \circ \tilde{\theta}_u = \tilde{\eta}_{\tau_u v}, \quad \forall v \in U$$

ce qui peut encore être écrit: $x_v \circ \tilde{\theta}_u = x_{uv}$ et $\tilde{\nu}_v \circ \tilde{\theta}_u = \tilde{\nu}_{uv}$, $\forall v \in U$. En particulier $\tilde{\eta}_\varnothing \circ \tilde{\theta}_u = \tilde{\eta}_u \circ \tilde{\theta}_\varnothing = \tilde{\eta}_u$.

(ii) Les opérateurs de décalage $\tilde{\theta}_u$ sont $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau_u v}/\widetilde{\mathcal{F}}_v$-mesurables, pour tout $v \in U$. Donc ils sont également $\widetilde{\mathcal{F}}_{n+|u|}/\widetilde{\mathcal{F}}_n$- et $\widetilde{\mathcal{F}}/\widetilde{\mathcal{F}}$-mesurables.

Preuve. En effet, $\tilde{\eta}_v \circ \tilde{\theta}_u(\tilde{\omega}) = \tilde{\eta}_v(\tilde{\omega} \circ \tau_u) = (\tilde{\omega} \circ \tau_u)(v) = \tilde{\omega}(\tau_u v) = \tilde{\eta}_{\tau_u v}(\tilde{\omega})$, $\forall \tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$. La deuxième affirmation sera démontrée si l'on démontre que $\tilde{\eta}_w \circ \tilde{\theta}_u$ est $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tau_u v}/\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P}(I\!N)$-mesurable, $\forall w \trianglelefteq v$, ce qui est une conséquence de la première affirmation. $\square$

Corollaire 3.3. (Récurrence des décalages) $\tilde{\theta}_v \circ \tilde{\theta}_u = \tilde{\theta}_{\tau_u v},\ \forall u, v \in U$.

Preuve. Par double application de la proposition précédente, on a successivement $\tilde{\eta}_w \circ (\tilde{\theta}_v \circ \tilde{\theta}_u) = (\tilde{\eta}_w \circ \tilde{\theta}_v) \circ \tilde{\theta}_u = \tilde{\eta}_{vw} \circ \tilde{\theta}_u = \tilde{\eta}_{uvw},\ \forall w \in U$. Or, en vertu de la même proposition, ceci suffit à montrer que $\tilde{\theta}_v \circ \tilde{\theta}_u$ vaut $\tilde{\theta}_{uv}$. □

Nous allons définir une loi sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$, à partir de la loi de dispersion donnée par le noyau Q et de la loi de reproduction, donnée par le noyau p. On définit les noyaux ($u \in U,\ k \in I\!N^*$)

$$Q_{uk}(\tilde{\eta}_\varnothing, \ldots, \tilde{\eta}_u\,;\, dx_{uk}) := Q(x_u\,;\, dx_{uk}) \text{ entre } \left(\prod_{v \trianglelefteq u} E_u, \bigotimes_{v \trianglelefteq u} \mathcal{E}_u\right) \text{ et } \big(E^*, \mathcal{E}^*\big)$$

$$p_{uk}(\tilde{\eta}_\varnothing, \ldots, \tilde{\eta}_u, x_{uk}\,;\, \tilde{\nu}_{uk}) := p(x_{uk}, \tilde{\nu}_{uk})$$

$$\text{entre } \left(\prod_{v \trianglelefteq u} E_u \times E^*, \bigotimes_{v \trianglelefteq u} \mathcal{E}_u \otimes \mathcal{E}^*\right) \text{ et } \big(I\!N, \mathcal{P}(I\!N)\big)$$

$$p_\varnothing(x_\varnothing, \tilde{\nu}_\varnothing) := p(x_\varnothing, \tilde{\nu}_\varnothing) \text{ entre } (E^*, \mathcal{E}^*) \text{ et } \big(I\!N, \mathcal{P}(I\!N)\big)$$

Par une application du théorème de Fubini, on peut considérer la famille de noyaux

$$P_u := Q_u \otimes p_u \text{ entre } \left(\prod_{v \lhd u} E_u, \bigotimes_{v \lhd u} \mathcal{E}_u\right) \text{ et } (E_u, \mathcal{E}_u), \quad u \in U^*$$

On lui applique le théorème de Ionescu Tulcea généralisé. Il n'est pas difficile de voir que le noyau P^u, qui est, d'après le théorème de Ionescu Tulcea généralisé, $\widetilde{\mathcal{F}}_u$-mesurable, ne dépend en réalité que de x_u:

Lemme 3.1. *$P^u(\,\cdot\,, A)$ est $\sigma(x_u)$-mesurable, $\forall u \in U, \forall A \in \sigma\{\tilde{\eta}_v, u \lhd v\}$.*

Ainsi les noyaux p_u et P^u commutent. (Ce lemme illustre un principe plus général: si les noyaux P_{uk} sont tous $\mathcal{G}_u$-mesurables, avec $\mathcal{G}_u \subset \sigma(\eta_v; v \trianglelefteq u)$ et $\mathcal{G}_{uk} \subset \mathcal{G}_u \vee \sigma(\eta_{uk})$, alors les noyaux P^u sont tous $\mathcal{G}_u$-mesurables.)

Preuve. Il suffit de prouver l'affirmation sur un π-système générateur de $\sigma\{\tilde{\eta}_v, u \lhd v\} = \widetilde{\mathcal{E}}_{D_u^*}$, sur les pavés mesurables par exemple. On fera une récurrence selon le nombre de générations du pavé.

Soit $\Pi = \prod_{k=1}^{m} (A_{uk} \times E_{D_{uk}^*}) \times \prod_{k=m+1}^{\infty} E_{D_{uk}}$ un pavé à une génération. Alors

$$P^u(\,\cdot\,, \Pi) = \prod_{k=1}^{m} P_{uk}(x_u, A_{uk})$$

ne dépend que de x_u.

Supposons maintenant l'affirmation vraie pour tout pavé à un nombre de générations inférieur à celui de $\Pi = \prod_{k=1}^{m} (A_{uk} \times \Pi_k) \times \prod_{k=m+1}^{\infty} E_{D_{uk}}$. Par l'hypothèse de récurrence, on voit que

$$P^u(\,\cdot\,, \Pi) = \prod_{k=1}^{m} \int_{A_{uk}} P_{uk}(x_u, dy) P^{uk}(y, \Pi_k)$$

ne dépend que de x_u.

Sur les pavés mesurables, les noyaux P^u sont donc des fonctions de x_u seulement. Étant $\sigma\{\tilde{\eta}_v; v \trianglelefteq u\}$-mesurables, on en déduit qu'ils sont $\sigma(x_u)$-mesurables. (En effet, une fonction $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$-mesurable $f(x, y) : E \times F \to I\!R$, constante pour x fixé, est $\mathcal{E} \otimes \{F, \varnothing\}$-mesurable.) $\square$

Observons encore que la formule suivante de changement de variables a lieu, formule qui n'est pas une égalité de noyaux, mais qu'on doit plutôt comprendre comme une égalité d'intégrales de fonctions $\widetilde{\mathcal{F}}$-mesurables.

(On peut aussi la regarder comme un simple changement de notation.)

Lemme 3.2. (Changement de variables)

$$\delta_x \otimes (p_\varnothing P^\varnothing) = (\delta_x \otimes (p_u P^u)) \circ \tilde{\theta}_u^{-1}.$$

Au membre droit, le noyau $p_u P^u$ est intégré par rapport à x_u, l'unique variable, conformément au lemme précédent, qui modifie sa valeur.

Preuve. Il suffit de prouver l'égalité sur la classe des pavés mesurables. C'est ce qu'on fera, par récurrence selon le nombre de générations de leurs supports. (On ne marquera, dans les formules qui suivent, que les dépendances qui comptent, faisant usage des renseignements fournis par le lemme précédent.)

Soit $\Pi = \prod_{v \in U} A_v$ un pavé. Remarquons que $\tilde{\theta}_u^{-1}(\Pi) = \prod_{w \in U} B_w$, avec $B_{uv} = A_v$, $\forall v \in U$ et $B_w = E_w$ pour tout w qui n'est pas dans la descendance de u.

Supposons pour commencer que le support de Π n'a qu'une génération: $\Pi = A_\varnothing \times \prod_{k=1}^{m} (A_k \times E_{D_k^*}) \times \prod_{k=m+1}^{\infty} E_{D_k}$. Alors $(\delta_x \otimes (p_u P^u)) \circ \tilde{\theta}_u^{-1}(\Pi) = (\delta_x \otimes p_u)(B_u) \prod_{k=1}^{m} P_{uk}(x, B_{uk}) = (\delta_x \otimes p)(A_\varnothing) \prod_{k=1}^{m} (Q \otimes p)(x, A_k) = (\delta_x \otimes p_\varnothing)(A_\varnothing) \prod_{k=1}^{m} P_k(x, A_k) = (\delta_x \otimes (p_\varnothing P^\varnothing))(\Pi)$.

Plus généralement, soit le pavé $\Pi = A_\varnothing \times \prod_{k=1}^{m} (A_k \times A^k) \times \prod_{k=m+1}^{\infty} E_{D_k}$. Ici $A^k := \prod_{k \lhd v} A_v,\ k \in I\!N^*$; correspondamment, on désignera par $B^{uk} := \prod_{uk \lhd v} B_v,\ k \in I\!N^*$. Les relations suivantes définissent alors des pavés mesurables de $\widetilde{\mathcal{E}}_U$:

$$\begin{aligned} \Pi_k &:= \prod_{u \in U} C_u^k, \quad k \in I\!N^* \\ C_u^k &:= A_{ku} \end{aligned}$$

dont les supports ont au moins une génération de moins que celui de Π.

