COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. V. BARBU, Prof. I. CREANGĂ, Prof. GH. GHEORGHIEV,
Prof. A. HAIMOVICI, Prof. D. IEȘAN, Prof. C. IGNAT,
Prof. R. MIRON, Conf. T. PRECUPANU
Prof. A. HAIMOVICI — *Redactor responsabil*
Prof. D. IEȘAN — *Secretar de redacție*
V. DUMISTRĂCEL — *Tehnoredactor*

ANALELE ȘTIINȚIFICE ALE UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA" DIN IAȘI
Tomul XXX, s.I a. Matematică, 1984—3

SUR LES ESPACES (S, T)-MÉTRIQUES ALÉATOIRES

PAR

T. BÎRSAN

1. La théorie des espaces métriques aléatoires a pour point de départ le travail de K. Menger [7]. Des contributions importantes dans le développement de cette théorie ont été apportées par B. Schweizer et A. Sklar [8]. Il y a une vaste littérature concernant ce sujet. M. J. Frank [5] a étudié les espaces topologiques aléatoires. A. Istrăţescu [6] a introduit les espaces métriques aléatoires non-archimédiens.

Dans [2, 3], on indique des conditions suffisantes de compatibilité entre une structure d'espace topologique aléatoire et une autre d'espace métrique afin qu'ils engendrent un espace métrique aléatoire.

Cette Note continue l'étude entreprise par nous [2, 3] dans un cadre plus général, celui des espaces (S, T)-métriques aléatoires. Les espaces métriques aléatoires non-archimédiens jouissent d'une attention à part.

On désigne par X un ensemble quelconque, I l'intervalle $[0, 1]$, R_+ l'ensemble des nombres réels $\geqslant 0$ et $\bar{R}_+$ l'ensemble $R_+ \cup \{+\infty\}$. On appelle *t-fonction* (c-à-d, fonction triangulaire) une application de type $S : R_+ \times \times R_+ \to R_+$.

Définition 1 [4]. *On dit que l'application $d : X \times X \to R_+$ est une métrique sur X relativement à la t-fonction S (brièvement, d est une S-métrique) si elle satisfait aux conditions suivantes :*

1) $d(p, p)=0$, *pour tout* $p \in X$;
2) $d(p, q)=0 \Rightarrow p=q$;
3) $d(p, q)=d(q, p)$, *pour tous* $p, q \in X$;
4) $d(p, r) \leqslant S(d(p, q), d(q, r))$, *pour tous* $p, q, r \in X$, $p \neq q \neq r \neq p$. *Le triplet* (X, d, S) *est appelé espace S-métrique.*

Si $S((x, y)=x+y$, alors la S-métrique d est une métrique habituelle sur X ; si $S(x, y)=\mathrm{Max}\ (x, y)$, d est une métrique non-archimédienne sur X.

De plus, (X, d, S) est un espace *S-quasi-pseudo-métrique* (brièvement, *S-q-p-métrique*) si d satisfait seulement aux conditions 1) et 4) ; il est un espace *S-q-métrique* ou *S-p-métrique* selon que d satisfait aux conditions 1), 2) et 4) ou 1), 3) et 4). Quand d prend pour valeur $+\infty$, on considère, automatiquement, que la t-fonction est de type $S : \bar{R}_+ \times \bar{R}_+ \to \bar{R}_+$.

Soient Δ l'ensemble de toutes les fonctions de répartition qui ent une valeur nulle à l'origine et H la fonction définie par $H(x)=0$ si $x \leqslant 0$ et $H(x)=1$ si $x>0$. Une *t-norme* est une fonction $T : I \times I \to I$ associative,

commutative, croissante et vérifiant la condition $T(a, 1)=a$, pour tout $a \in I$.

Définition 2. *On dit que le triplet (X, F, S) est un espace S-métrique aléatoire si l'application $F: X \times X \to \Delta$ satisfait aux conditions suivantes :*

1°. $F_{pp}=H$, *pour tout* $p \in X$,

2°. $F_{pq}=H \Rightarrow p=q$,

3°. $F_{pq}=F_{qp}$, *pour tous* $p, q \in X$,

4°. $F_{pq}(x)=1$ *et* $F_{qr}(y)=1 \Rightarrow F_{pr}(S(x, y))=1$

(ou $F_{pq}=F(p, q)$). Le quadrouple (X, F, S, T) est un espace (S, T)-métrique aléatoire de type Menger si, au lieu de 4°, on impose l'inégalité triangulaire suivante :

5°. $F_{pr}(S(x, y)) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$, *pour tous* $p, q, r \in X$, $x, y \geqslant 0$.

Lorsque $S(x, y)=x+y$, on utilise la notation habituelle (X, F) (ou (X, F, T)) pour l'espace métrique aléatoire (de type Menger). D'une manière évidente on définit les espaces *S-q-p-métriques aléatoires* (c-à-d, S-quasi-pseudo-métriques aléatoires) ou ceux *(S, T)-q-p-métriques aléatoires de type Menger*. On conserve les notations de [8] et [2] pour les noti- de (ε, λ)-voisinage, de distance aléatoire d'un point à un ensemble et de (ε, λ)-sphère aléatoire. Les Prop. 2 et 5 de [2