Supposons maintenant que le pavé Π a un support à p générations. On suppose que l'égalité à prouver est vraie sur tout pavé à support ayant moins de p générations, et en particulier sur Π_k. On a

$$\begin{aligned} &(\delta_x \otimes (p_u P^u)) \circ \tilde{\theta}_u^{-1}(\Pi) = \\ &\quad = (\delta_x \otimes p_u)\,(B_u)\,\prod_{k=1}^{m} \int_{B_{uk}} P_{uk}(x, dy_{uk}) P^{uk}(y_{uk}, B^{uk}) = \\ &\quad = (\delta_x \otimes p_u)\,(B_u)\,\prod_{k=1}^{m} \int Q(x, dy_{uk})(\delta_{y_{uk}} \otimes (p_{uk} P^{uk}))(B_{uk} \times B^{uk}) = \\ &\quad = (\delta_x \otimes p_u)\,(B_u)\,\prod_{k=1}^{m} \int Q(x, dy_{uk})(\delta_{y_{uk}} \otimes (p_{uk} P^{uk})) \circ \tilde{\theta}_{uk}^{-1}(\Pi_k) = \\ &\quad = (\delta_x \otimes p)\ \ (A_\varnothing)\,\prod_{k=1}^{m} \int Q(x, dy_{uk})(\delta_{y_{uk}} \otimes (p_\varnothing P^\varnothing))(\Pi_k) = \\ &\quad = (\delta_x \otimes p_\varnothing)(A_\varnothing)\,\prod_{k=1}^{m} \int Q(x, dy_k)\ (\delta_{y_k} \otimes (p_k P^k)) \circ \tilde{\theta}_k^{-1}(\Pi_k) = \\ &\quad = (\delta_x \otimes p_\varnothing)(A_\varnothing)\,\prod_{k=1}^{m} \int Q(x, dy_k)\ (\delta_{y_k} \otimes (p_k P^k))(A_k \times A^k) = \\ &\quad = (\delta_x \otimes p_\varnothing)(A_\varnothing)\,\prod_{k=1}^{m} \int_{A_k} P_k(x, dy_k) P^k(y_k, A^k) = (\delta_x \otimes (p_\varnothing P^\varnothing))(A), \end{aligned}$$

les quatrième et cinquième égalités résultant de l'hypothèse de récurrence. □

On munit l'espace $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ du noyau de probabilité $\mathbb{P}_x := \delta_x \otimes (p_\varnothing P^\varnothing)$.

Lemme 3.3. (Propriété de branchement) *Pour tout $n \in I\!N$, les variables aléatoires $(\widetilde{\theta}_u)_{u \in G_n}$ sont indépendantes et suivent respectivement les lois $\mathbb{P}_{x_u}$, conditionnellement par rapport à $\widetilde{\mathcal{E}}_n \vee \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}$.*

Autrement dit,

$$\mathbb{P}_x\left[\prod_{u\in B} g_u\circ\tilde{\theta}_u \,|\, \widetilde{\mathcal{E}}_n\vee\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}\right]=\prod_{u\in B}\mathbb{P}_{x_u}[g_u] \tag{8}$$

pour tout sous-ensemble fini $B\subset G_n$ *et pour toute famille de fonctions* $g_u:\widetilde{\Omega}\to I\!R$, $\widetilde{\mathcal{F}}$*-mesurables et bornées (ou positives),* $u\in B$.

Preuve. Du théorème généralisé de Ionescu Tulcea, des commentaires qui l'accompagnent et du lemme A.4, on déduit aussitôt les faits suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x &= \delta_x\otimes p_\varnothing P_{G_1}\otimes\cdots\otimes P_{G_{n-1}}\otimes P_{G_n}\otimes\prod_{u\in G_n}P^u=\\
&= \delta_x\otimes p_\varnothing P_{G_1}\otimes\cdots\otimes P_{G_{n-1}}\otimes\prod_{u\in G_n}(Q_u\otimes p_u)\otimes\prod_{u\in G_n}P^u=\\
&= \delta_x\otimes p_\varnothing P_{G_1}\otimes\cdots\otimes P_{G_{n-1}}\otimes\prod_{u\in G_n}Q_u\otimes\prod_{u\in G_n}p_u\otimes\prod_{u\in G_n}P^u=\\
&= \delta_x\otimes p_\varnothing P_{G_1}\otimes\cdots\otimes P_{G_{n-1}}\otimes\prod_{u\in G_n}Q_u\otimes\prod_{u\in G_n}p_uP^u
\end{aligned}$$

Or $\delta_x\otimes p_\varnothing P_{G_1}\otimes\cdots\otimes P_{G_{n-1}}\otimes\prod_{u\in G_n}Q_u$ est une probabilité sur $\widetilde{\mathcal{E}}_n\vee\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}$, tandis que les noyaux p_uP^u sont $\widetilde{\mathcal{E}}_n$-mesurables. On en déduit que $\mathbb{P}_x[\ \ |\widetilde{\mathcal{E}}_n\vee\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}] = \prod_{u\in G_n}(p_uP^u)_{x_u}$, relation qu'on doit comprendre comme une égalité $\mathbb{P}_x$-p. s. entre les intégrales correspondantes des fonctions $\widetilde{\mathcal{F}}$-mesurables et non comme une égalité entre les noyaux (cf. les commentaires qui accompagnent le théorème A.1 de Fubini et la note[13]). Si l'on tient compte maintenant de la relation (14) et de la formule de changement de variables, on en tire que la suite d'égalités $\mathbb{P}_x$-p. s.

$$\mathbb{P}_x\left[\quad|\widetilde{\mathcal{E}}_n\vee\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}\right]\circ\Big(\bigotimes_{u\in G_n}\tilde{\theta}_u\Big)^{-1}=\prod_{u\in G_n}\left[(\delta_{x_u}\otimes(p_uP^u))\circ\tilde{\theta}_u^{-1}\right]=\prod_{u\in G_n}\mathbb{P}_{x_u}$$

est vraie au moins sur la classe des produits $\prod_{u\in G_n}g_u$ de fonctions $\widetilde{\mathcal{F}}$-mesurables, bornées et, à l'exception d'une sous-famille finie $B\subset G_n$, constantes et égales à l'unité. □

Application de transport. Dans le modèle du sous-paragraphe précédent, un individu peut être le fils réel d'un individu fictif; ce sera donc un individu fictif. Il est intéressant de préciser les conditions auxquelles l'individu u est réel. En fait, on procédera inversement: on désignera par $\widetilde{\Omega}_u$ la classe des généalogies où $u = j_1 j_2 \dots j_n$ figure comme un individu réel:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}_{j_1 j_2 \dots j_n} := \{\, \tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \mid \quad & 1 \le j_1 \le \tilde{\nu}_{\varnothing}(\tilde{\omega}), \\ & 1 \le j_2 \le \tilde{\nu}_{j_1}(\tilde{\omega}), \\ & \quad \vdots \\ & 1 \le j_n \le \tilde{\nu}_{j_1 \dots j_{n-1}}(\tilde{\omega}) \,\} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{j_1 \dots j_{n-1}}\end{aligned}$$

Par convention, $\widetilde{\Omega}_{\varnothing} = \widetilde{\Omega}$. Il est immédiat que les événements $\widetilde{\Omega}_u$ vérifient les deux propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} & u \trianglelefteq v \Rightarrow \widetilde{\Omega}_v \subset \widetilde{\Omega}_u, \quad \forall u, v \in U \\ & \widetilde{\Omega}_{u(k+1)} \subset \widetilde{\Omega}_{uk}, \quad \forall u \in U,\ k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{9}$$

Ils vérifient également la propriété de récurrence suivante:

Proposition 3.4. (Propriété de récurrence)

$$\widetilde{\Omega}_u \cap \tilde{\theta}_u^{-1}(\widetilde{\Omega}_v) = \widetilde{\Omega}_{uv}, \quad \forall u, v \in U.$$

Preuve. Soit $u = j_1 \dots j_p$ et soit $v = j_{p+1} \dots j_n$. On a les équivalences suivantes: $\tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}_u \cap \tilde{\theta}_u^{-1}(\widetilde{\Omega}_v) \Leftrightarrow \tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}_u$ et $\tilde{\theta}_u(\tilde{\omega}) \in \widetilde{\Omega}_v \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lcl} 1 \le j_1 \le \tilde{\nu}_{\varnothing}(\tilde{\omega}) & & 1 \le j_{p+1} \le \tilde{\nu}_{\varnothing} \circ \tilde{\theta}_u(\tilde{\omega}) = \tilde{\nu}_{j_1 \dots j_p}(\tilde{\omega}) \\ \quad \vdots & \text{et} & \quad \vdots \\ 1 \le j_p \le \tilde{\nu}_{j_1 \dots j_{p-1}}(\tilde{\omega}) & & 1 \le j_n \le \tilde{\nu}_{j_{p+1} \dots j_{n-1}} \circ \tilde{\theta}_u(\tilde{\omega}) = \tilde{\nu}_{j_1 \dots j_{n-1}}(\tilde{\omega}) \end{array}$$

$\Leftrightarrow \tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}_{uv}$. □

Nous construirons par la suite une application, surjective à l'exception de l'arbre vide, $\psi : \widetilde{\Omega} \to \Omega^E$ qui transportera la loi $\mathbb{P}_x$ dans une probabilité P_x sur $(\Omega^E, \mathcal{F}^E)$ qui décrira le comportement global du processus qu'on étudie. L'application ψ efface l'information redondante que contient le processus auxiliaire, découpant de l'arbre marqué $\tilde{\omega}$ la portion qui contient les individus réels.

Formellement, *l'application de transport* est définie, par ses coordonnées, comme étant l'unique application $\psi : \widetilde{\Omega} \to \Omega^E$ qui rende commutatifs les diagrammes suivants, pour tout $u \in U$:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Omega}_u \arrow[r, "\subset"] & \widetilde{\Omega} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "\tilde{\eta}_u"'] \arrow[dr, "x_u"] & & \Omega^E \arrow[d, "\eta_u^E"] \\
& E^* \times \mathbb{N} \arrow[r, two heads] & E^* \arrow[r, "\subset"] & E
\end{tikzcd} \qquad \eta_u^E \circ \psi = x_u \text{ sur } \widetilde{\Omega}_u\,;$$

$$\begin{tikzcd}
{}^c\widetilde{\Omega}_u \arrow[r, "\subset"] & \widetilde{\Omega} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\emptyset"'] & & \Omega^E \arrow[d, "\eta_u^E"] \\
& & \{\emptyset\} \arrow[r, "\subset"] & E
\end{tikzcd} \qquad \eta_u^E \circ \psi = \emptyset \;\text{ sur } {}^c\widetilde{\Omega}_u.$$

Puisque Ω^E est un sous-ensemble d'un ensemble produit, pour que la définition précédente soit correcte, il faut encore vérifier que $\psi(\tilde{\omega}) \in \Omega^E,\ \forall \tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$. C'est une conséquence immédiate des propriétés (9).

Puisque $\widetilde{\Omega}_\varnothing = \widetilde{\Omega}$, l'arbre vide n'est pas une image de ψ: $\psi^{-1}(\Omega^E_\varnothing) = \widetilde{\Omega}_\varnothing$. En revanche, tout autre élément ω de Ω^E est l'image par ψ d'un élément $\tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ construit de la façon suivante: $\tilde{\eta}_u(\tilde{\omega}) := (\eta_u^E(\omega), \nu_u^E(\omega))$ pour tout $u \in \omega^{-1}(E^*)$; $\tilde{\eta}_u(\tilde{\omega})$ prend une valeur arbitraire dans $E^* \times \mathbb{N}$, pour tout $u \notin \omega^{-1}(E^*)$.

Proposition 3.5. (Mesurabilité de ψ) *Soit $u \in U$. L'application ψ est $\widetilde{\mathcal{E}}_{uk} \vee \widetilde{\mathcal{P}}_u / \mathcal{F}^E_{uk}$-mesurable, $\forall u \in U,\ k \in \mathbb{N}^*$. Donc elle est aussi $\tilde{\mathcal{E}}_n \vee \tilde{\mathcal{P}}_{n-1}/\mathcal{F}^E_n$- ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{F}^E$-mesurable.*

Preuve. Manifestement, il suffit finalement de prouver la $\widetilde{\mathcal{E}}_{uk} \vee \widetilde{\mathcal{P}}_u/\mathcal{E}$-mesurabilité de $\eta^E_{uk} \circ \psi$, pour tout $u \in U$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$. Or l'application $\eta^E_{uk} \circ \psi$ coïncide, sur l'ensemble $\widetilde{\Omega}_{uk} \in \widetilde{\mathcal{P}}_u$, avec l'application $\widetilde{\mathcal{E}}_{uk}/\mathcal{E}$-mesurable x_{uk} et est constante sur l'ensemble complémentaire. $\square$

Proposition 3.6. (Transport des ensembles de réalisation et des progénitures) *Soit $u \in U$ quelconque.*

(i) Alors $\psi^{-1}(\Omega^E_u) = \widetilde{\Omega}_u,\ \forall u \in U$;

(ii) $\nu^E_u \circ \psi = \begin{cases} \tilde{\nu}_u & \textit{sur } \widetilde{\Omega}_u \\ 0 & \textit{sur } {}^c\widetilde{\Omega}_u \end{cases}$

En particulier, on a $\nu^E_\varnothing \circ \psi = \tilde{\nu}_\varnothing$ partout.

Preuve. La première affirmation a été montrée pour $u = \varnothing$. L'enchaînement suivant d'égalités en achève donc la preuve: $\psi^{-1}(\Omega^E_{un}) = \psi^{-1}(\eta^E_{un})^{-1}(E^*) = (\eta^E_{un} \circ \psi)^{-1}(E^*) = \widetilde{\Omega}_{un},\ \forall u \in U, n \in \mathbb{N}^*$.

Pour la deuxième relation il suffit de montrer que, $\forall n \in I\!N^*$,

$$\{\nu_u^E \circ \psi \geq n\} = \widetilde{\Omega}_u \cap \{\tilde{\nu}_u \geq n\}.$$

Or, $\{\nu_u^E \circ \psi \geq n\} = \psi^{-1}(\{\nu_u^E \geq n\}) = \psi^{-1}(\Omega_{un}^E) = \widetilde{\Omega}_{un} = \widetilde{\Omega}_u \cap \{\tilde{\nu}_u \geq n\}$. □

Proposition 3.7. (Transport des décalages) *Soit $u \in U$. L'application ψ rend commutatifs les diagrammes suivants:*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Omega}_u \arrow[r, "\subset"] & \widetilde{\Omega} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tilde{\theta}_u"'] & \Omega^E \arrow[d, "\theta_u^E"] \\
 & \widetilde{\Omega} \arrow[r, "\psi"] & \Omega^E
\end{tikzcd}
\qquad \theta_u^E \circ \psi = \psi \circ \tilde{\theta}_u \ \textit{sur} \ \widetilde{\Omega}_u\,;$$

$$\begin{tikzcd}
{}^c\widetilde{\Omega}_u \arrow[r, "\subset"] & \widetilde{\Omega} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varnothing"'] & & \Omega^E \arrow[d, "\theta_u^E"] \\
 & & \{\varnothing\} \arrow[r, "\subset"] & \Omega^E
\end{tikzcd}
\qquad \theta_u^E \circ \psi = \varnothing \qquad \textit{sur} \ {}^c\widetilde{\Omega}_u.$$

Preuve. L'afirmation sera montrée sur les coordonnées. On a la suite probante suivante d'égalités, obtenue par application successive de la proposition 3.1, de la définition de ψ, de la proposition 3.3, de la proposition 3.4 et encore une fois de la définition de ψ:

$$\eta_v^E \circ \theta_u^E \circ \psi = \eta_{uv}^E \circ \psi = \begin{cases} x_{uv} \text{ sur } \ \widetilde{\Omega}_{uv} \\ \emptyset \quad \text{ sur } {}^c\widetilde{\Omega}_{uv} \end{cases} = \begin{cases} x_v \circ \tilde{\theta}_u \text{ sur } \ \widetilde{\Omega}_u \cap \tilde{\theta}_u^{-1}(\ \widetilde{\Omega}_v) \\ \emptyset \qquad \text{ sur } {}^c\widetilde{\Omega}_u \cup \tilde{\theta}_u^{-1}({}^c\widetilde{\Omega}_v) \end{cases} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} \left. \begin{array}{ll} x_v \circ \tilde{\theta}_u & \text{sur } \tilde{\theta}_u^{-1}(\ \widetilde{\Omega}_v) \\ \emptyset & \text{sur } \tilde{\theta}_u^{-1}({}^c\widetilde{\Omega}_v) \end{array} \right\} & \text{sur } \ \widetilde{\Omega}_u & = \eta_v^E \circ \psi \circ \tilde{\theta}_u \text{ sur } \ \widetilde{\Omega}_u \\ \emptyset \qquad \text{sur} & {}^c\widetilde{\Omega}_u & = \eta_v^E\,(\varnothing) \qquad \text{sur } {}^c\widetilde{\Omega}_u \end{array} \right.$$

Lemme 3.4. (Changement de variable dans l'espérance conditionnelle) *Considérons deux applications mesurables, soit*

$$(\widetilde{\mathcal{O}}, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu) \xrightarrow{\psi} (\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} I\!R,$$

et supposons que f soit bornée.

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. On a:

$$\mu[f \circ \psi | \psi^{-1}(\mathcal{F})] = (\mu \circ \psi^{-1}[f|\mathcal{F}]) \circ \psi \quad \mu - p.s.$$

En particulier $\mu[f \circ \psi] = (\mu \circ \psi^{-1})[f]$.

Preuve. $(\mu \circ \psi^{-1})[f|\mathcal{F}]$ est $\mathcal{F}$-mesurable. Ainsi $(\mu \circ \psi^{-1}[f|\mathcal{F}]) \circ \psi$ est $\psi^{-1}(\mathcal{F})$-mesurable. Soit $A \in \psi^{-1}(\mathcal{F})$. Alors il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $A = \psi^{-1}(B)$. Pour conclure, montrons que $\mu[1\!\!I_A(f \circ \psi)] = \mu[1\!\!I_A\{(\mu \circ \psi^{-1})[f|\mathcal{F}] \circ \psi\}]$. Mais $1\!\!I_A = 1\!\!I_B \circ \psi$ et donc la relation précédente revient à montrer $(\mu \circ \psi^{-1})[1\!\!I_B f] = (\mu \circ \psi^{-1})[1\!\!I_B (\mu \circ \psi^{-1})[f|\mathcal{F}]]$. (En effet $E_\mu[f \circ \psi] = E_{\mu \circ \psi^{-1}}[f]$ car ceci est vrai pour les indicatrices: $\mu[\psi^{-1}(A)] = (\mu \circ \psi^{-1})[A]$.) Or cette dernière relation n'est que la définition de l'espérance conditionnelle. $\square$

Théorème 3.1. (de Neveu généralisé. Transfert de loi et de propriété de branchement) *Les noyaux Q et p étant fixés comme au début du paragraphe, il existe un noyau de probabilité unique P_x, à savoir $\mathbb{P}_x \circ \psi^{-1}$, entre $(E^*, \mathcal{E}^*)$ et $(\Omega^E, \mathcal{F}^E)$*

- *qui donne à la variable $\eta_\varnothing^E$ la loi δ_x et à la variable $\nu_\varnothing^E$ la loi $p(x, \ )$*
- *et qui rende les variables coordonnées $\eta_1^E, \ldots, \eta_k^E$ indépendantes et identiquement distribuées, de loi $Q(x, \ )$, sachant $\{\nu_\varnothing^E \geq k\}$,*
- *et les décalages $\theta_1^E, \ldots, \theta_k^E$ indépendants et distribués suivant les lois $P_{\eta_1^E}, \ldots, P_{\eta_k^E}$, conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}_1^E$ et sachant que $\nu_\varnothing^E \geq k$.*

Plus généralement, a lieu la propriété de branchement *suivante :*

$$P_x\left(\prod_{u \in z_n} f_u \circ \theta_u^E \,\middle|\, \mathcal{F}_n^E\right) = \prod_{u \in z_n} P_{\eta_u^E}[f_u], \quad P_x - p.\,s.,$$

où $z_n(\omega) = \omega^{-1}(E^*) \cap G_n$ est l'ensemble des individus de génération n et $\{f_u; u \in G_n\}$ est une famille quelconque de fonctions $\mathcal{F}^E$-mesurables bornées (ou positives).

Preuve. $\mathbb{P}_x \circ \psi^{-1}$ est manifestement un noyau entre $(E^*, \mathcal{E}^*)$ et $(\Omega^E, \mathcal{F}^E)$, car $\mathbb{P}_x$ est un noyau entre $(E^*, \mathcal{E}^*)$ et $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$. En effet, la mesurabilité en x de $\mathbb{P}_x \circ \psi^{-1}$ pour A fixé est équivalente à la mesurabilité en x de $\mathbb{P}_x$, pour $\psi^{-1}(A)$ fixé. On montrera que le noyau $\mathbb{P}_x \circ \psi^{-1}$ vérifie les trois propriétés de l'énoncé.

Par la proposition 3.6, $\nu_\varnothing^E \circ \psi = \tilde{\nu}_\varnothing$. Alors, compte tenant de la définition de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}_x \circ \psi^{-1}(\nu_\varnothing^E = k) = \mathbb{P}_x(\nu_\varnothing^E \circ \psi = k) = \mathbb{P}_x(\tilde{\nu}_\varnothing = k) = p_\varnothing(x, k) = p(x, k)$$

Puisque $\{\nu^E_\varnothing \circ \psi \geq k\} = \{\tilde{\nu}_\varnothing \geq k\} = \widetilde{\Omega}_k \subset \widetilde{\Omega}_{k-1} \subset \cdots \subset \widetilde{\Omega}_1$, en vertu de la définition de ψ, nous obtenons, pour $A_j \in \mathcal{E},\ j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x \circ \psi^{-1}(\eta^E_1 \in A_1, \ldots, \eta^E_k \in A_k, \nu^E_\varnothing \geq k) = \\
&\quad = \mathbb{P}_x(\eta^E_1 \circ \psi \in A_1, \ldots, \eta^E_k \circ \psi \in A_k, \nu^E_\varnothing \circ \psi \geq k) = \\
&\quad = (p_\varnothing P^\varnothing)_x(x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k, \tilde{\nu}_\varnothing \geq k) = \\
&\quad = \prod_{j=1}^{k} Q(x, A_j) \sum_{l=k}^{\infty} p(x, l),
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit la deuxième affirmation.

Si $B \subset G_n$ fini, alors l'événement $\{z_n \supset B\}$ peut se représenter comme $\bigcap_{u \in B} \Omega^E_u \in \mathcal{F}^E_n$. Avec ces notations, on a la suite suivante d'égalités $\mathbb{P}_x$-p. s. On utilise successivement le lemme 3.4, la proposition 3.7, la mesurabilité des $\widetilde{\Omega}_u$ et la proposition 3.5, le théorème 2.2 (la relation (8)), la mesurabilité des $\widetilde{\Omega}_u$, la définition de ψ et la mesurabilité des η^E_u.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x \circ \psi^{-1}\left[\prod_{u \in B} (f_u \circ \theta^E_u) 1\!\!1_{\Omega^E_u} \,\middle|\, \mathcal{F}^E_n\right] \circ \psi = \\
&\quad = \mathbb{P}_x\left[\prod_{u \in B} (f_u \circ \theta^E_u \circ \psi) 1\!\!1_{\psi^{-1}(\Omega^E_u)} \,\middle|\, \psi^{-1}(\mathcal{F}^E_n)\right] = \\
&\quad = \mathbb{P}_x\left[\prod_{u \in B} (f_u \circ \psi \circ \tilde{\theta}_u) 1\!\!1_{\widetilde{\Omega}_u} \,\middle|\, \psi^{-1}(\mathcal{F}^E_n)\right] = \\
&= \prod_{u \in B} 1\!\!1_{\widetilde{\Omega}_u} \mathbb{P}_x\left[\mathbb{P}_x\left[\prod_{u \in B} (f_u \circ \psi \circ \tilde{\theta}_u) \,\middle|\, \widetilde{\mathcal{E}}_n \vee \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}\right] \,\middle|\, \psi^{-1}(\mathcal{F}^E_n)\right] = \\
&= \prod_{u \in B} 1\!\!1_{\widetilde{\Omega}_u} \mathbb{P}_x\left[\prod_{u \in B} \mathbb{P}_{x_u}[f_u \circ \psi] \,\middle|\, \psi^{-1}(\mathcal{F}^E_n)\right] = \\
&\quad = \mathbb{P}_x\left[\prod_{u \in B} 1\!\!1_{\widetilde{\Omega}_u} \mathbb{P}_{x_u}[f_u \circ \psi] \,\middle|\, \psi^{-1}(\mathcal{F}^E_n)\right] = \\
&\quad = \mathbb{P}_x\left[\prod_{u \in B} 1\!\!1_{\widetilde{\Omega}_u} \mathbb{P}_{\eta^E_u \circ \psi}[f_u \circ \psi] \,\middle|\, \psi^{-1}(\mathcal{F}^E_n)\right] = \\
&= \prod_{u \in B} (1\!\!1_{\Omega^E_u} \circ \psi) \mathbb{P}_{\eta^E_u \circ \psi}[f_u \circ \psi] = \left(\prod_{u \in B} 1\!\!1_{\Omega^E_u} \mathbb{P}_{\eta^E_u} \circ \psi^{-1}[f_u]\right) \circ \psi
\end{aligned}$$

Mais les événements $\{z_n = B\} \in \mathcal{F}^E_n$ sont contenus dans les événements $\{z_n \supset B\}$. Par conséquent, compte tenant de la suite d'égalités précédente, on en déduit facilement la propriété de branchement:

$$P_x\left[\prod_{u\in z_n} f_u\circ\theta_u^E \;\middle|\; \mathcal{F}_n^E\right] = P_x\left[\sum_{\substack{B\subset G_n\\ B \text{ fini}}} 1\!\!1_{z_n=B}\prod_{u\in B} f_u\circ\theta_u^E \;\middle|\; \mathcal{F}_n^E\right] =$$

$$= \sum_{\substack{B\subset G_n\\ B \text{ fini}}} 1\!\!1_{z_n=B}\, P_x\left[1\!\!1_{z_n\supset B}\prod_{u\in B} f_u\circ\theta_u^E \;\middle|\; \mathcal{F}_n^E\right] =$$

$$= \sum_{\substack{B\subset G_n\\ B \text{ fini}}} 1\!\!1_{z_n=B}\, 1\!\!1_{z_n\supset B}\prod_{u\in B} P_{\eta_u^E}[f_u] = \prod_{u\in z_n} P_{\eta_u^E}[f_u], \quad P_x\text{-p. s.}$$

Pour montrer l'unicité, il suffit d'indiquer un π-système générateur de $\mathcal{F}^E$ sur lequel toutes les mesures de probabilité qui vérifient les trois conditions de l'énoncé soient identiques. Un exemple de tel système est la classe $\mathcal{A}$ qui vérifie les deux conditions suivantes et qui est minimale avec cette propriété:

1. $\mathcal{A}$ contient la famille $\eta_\varnothing^{-1}(\mathcal{E}^*)$;
2. $A_0 \in \mathcal{E}^*, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \eta_\varnothing^{-1}(A_0) \cap \bigcap_{k=1}^{n} (\theta_k^E)^{-1}(A_k) \in \mathcal{A}$.

Il est immédiat qu'une telle classe existe et est unique. En effet, elle peut être construite à partir de la sous-classe particulière qui lui est attribuée par la première condition, en l'augmentant successivement par application récursive de la deuxième condition. On obtient ainsi les classes $\mathcal{A}_0 := \eta_\varnothing^{-1}(\mathcal{E}^*)$, puis récursivement

$$\mathcal{A}_{m+1} := \left\{ A_0 \cap \bigcap_{k=1}^{n} (\theta_k^E)^{-1}(A_k) \;\middle|\; A_0 \in \mathcal{A}_0; A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_m \right\}.$$

On voit, en prenant $n := 0$, que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$ et on montre récursivement que $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{m+1}$. La classe $\mathcal{A}$ est évidemment la réunion croissante des $\mathcal{A}_m$.

Il est évident que $\mathcal{A}_0$ est un π-système. Supposons que $\mathcal{A}_m$ soit un π-système et montrons que $\mathcal{A}_{m+1}$ a la même propriété. Soient

$$A_0 \cap \bigcap_{k=1}^{n} (\theta_k^E)^{-1}(A_k) \text{ et } A_0' \cap \bigcap_{k=1}^{n'} (\theta_k^E)^{-1}(A_k')$$

deux éléments arbitraires de $\mathcal{A}_{m+1}$, avec $n \le n'$, $A_0, A_0' \in \mathcal{A}_0$ et $A_1, A_1', \dots, A_n, A_n', \dots A_{n'}' \in \mathcal{A}_m$. Par l'hypothèse de récurrence et par la propriété de $\pi-$système de $\mathcal{A}_0$, leur intersection

$$(A_0 \cap A_0') \cap \bigcap_{k=1}^{n} (\theta_k^E)^{-1}(A_k \cap A_k') \cap \bigcap_{k=n+1}^{n'} (\theta_k^E)^{-1}(A_k')$$

appartient à $\mathcal{A}_{m+1}$; en effet $A_0 \cap A_0' \in \mathcal{A}_0$ et $A_k \cap A_k' \in \mathcal{A}_m,\ k = 1, \dots, n$. On en déduit sans peine que $\mathcal{A}$ est un π-système.

On prouve, par récurrence selon $m := |u|$, que la classe $(\eta_u^E)^{-1}(\mathcal{E}^*)$ est contenue en $\mathcal{A}_m$; ainsi $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{F}^E$. En effet, c'est acquis pour $u = \varnothing$. Soit alors $u = kv$, en sorte que $(\eta_v^E)^{-1}(A) \in \mathcal{A}_{|v|}$, pour $A \in \mathcal{E}^*$. Donc

$$(\eta_u^E)^{-1}(A) = (\theta_k^E)^{-1}(\eta_v^E)^{-1}(A) =$$
$$= (\eta_\varnothing^E)^{-1}(E^*) \cap (\theta_1^E)^{-1}(E^*) \cap \cdots \cap (\theta_k^E)^{-1}(\eta_v^E)^{-1}(A) \in \mathcal{A}_{|u|}.$$

Prenons maintenant deux noyaux, P_x^1 et P_x^2, soumis l'un et l'autre aux trois contraintes de l'hypothèse du théorème. Montrons de proche en proche que $P_x^1 = P_x^2$ sur $\mathcal{A}$.

L'égalité est manifeste sur $\mathcal{A}_0$: les deux noyaux sont identiques à δ_x.

Soit

$$\begin{aligned} A^1 &:= (\eta_\varnothing^E)^{-1}(A_0) \cap (\eta_1^E)^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap (\eta_n^E)^{-1}(A_n) = \\ &= (\eta_\varnothing^E)^{-1}(A_0) \cap (\theta_1^E)^{-1}(\eta_\varnothing^E)^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap (\theta_n^E)^{-1}(\eta_\varnothing^E)^{-1}(A_n) \end{aligned}$$

l'élément générique de $\mathcal{A}_1$. Grâce aux deux premières propriétés de P_x^1 et de P_x^2, on a

$$\begin{aligned} P_x^1(A^1) &= \delta_x(A_0) P_x^1(\eta_1^E \in A_1, \dots, \eta_n^E \in A_n \mid \nu_\varnothing^E \geq n) P_x^1(\nu_\varnothing^E \geq n) = \\ &= \delta_x(A_0) Q(x, A_1) \dots Q(x, A_n) p(x, \mathbb{N}_n) \end{aligned}$$

où $\mathbb{N}_n = \{n, n+1, \dots, n+p, \dots\}$, et, de la même façon,

$$P_x^2(A^1) = \delta_x(A_0) Q(x, A_1) \dots Q(x, A_n) p(x, \mathbb{N}_n).$$

P_x^1 et P_x^2 coïncident donc sur $\mathcal{A}_1$.

Supposons maintenant qu'on ait déjà prouvé l'égalité $P_x^1 = P_x^2$ sur $\mathcal{A}_m$. Soit

$$A^{m+1} := (\eta_\varnothing^E)^{-1}(A_0) \cap (\theta_1^E)^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap (\theta_n^E)^{-1}(A_n)$$

l'élément générique de $\mathcal{A}_{m+1}$. Grâce aux trois propriétés de P_x^1 et de P_x^2, on a

$$P_x^1(A^{m+1}) = \delta_x(A_0) P_x^1[(\theta_1^E)^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap (\theta_n^E)^{-1}(A_n) \cap \{\nu_\varnothing^E \geq n\}] =$$
$$= \delta_x(A_0) P_x^1[P_x^1[(\theta_1^E)^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap (\theta_n^E)^{-1}(A_n) \cap \{\nu_\varnothing^E \geq n\} \mid \mathcal{F}_1^E]] =$$
$$= \delta_x(A_0) P_x^1[P_{\eta_1^E}^1(A_1) \dots P_{\eta_n^E}^1(A_n) \mathbb{1}\{\nu_\varnothing^E \geq n\}] =$$
$$= \delta_x(A_0) \prod_{k=1}^n (Q_x \otimes P^1)(A_k) p(x, \mathbb{N}_n)$$

et de même pour P_x^2:

$$P_x^2(A^{m+1}) = \delta_x(A_0)\prod_{k=1}^{n}(Q_x \otimes P^2)(A_k)p(x, \mathbb{N}_n).$$

Mais, puisque $A_k \in \mathcal{A}_m$, on sait que $P^1(y, A_k) = P^2(y, A_k),\ \forall y \in E^*,\ k = 1, \ldots, n$. Par conséquent $P_x^1(A^{m+1}) = P_x^2(A^{m+1}),\ x \in E^*$, autrement dit $P_x^1 = P_x^2$ sur $\mathcal{A}_{m+1}$.

Par le principe de récurrence, $P_x^1 = P_x^2$ sur $\mathcal{A}$, qui est — on vient de le prouver — un π-système générateur de $\mathcal{F}^E$. On a donc $P_x^1 = P_x^2$ sur $\mathcal{F}^E$. En d'autres termes, il n'y a qu'une seule loi de probabilité vérifiant les trois propriétés de l'énoncé du théorème. □

A. Noyaux de probabilité produits. Les diverses versions des théorèmes de Fubini et de Ionescu Tulcea assurent l'existence du noyau produit d'une famille $(P_u)_{u\in(U,\trianglelefteq)}$ de noyaux de probabilité, à condition qu'une certaine compatibilité existe entre l'ordre $\trianglelefteq$ défini sur U et les espaces de définition des noyaux. On annexe ici une exposition progressive de ces résultats: chaque théorème est une étape dans la démonstration du théorème suivant, qui l'englobe comme un cas particulier.

Le lecteur intéressé par les preuves de certains résultats seulement énoncés ici, ainsi que par maints autres détails connexes, devra consulter [1], [11], [9] ou [6].

Identifications abusives. Lorsqu'on travaille sur des espaces de probabilité produits, certaines identifications abusives d'objets isomorphes simplifient maintes considérations. Souvent, les auteurs les pratiquent presque inconsciemment. Voir [1], pour une description détaillée.

Ici on s'est permis de faire seulement le plus élémentaire de ces abus: celui d'identifier certains espaces mesurables produits. Par souci de rigueur, voici, dans les lignes suivantes, ce en quoi il consiste.

Soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement disjoint de la famille d'indices U. Il existe alors une unique application $i : E_U \to \prod_{j\in J} E_{U_j}$, de coordonnées

$$\eta_j^J \circ i = \eta_{U_j}^U, \text{ pour tout } j \in J. \tag{10}$$

L'application i est bijective. On l'appellera abusivement *identité*.

Les relations (10) montrent que i est $\mathcal{E}_U / \bigotimes_{j\in J}\mathcal{E}_{U_j}$-mesurable et entraînent les relations $\eta_u^U \circ i^{-1} = \eta_u^{U_j} \circ \eta_j^J,\ \forall u \in U_j,\ \forall j \in J$, qui expriment la

$\bigotimes_{j\in J} \mathcal{E}_{U_j}/\mathcal{E}_U$-mesurabilité de i^{-1}. Ainsi i est un isomorphisme d'espaces mesurables, qui nous permet de faire, par l'abus, les identifications suivantes:

$$(E_U, \mathcal{E}_U) = \left(\prod_{j\in J} E_{U_j}, \bigotimes_{j\in J} \mathcal{E}_{U_j} \right), \qquad \eta^U_{U_j} = \eta^J_j$$

En mots, on dira que le produit d'espaces mesurables est *associatif*.

L'application $P \mapsto P \circ i$ déduite de i est une bijection entre les classes de probabilités définies respectivement sur les deux espaces mesurables: si P est une probabilité sur $\left(\prod_{j\in J} E_{U_j}, \bigotimes_{j\in J} \mathcal{E}_{U_j} \right)$, alors $Q := P \circ i$ est une probabilité sur $(E_U, \mathcal{E}_U)$, telle que $Q(A) = P(i(A))$, $\forall A \in \mathcal{E}_U$. Ainsi i est un isomorphisme d'espaces de probabilité entre $(E_U, \mathcal{E}_U, Q)$ et $\left(\prod_{j\in J} E_{U_j}, \bigotimes_{j\in J} \mathcal{E}_{U_j}, P \right)$, qui nous permet d'écrire, abusivement, $P = Q$.

Noyaux de probabilité. Supposons qu'on étudie un processus naturel qui implique la transition d'un état x à un état y. Si la relation de causalité qui gouverne le passage de x à y est déteministe, alors la transition est bien modélisée par le concept de fonction: il y a une fonction f telle que, chaque fois qu'on observe x, y est $f(x)$. Mais, dans la plupart des phénomènes rencontrés dans la nature, il n'y a pas de déterminisme strict. La valeur de x exerce une influence sur la valeur de y, modifiant sa distribution moyenne, sans qu'une valeur déterminée de x implique, avec nécessité et certitude, une valeur déterminée de y. Ainsi, une hausse de la température peut provoquer une hausse de la quantité de précipitations, mais le niveau en dépend aussi du hasard. De même, une hausse du prix du pétrole peut provoquer une chute des ventes d'automobiles, mais non d'une manière si contraignante qu'on puisse en deviner le taux à l'avance. Dans tous ces cas de dépendance causale floue, un bon modèle est fourni par le concept suivant.

$$(E, \mathcal{E}) \xrightarrow{\quad P(x,dy) \quad} (F, \mathcal{F})$$

Figure 2: Transition modélisée par un noyau

Définition A.1. (Noyau de probabilité) *Un* noyau de probabilité *entre les espaces mesurables* $(E, \mathcal{E})$ *et* $(F, \mathcal{F})$ *est une fonction de deux variables* $P : E \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ *dont les fonctions partielles vérifient les conditions suivantes:*

1. *$A \mapsto P(x, A)$ est une probabilité sur $(F, \mathcal{F})$, pour tout $x \in E$ et*

2. *$x \mapsto P(x, A)$ est $\mathcal{E}$-mesurable, pour tout $A \in \mathcal{F}$.*[11]

Pour chaque x fixé $P(x, \,\cdot\,)$ est une probabilité; on peut considérer l'intégrale par rapport à celle-ci. La propriété *2* s'étend alors des ensembles mesurables à l'intégrale d'une fonction mesurable quelconque:

Lemme A.1. *Soit $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$-mesurable et bornée. Si P est un noyau entre $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$, alors*

1. *$x \mapsto P(x, f_x) := \int f(x, y) P(x, dy)$ est une fonction $\mathcal{E}$-mesurable et bornée.*

2. *Si, de plus, $g : E \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{E}$-mesurable et bornée, alors $P(x, g(x) f_x) = g(x) P(x, f_x)$, $\forall x \in E$.*

Preuve. Cf. Neveu [11] ou Kallenberg [9]. □

Supposons que $(E, \mathcal{E}) = (F, \mathcal{F})$. Alors l'application

$$\begin{aligned} &\delta : E \times \mathcal{E} \to [0, 1] \\ &\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

est le plus simple exemple de noyau, appelé le noyau de Dirac. Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable, $\delta_x(f) = f(x)$.

Produit fini de noyaux. Cas élémentaires. Les processus qu'on observe en nature consistent souvent de transitions multiples, qui peuvent toutes être modélisées localement par des noyaux de probabilité. Le problème se pose alors de trouver, à partir de ces noyaux, un modèle global, quantifiant l'évolution du processus entier.

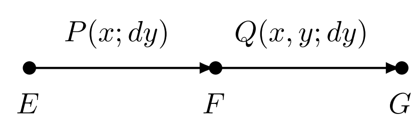

Figure 3: Double transition

Un des cas les plus simples est celui de la double transition, représenté sur la figure ci-dessus et étudié dans le théorème suivant. (Le lemme précédent sert à la démonstration du théorème.)

[11] Si *1* est vraie, pour que P soit un noyau, il suffit que *2* soit satisfaite pour A dans un π-système générateur de $\mathcal{F}$.

Théorème A.1. (Fubini; version pour noyaux) *Considérons les espaces mesurables* $(E,\mathcal{E})$, $(F,\mathcal{F})$ *et* $(G,\mathcal{G})$ *et les noyaux* P *entre* $(E,\mathcal{E})$ *et* $(F,\mathcal{F})$ *et* Q *entre*[12] $(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ *et* $(G,\mathcal{G})$.

1. *Il existe alors un unique noyau, noté* $P\otimes Q$, *de* $(E,\mathcal{E})$ *sur* $(F\times G,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$ *qui vérifie sur les pavés mesurables la relation:*

$$(P\otimes Q)(x,A\times B)=\int P(x;\,dy)\,1\!\!I_A(y)\,Q(x,y\,;\,B)$$

2. *Plus généralement, si* $f: E\times F\times G\to I\!\!R$ *est* $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$*-mesurable et bornée, son intégrale par rapport au noyau* $P\otimes Q$ *vaut:*

$$(P\otimes Q)(x,f_x):=\int P(x,\,dy)\,Q(x,y\,;\,f_{x,y}).$$

3. $(P\otimes Q)(x;A\times G)=P(x;A),\ \forall x\in E,\ \forall A\in\mathcal{F}.$

Preuve. Cf. Dellacherie, Meyer [6], Neveu [11] ou Kallenberg [9]. □

Supposons maintenant que P est une probabilité sur $(F,\mathcal{F})$, que Q est un noyau entre $(F,\mathcal{F})$ et $(G,\mathcal{G})$ et que E se réduit à un seul point. Alors P peut être regardée comme un noyau de $(E,\mathcal{E})$ à $(F,\mathcal{F})$ et Q comme un noyau de $(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ à $(G,\mathcal{G})$ et le théorème s'applique, fournissant la probabilité $P\otimes Q$ sur $(F\times G,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$.

La dernière affirmation du théorème, étendue aux fonctions, et le lemme précédent (écrit pour Q à la place de P) expriment alors le fait que Q est une version régulière de la probabilité conditionnelle $P\otimes Q[\quad|\mathcal{F}\otimes\{\varnothing,G\}]$. [13]

Les identifications abusives signalées étant assumées, il est immédiat que $\otimes$ est une opération *associative*. En effet, considérons, comme sur la figure

[12] $(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ n'est que la forme particulière que prend l'espace mesurable produit $(E_U,\mathcal{E}_U)$ lorsque U est un ensemble réduit à deux éléments. Dans la définition de $(E_U,\mathcal{E}_U)$ l'ordre sur U n'intervient pas; $(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ et $(F\times E,\mathcal{F}\otimes\mathcal{E})$ signifient donc la même chose, à condition de bien distinguer entre les coordonnées E et les coordonnées F.

[13] Plus rigoureusement, $(y,z)\mapsto\delta_y\otimes Q$, où δ_y est le noyau de Dirac sur $(F,\mathcal{F})$, est une version de la probabilité conditionnelle $(P\otimes Q)[\quad|\mathcal{F}\otimes\{\varnothing,G\}]$.

Ici l'abus consiste à identifier la probabilité conditionnelle, qui est un noyau entre $(F\times G,\mathcal{F}\otimes\{\varnothing,G\})$ et $(F\times G,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$ à Q, qui est un noyau entre $(F,\mathcal{F})$ et $(G,\mathcal{G})$. Il repose sur la possibilité d'identifier les tribus $\mathcal{F}\otimes\{\varnothing,G\}$ et $\mathcal{F}$, ainsi que sur l'identité des intégrales de fonctions $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$-mesurables par rapport aux deux noyaux: $\int f(y',z)(\delta_y\otimes Q)(dy'\otimes dz)=\int f(y,z)Q(y,dz)$ (déduite aussitôt de l'identité $(\delta_y\otimes Q)(A\times B)=1\!\!I_A(y)Q(y;B)$).

Pour la simplicité des notations, on est obligé de faire cette convention dans la formule de changement de variables ou dans la preuve de la propriété de branchement du processus auxiliaire.

ci-contre, les espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i=0}^3$ et les noyaux $(P_i)_{i=1}^3$, entre $\left(\prod_{k=0}^{i-1} E_k, \bigotimes_{k=0}^{i-1} \mathcal{E}_k\right)$ et $(E_i, \mathcal{E}_i)$ respectivement. Alors il y a deux manières distinctes de définir, à l'aide du théorème de Fubini, le produit des trois noyaux. Mais les deux produits ainsi définis, $(P_1 \otimes P_2) \otimes P_3$ et $P_1 \otimes (P_2 \otimes P_3)$, sont identiques, à un isomorphisme près[14], sur les pavés mesurables $(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$ et on note $P_1 \otimes P_2 \otimes P_3$ leur valeur commune.

$$E_0 \xrightarrow{P_1} E_1 \xrightarrow{P_2} E_2 \xrightarrow{P_3} E_3$$

Figure 4: Triple transition

Par conséquent on peut, sans ambiguïté liée aux groupements des facteurs, définir récursivement le produit fini multiple de noyaux. Considérons, comme sur la figure suivante, les espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i=0}^n$ et les noyaux

$$E_0 \xrightarrow{P_1} E_1 \xrightarrow{P_2} E_2 \xrightarrow{P_3} E_3 \xrightarrow{P_4} \cdots \xrightarrow{P_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{P_n} E_n$$

Figure 5: Transitions multiples enchaînées

$(P_i)_{i=1}^n$, entre $\left(\prod_{k=0}^{i-1} E_k, \bigotimes_{k=0}^{i-1} \mathcal{E}_k\right)$ et $(E_i, \mathcal{E}_i)$ respectivement. Alors[15]:

$$\bigotimes_{k=1}^{n} P_k = P_1 \otimes \cdots \otimes P_n := \left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} P_k\right) \otimes P_n.$$

Par convention, l'espace produit $\left(\prod_{n\in\varnothing} E_n, \bigotimes_{n\in\varnothing} \mathcal{E}_n\right)$ est un ensemble réduit à un seul élément, muni de la tribu banale qui ne contient que l'ensemble lui-même et l'ensemble vide. Sur un tel espace mesurable il y a une seule probabilité qu'on peut définir: celle qui attribue la valeur 0 à l'événement impossible et la valeur 1 à l'événement certain. Par convention $\bigotimes_{n\in\varnothing} P_n$ est cette unique probabilité.

[14] Plus rigoureusement, notons P_3' le noyau isomorphe à P_3, défini entre $(E_0 \times E_1) \times E_2$ et $\mathcal{E}_3$, et P_3'' le noyau isomorphe à P_3, défini entre $E_0 \times (E_1 \times E_2)$ et $\mathcal{E}_3$. On peut alors construire les noyaux $(P_1 \otimes P_2) \otimes P_3''$, entre E_0 et $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{E}_3$, et $P_1 \otimes (P_2 \otimes P_3')$, entre E_0 et $\mathcal{E}_1 \otimes (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$, chacun par double application du théorème de Fubini. Ils sont isomorphes avec un même noyau, qu'on désigne par $P_1 \otimes P_2 \otimes P_3$, entre E_0 et $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3$.

[15] à un isomorphisme près: on note $P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ le noyau entre E_0 et $\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n$ qui est isomorphe à $(P_1 \otimes \cdots \otimes P_{n-1}) \otimes P_n$; (si cette convention est appliquée récursivement à chaque pas, alors $(P_1 \otimes \cdots \otimes P_{n-1}) \otimes P_n$ est un noyau entre E_0 et $(\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_{n-1}) \otimes \mathcal{E}_n$!)

Considérons, comme sur la figure 6, les espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i=0}^2$ et les noyaux $(P_i)_{i=1}^2$, entre $(E_0, \mathcal{E}_0)$ et $(E_i, \mathcal{E}_i)$ respectivement. Désignons, d'une manière cohérente avec nos notations antérieures, par $\eta_0^{\{0,1\}} : E_0 \times E_1 \to E_0$ et par $\eta_0^{\{0,2\}} : E_0 \times E_2 \to E_0$ des projections canoniques sur la coordonnée 0. Soient les noyaux $\tilde{P}_1 := P_1\big(\eta_0^{\{0,2\}}(\,\cdot\,),\,\cdot\,\big)$, entre $E_0 \times E_2$ et $\mathcal{E}_1$, et $\tilde{P}_2 := P_2\big(\eta_0^{\{0,1\}}(\,\cdot\,),\,\cdot\,\big)$, entre $E_0 \times E_1$ et $\mathcal{E}_2$. Les paires de noyaux $(P_1, \tilde{P}_2)$ et $(P_2, \tilde{P}_1)$ vérifient alors les hypothèses du théorème de Fubini, qui assure l'existence des noyaux $P_1 \otimes \tilde{P}_2$ et $P_2 \otimes \tilde{P}_1$. Ceux-ci sont définis entre les mêmes espaces mesurables $(E_0, \mathcal{E}_0)$ et $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ et coïncident sur les pavés mesurables $A_1 \times A_2$, donc partout. On les désignera, indifféremment, par P_1P_2 ou P_2P_1 et on dira, abusivement, que P_1 et P_2 *commutent*.

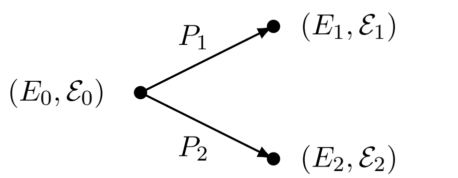

Figure 6: Transitions parallèles

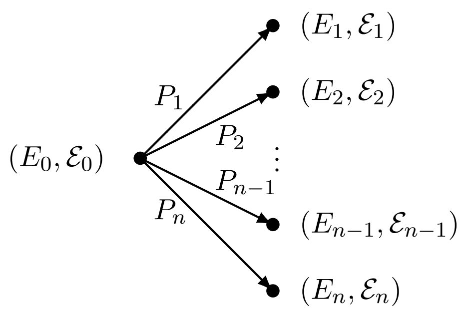

Figure 7: Transitions parallèles multiples

En appliquant récursivement cette propriété on peut définir, sans ambiguïté liée à l'ordre des facteurs, le produit commutatif fini de noyaux. Soient les espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i=0}^n$. Si $(P_i)_{i=1}^n$ est, comme sur la figure 7, une famille de noyaux, entre $(E_0, \mathcal{E}_0)$ et $(E_i, \mathcal{E}_i)$ respectivement, alors on pose[16] :

$$\prod_{k=1}^{n} P_k = P_1 \dots P_{n-1}P_n := (P_1P_2 \dots P_{n-1})P_n,$$

le produit effectué selon un ordre différent menant au même résultat.

Produit fini de noyaux. Cas général. Soit $(U, \trianglelefteq)$ un ensemble ordonné fini. Désignons par $|u| := \operatorname{card} S_u - 1$ le nombre d'éléments de U $\trianglelefteq$-strictement inférieurs à u. On note $k_0 = 0 < k_1 < \dots < k_q$ les valeurs que peut prendre $|u|$.

Soit $U^* := \{u \in U; |u| \neq 0\}$; $(U^*, \trianglelefteq)$ est lui-aussi un ensemble ordonné

[16] à un isomorphisme près: on note $P_1 \dots P_n$ le noyau entre E_0 et $\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n$ qui est isomorphe à $(P_1 \dots P_{n-1})P_n$; (si cette convention est appliquée récursivement à chaque pas, alors $(P_1 \dots P_{n-1})P_n$ est un noyau entre E_0 et $(\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_{n-1}) \otimes \mathcal{E}_n$!)

fini. Pour la simplicité des résultats, on supposera, sans vraiment restreindre la généralité, que $U^* = \{1, \ldots, n\}$.

Lemme A.2. *L'ordre $\trianglelefteq$ sur U^* peut être prolongé à un ordre total.*

Preuve. Soit $\pi : U^* \to I\!N$ une énumération de U^* qui enchaîne d'abord, dans un ordre quelconque, les éléments de U^* qui sont $\trianglelefteq$-précédés par k_1 éléments de U, puis, dans un ordre quelconque, les éléments de U^* qui sont $\trianglelefteq$-précédés par k_2 éléments de U et ainsi de suite. Puisque la fonction $u \mapsto |u|$ est strictement croissante, on a:

$$u \lhd v \;\Rightarrow\; |u| < |v| \;\Rightarrow\; \pi(u) < \pi(v).$$

Par conséquent, l'ordre total sur U^* que π définit contient $\trianglelefteq$. $\square$

Toute permutation π de $\{1, 2, \ldots, n\}$ réalise une énumération de l'ensemble U^*, en sorte qu'elle corespond à un ordre total $\leq_\pi$ sur U^*, celui défini par:

$$i \leq_\pi j \text{ équivaut à } \pi^{-1}(i) \leq \pi^{-1}(j).$$

L'application $\pi \mapsto \leq_\pi$ est une correspondence bijective entre la classe des ordres totaux et celle des permutations sur U^*, qui nous permet de regarder comme identiques les deux types d'objets.

Deux ordres totaux contenant $\trianglelefteq$ peuvent se réduire l'un à l'autre par une suite finie de transpositions d'éléments successifs et $\trianglelefteq$-incomparables. Formellement, on a le lemme suivant:

Lemme A.3. *Deux ordres totaux $\leq_\pi$ et $\leq_{\pi'}$, contenant l'un et l'autre $\trianglelefteq$, étant donnés sur U^*, il existe une suite de transpositions $\tau_{u_1+1,u_1}, \ldots, \tau_{u_p+1,u_p}$ telles que les permutations, définies récursivement par les relations:*

$$\pi_0 := \pi\,;$$
$$\pi_k := \pi_{k-1}\tau_{u_k+1,u_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

vérifient les conditions

1. *$\pi_{k-1}(u_k + 1)$ et $\pi_{k-1}(u_k)$ sont $\trianglelefteq$-incomparables ($k = \overline{1,p}$) et*
2. *$\pi' = \pi_p$.*

De plus, les ordres $\leq_{\pi_k}$ contiennent tous l'ordre $\trianglelefteq$.

Preuve. Remarquons avant tout que

(11) $$i <_\pi j \text{ et } j <_{\pi'} i \;\Rightarrow\; i \text{ et } j \text{ sont } \trianglelefteq\text{-incomparables.}$$

La démonstration se fera par récurrence finie descendante selon $h =$

$\max\{l \in \mathbb{N}^* \mid \pi(j) = \pi'(j),\ \forall j \le l\}$, avec la convention $\max \varnothing = 0$.

Si $h = n$, alors $\pi = \pi'$ et le lemme est prouvé.

Sinon posons $l := \pi(h+1)$ et $l' := \pi'(h+1) = \pi(m)$. Alors $h+1 < m$, $l <_\pi l'$ et, si j est tel que $l \le_\pi j <_\pi l'$, $l' <_{\pi'} j$. Donc l' et j sont $\trianglelefteq$-incomparables, par (11).

La suite de transpositions $\tau_{m,m-1}, \tau_{m-1,m-2}, \ldots, \tau_{h+2,h+1}$ vérifie toutes les hypothèses du théorème, la condition *2* exceptée. Si, dans la définition de h, π est remplacée par $\pi\tau_{m,m-1}\tau_{m-1,m-2}\cdots\tau_{h+2,h+1}$, on obtient un h plus grand d'au moins une unité. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Si l'ordre associé à une permutation σ contient l'ordre $\trianglelefteq$, alors $\sigma \circ \tau_{i,i+1}$ le contient également, pourvu que $\sigma(i)$ et $\sigma(i+1)$ soient $\trianglelefteq$-incomparables. Ainsi, la propriété $\trianglelefteq\, \subset \le_{\pi_k}$ sera déduite récursivement de la propriété *1.* $\square$

Soit $(E_u, \mathcal{E}_u)_{u \in (U, \trianglelefteq)}$ une famille finie d'espaces mesurables et $(P_u)_{u \in U^*}$ une famille de noyaux de probabilité, entre $(E_{S_u \setminus \{u\}}, \mathcal{E}_{S_u \setminus \{u\}})$ et $(E_u, \mathcal{E}_u)$ respectivement.

Si l'ordre $\trianglelefteq$ est total, alors le produit (associatif) de cette famille de noyaux a déjà été défini. Une réduction au cas totalement ordonné permet d'étendre cette définition au cas général. Mais, comme dans le cas commutatif, la réduction peut être faite de plusieurs façons. Il faut donc s'assurer que la définition est indépendante de la manière de linéariser l'ordre partiel. (On sait déjà qu'elle est indépendante de la façon d'associer les facteurs.)

Théorème A.2. (Produit fini de noyaux) *Soit* $\Sigma := \{\, \pi \mid \trianglelefteq\, \subset \le_\pi \,\}$ *l'ensemble non vide des permutations de* U^* *correspondant aux ordres totaux qui contiennent l'ordre partiel* $\trianglelefteq$*. Alors, quelle que soit la permutation* $\pi \in \Sigma$*, la famille*[17] $(P_{\pi(i)})_{i=1}^n$ *satisfait les conditions de définition de son produit associatif. De plus, si* π *et* $\pi' \in \Sigma$*, on a, en notation simplifiée et à un isomorphisme près:*

$$\bigotimes_{i=1}^n P_{\pi(i)} = \bigotimes_{i=1}^n P_{\pi'(i)}.$$

On note cet unique noyau, entre $(E_{U \setminus U^*}, \mathcal{E}_{U \setminus U^*})$ *et* $(E_{U^*}, \mathcal{E}_{U^*})$*, par* $\bigotimes_{u \in (U, \trianglelefteq)} P_u$*, ou encore par* $\bigotimes_{u \in U} P_u$ *s'il n'y a pas de confusion à craindre.*

[17] En notations allégées ! En notations exactes: $\Big(P_{\pi(i)}\Big(\eta^{(U \setminus U^*) \cup \{\pi(1), \ldots, \pi(i-1)\}}_{S_{\pi(i)} \setminus \{\pi(i)\}}(\,\cdot\,),\ \cdot\,\Big)\Big)_{i=1}^n$

Preuve. La première affirmation est évidente. Prenons $\pi, \pi' \in \Sigma$. Grâce au lemme précédent, on ne restreint pas la généralité si l'on suppose que

$$\pi' = \pi\tau_{i+1,i} \tag{12}$$

où $\pi(i)$ et $\pi(i+1)$ sont $\trianglelefteq$-incomparables et donc $P_{\pi(i)}$ et $P_{\pi(i+1)}$ commutent. Alors, en appliquant successivement l'associativité, (12), la commutativité et encore une fois l'associativité, on obtient:

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{k=1}^{n} P_{\pi'(k)} &= \left(\bigotimes_{k=1}^{i-1} P_{\pi'(k)}\right) \otimes \left(P_{\pi'(i)} \otimes P_{\pi'(i+1)}\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=i+2}^{n} P_{\pi'(k)}\right) = \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^{i-1} P_{\pi(k)}\right) \otimes \left(P_{\pi(i+1)} \otimes P_{\pi(i)}\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=i+2}^{n} P_{\pi(k)}\right) = \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^{i-1} P_{\pi(k)}\right) \otimes \left(P_{\pi(i)} \otimes P_{\pi(i+1)}\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=i+2}^{n} P_{\pi(k)}\right) = \\
&= \bigotimes_{k=1}^{n} P_{\pi(k)}. \square
\end{aligned}$$

Produits infinis de noyaux. Considérons, comme sur la figure voisine, une famille dénombrable d'espaces mesurables $(E_n, \mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ et une famille de noyaux de probabilité $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, entre $\left(\prod_{k=0}^{n-1} E_k, \bigotimes_{k=0}^{n-1} \mathcal{E}_k\right)$ et $(E_n, \mathcal{E}_n)$ respectivement. L'existence du noyau produit de la famille est assurée par le théorème suivant, énoncé ici sous une forme récursive:

$$E_0 \xrightarrow{P_1} E_1 \xrightarrow{P_2} E_2 \xrightarrow{P_3} \cdots \xrightarrow{P_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{P_n} E_n \xrightarrow{P_{n+1}} \cdots$$

Figure 8: Chaîne infinie de transitions

Théorème A.3. (Ionescu Tulcea ; forme récursive) *Sous les hypothèses antérieures, il existe une suite unique de noyaux* $(P^n)_{n=1}^{\infty}$, *entre* $\left(\prod_{k=0}^{n-1} E_k, \bigotimes_{k=0}^{n-1} \mathcal{E}_k\right)$ *et* $\left(\prod_{k=n}^{\infty} E_k, \bigotimes_{k=n}^{\infty} \mathcal{E}_k\right)$ *respectivement, satisfaisant à la relation de récurrence suivante:*

$$P^n = P_n \otimes P^{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

De plus, ces noyaux sont les uniques à vérifier

$$P^n\Big|_{\mathcal{E}^{[n,\infty)}_{[n,\,n+p]}} = (P_n \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_{n+p})\big(\,\cdot\,, \eta^{[n,\infty)}_{[n,\,n+p]}(\,\cdot\,)\big).$$

On en déduit aussitôt l'énoncé classique du théorème.

On utilise les notations $P^n = \bigotimes_{k \geq n} P_k = P_n \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_{n+p} \otimes \cdots$.

Preuve: [1]. L'énoncé classique est prouvé dans Ionescu Tulcea [7] et, par exemple, dans Neveu [11] ou Kallenberg [9]. □

Le théorème pécédent couvre également le cas des transitions parallèles, représenté dans la figure voisine. Supposons, en effet, que les noyaux $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ sont définis entre $(E_0, \mathcal{E}_0)$ et $(E_n, \mathcal{E}_n)$. Le théorème suivant, corollaire immédiat du théorème de Ionescu Tulcea, en fournit le produit commutatif.

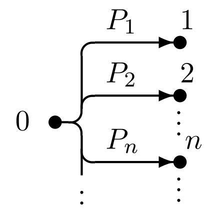

Figure 9: Infinité de transitions parallèles

Théorème A.4. (Ulam-Lomnicki ; version pour noyaux) *Il existe un noyau, noté* $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$*, entre* $(E_0, \mathcal{E}_0)$ *et* $\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k, \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k\right)$*, l'unique à vérifier:*

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} P_k\right)\left(x,\, \prod_{k=1}^{n} A_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} E_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P_k(x,\, A_k)$$

pour tout $x \in E_0$ *et tout pavé mesurable* $\prod_{k=1}^{n} A_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} E_k$ *de* $\bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k$.

Plus généralement, si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *sont des applications* $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}_k$*-mesurables et bornées, identiques à* 1 *si* $k \geq n$*, alors*

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} P_k\right)\left(x,\, \prod_{k=1}^{\infty} f_k(x,\,\cdot\,)\right) = \prod_{k=1}^{n} P_k\big(x,\, f_k(x,\,\cdot\,)\big).$$

La numérabilité de la famille de noyaux n'est pas essentielle dans ce théorème; c'est surtout là son intérêt par rapport au théorème de Ionescu Tulcea.

Preuve de l'extension au cas non dénombrable de la version pour probabilités: KALLENBERG [9]. On trouve dans [1] une preuve de la mesurabilité du noyau produit. □

La définition du noyau produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} P_i$ ne dépend pas d'un ordre fixé sur $\mathbb{N}$; on dira que *le produit de Ulam-Lomnicki est commutatif.*

Soit $(I_j)_{j \in J}$ une partition de $\mathbb{N}$. On voit, sur les pavés mesurables, que $\prod_{k=1}^{\infty} P_k = \prod_{j \in J} \left(\prod_{k \in I_j} P_j \right)$.[18] On dira que *le produit de Ulam-Lomnicki est associatif.*

Soit $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ une autre famille d'espaces mesurables et soit $\vartheta_n : \prod_{n=1}^{\infty} E_n \to F_n$ des applications $p_n^{-1}(\mathcal{E}_n)/\mathcal{F}_n$-mesurables, avec p_n les projections sur les coordonnées de l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On désignera par $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \vartheta_n$ l'unique application : $\prod_{n=1}^{\infty} E_n \to \prod_{n=1}^{\infty} F_n$, dont les projections sur les coordonnées soient respectivement les applications ϑ_n. C'est une application $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n / \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$-mesurable; elle transporte le noyau produit sur un noyau qui formellement vérifie la relation suivante:

$$(14) \qquad \left(\prod_{n=1}^{\infty} P_n \right) \circ \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(P_n \circ \vartheta_n^{-1} \right).$$

On doit toutefois comprendre cette relation non comme une égalité entre deux noyaux de probabilité, mais comme égalité des intégrales, par rapport aux deux membres, d'une fonction qui parcourt une classe assez large. Une telle classe de fonctions est par exemple donnée par les produits $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ de fonctions $\mathcal{F}_n$-mesurables, bornées et, à l'exception d'une sous-famille finie, constantes et égales à l'unité. La relation (14) signifie donc que, pour tout choix de fonctions satisfaisant les conditions précédentes, l'égalité suivante

[18] Ici $\prod_{k \in I_j} P_j$ $(j \in J)$ et $\prod_{j \in J} \big(\prod_{k \in I_j} P_j \big)$ sont, selon le cardinal de I_j $(j \in J)$ ou de J, soit des produits commutatifs finis de noyaux, soit des noyaux de Ulam-Lomnicki.

est vérifiée:

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} P_n\right) \circ \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} \vartheta_n\right)^{-1} \left[\prod_{n=1}^{\infty} f_n\right] = \\ = \prod_{n=1}^{\infty} \int (f_n \circ \vartheta_n)(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)\, dP_n(dx_n).$$

Le lemme suivant combine les théorèmes de Fubini et de Ulam-Lomnicki pour montrer l'existence du produit d'une famille de noyaux compatible par rapport à un arbre d'espaces mesurables, l'arbre étant constitué d'une collection de branches finies de même longueur, issues de la même racine et qui ne se ramifient pas (v. Fig. 10).

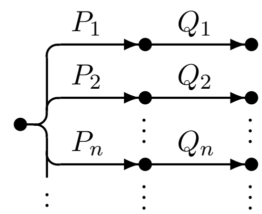

Figure 10: Arbre infini de transitions

Lemme A.4. *Considérons les espaces mesurables* $(E, \mathcal{E})$, $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ *et* $(G_n, \mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ *et les noyaux* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, *entre* $(E, \mathcal{E})$ *et* $(F_n, \mathcal{F}_n)$ *respectivement, et* $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$, *entre* $(E \times F_n, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_n)$ *et* $(G_n, \mathcal{G}_n)$ *respectivement.*

Sous ces hypothèses on a la propriété suivante:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (P_n \otimes Q_n) = \left(\prod_{n=1}^{\infty} P_n\right) \otimes \left(\prod_{n=1}^{\infty} Q_n\right).$$

Cette égalité suppose implicitement les relations suivantes:

1. *les familles* $\{P_n, Q_n\}$ $(n = \overline{1, \infty})$ *vérifient les conditions d'application du théorème A.1 de Fubini;*

2. *les familles* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *et* $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ *vérifient les conditions d'application du théorème A.4 de Ulam-Lomnicki;*

3. *la famille* $(P_n \otimes Q_n)_{n=1}^{\infty}$ *vérifie les conditions d'application du théorème de Ulam-Lomnicki;*

4. *la famille* $\left\{\prod_{n=1}^{\infty} P_n, \prod_{n=1}^{\infty} Q_n\right\}$ *vérifie les conditions d'application du théorème de Fubini.*

Preuve. Les affirmations *1* à *4* sont évidentes; (*3* et *4* exigent la preuve préalable de *1* et de *2* respectivement).

Il ne reste plus qu'à montrer l'identité entre les deux produits de noyaux de probabilité sur les pavés mesurables $\prod_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k)$, où $A_k = F_k$ et $B_k = G_k$ si $k \geq n$, pour un certain $n \in I\!N$. On appliquera successivement les théorèmes A.4 (la première affirmation), A.1, de nouveau A.4 (la deuxième, puis la première affirmation) et encore une fois A.1, pour obtenir successivement:

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{k=1}^{\infty}(P_k \otimes Q_k)\right]\left(x,\ \prod_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k)\right) = \prod_{k=1}^{n}(P_k \otimes Q_k)(x, A_k \times B_k) = \\
&\quad = \prod_{k=1}^{n} P_k\left(x, 1\!\!I_{A_k} Q_k(x, \cdot\,; B_k)\right) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} P_k\right)\left(x, \prod_{k=1}^{\infty} 1\!\!I_{A_k} Q_k(x, \cdot\,; B_k)\right) = \\
&\quad = \left(\prod_{k=1}^{\infty} P_k\right)\left[x\,,\ 1\!\!I_{\prod\limits_{k=1}^{\infty} A_k}\left(\prod_{k=1}^{\infty} Q_k\right)\left(x,\ \cdot\,; \prod_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right] = \\
&\quad = \left[\left(\prod_{k=1}^{\infty} P_k\right) \otimes \left(\prod_{k=1}^{\infty} Q_k\right)\right]\left(x\,,\ \prod_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k)\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Le lemme suivant, plus général, est pour le lemme précédent ce qu'est le théorème de Ionescu Tulcea pour celui de Fubini; il combine les théorèmes de Ionescu Tulcea et de Ulam-Lomnicki, pour prouver l'existence du produit d'une famille de noyaux, compatible par rapport à un arbre d'espaces mesurables, arbre constitué d'une collection de branches infinies issues de la même racine et qui ne se ramifient pas:

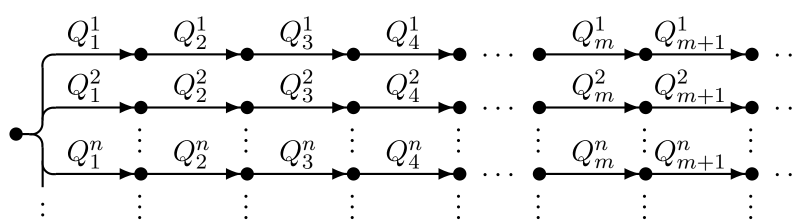

Figure 11: Arbre infini de transitions

Lemme A.5. *Considérons les espaces mesurables* $(E, \mathcal{E})$ *et* $(E_m^n, \mathcal{E}_m^n)_{m,n=\overline{1,\infty}}$ *et les noyaux de probabilité* $(Q_m^n)_{m,n=\overline{1,\infty}}$ *définis entre* $\left(E \times E_1^n \times \cdots \times E_{m-1}^n,\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}_1^n \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_{m-1}^n\right)$ *et* $(E_m^n, \mathcal{E}_m^n)$ *respectivement.*

On a alors la propriété suivante:

$$\bigotimes_{m\geq k}\prod_{n=1}^{\infty} Q_m^n = \prod_{n=1}^{\infty}\bigotimes_{m\geq k} Q_m^n, \quad k \in I\!N^*$$

Cette égalité suppose implicitement les relations suivantes:

1. *pour tout* $n = \overline{1,\infty}$ *les familles* $(Q_m^n)_{m=1}^{\infty}$ *vérifient les hypothèses du théorème de Ionescu Tulcea; on note les noyaux produits par* $Q^{n,k} := \bigotimes_{m\geq k} Q_m^n$ *(*$k = \overline{1,\infty}$*);*

2. *les familles* $(Q_m^n)_{n=1}^{\infty}$ *vérifient les hypothèses du théorème de Ulam-Lomnicki; on note les noyaux produits par* $P_m := \prod_{n=1}^{\infty} Q_m^n$ *(*$m = \overline{1,\infty}$*);*

3. *les familles* $(Q^{n,k})_{n=1}^{\infty}$ *vérifient les hypothèses du théorème de Ulam-Lomnicki; on pose* $Q^k := \prod_{n=1}^{\infty} Q^{n,k}$ *(*$k = \overline{1,\infty}$*);*

4. *la famille* $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ *vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu Tulcea; on note les noyaux produits par* $P^k := \bigotimes_{m\geq k} P_m$ *et l'égalité à démontrer s'écrit alors* $P^k = Q^k$ *(*$k = \overline{1,\infty}$*).*

Preuve. Les propriétés *1* à *4* sont évidentes.

En vertu du volet unicité du théorème de Ionescu Tulcea, pour prouver l'égalité, il suffit de montrer que les noyaux Q^k vérifient la récurrence (13), caractéristique de P^k. Or, en effet, par le lemme précédent et par le théorème de Ionescu Tulcea, on a successivement:

$$Q^k = \prod_{n=1}^{\infty} Q^{n,k} = \prod_{n=1}^{\infty} Q_k^n \otimes Q^{n,k+1} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} Q_k^n\right) \otimes \left(\prod_{n=1}^{\infty} Q^{n,k+1}\right) = \\ = P_k \otimes Q^{k+1}.\square$$

Les deux derniers lemmes servent à la démonstration de la version générale du théorème de Ionescu Tulcea (Th. 2.1). Ils peuvent être étendus, grâce à la version générale du théorème de Ulam-Lomnicki, à des arbres ayant, dans chaque génération, une infinité non dénombrable de nœuds. Correspondamment, le théorème 2.1 peut être prouvé pour U remplacé par une forêt quelconque, en particulier par une forêt non dénombrable, sans changements majeurs dans la démonstration. Consulter [1] pour tous ces développements.

Remerciements. Je souhaite exprimer ici ma gratitude envers les Professeurs Yves Le Jan, sous la direction de qui j'ai obtenu l'essentiel de ces résultats, et Teodor Precupanu, qui m'a encouragé à rédiger ce texte.

RÉFÉRENCES

1. BOTEZAT, P.S. – *File d'attente et généalogies d'un processus de branchement*, Thèse de $3^{\text{ème}}$ cycle, 2002, Université de Paris XI, Orsay.
2. BOURBAKI, N. – *Eléments de mathématique, Théorie des ensembles*, 1970, Nouveau tirage : 1977, CCLS, Paris.
3. CHAUVIN, B. – *Arbres et processus de Bellman-Harris*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 22, n. 2, 1986, pp. 209-232.
4. CHAUVIN, B. – *Sur la propriété de Branchement*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 22, n. 2, 1986, pp. 233-236.
5. CHAUVIN, B. – *Products Martingales and Stopping Lines for Branching Brownian Motion*, The Annals of Prob., 1991, Vol. 19, n. 3, pp. 1195-1205.
6. DELLACHERIE, C.; MEYER, P.A.. – *Probabilités et potentiel*, vol. I, Hermann, Paris, 1975.
7. IONESCU TULCEA, C.T. – *Mesures dans les espaces produits*, Atti Acad. Naz. Lincei, Rend. 7, 1950, pp. 208-211.
8. JAGERS, P. – *General Branching Processes as Markov Fields*, Stoch. Proc. and their Appl., 32(1989), pp. 183-212, North Holland.
9. KALLENBERG, O. – *Foundations of Modern Probability*, Springer Verlag, New York, 1997
10. NEVEU, J. – *Arbres et processus de Galton-Watson*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 22, nr. 2, 1986, pp. 199-207.
11. NEVEU, J. – *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*, Holden-Day, San Francisco, 1965.

Received: 15.III.2004

Faculty of Mathematics,
University "Al.I. Cuza",
Bd. Carol I, nr. 11,
Iassy
ROMÂNIA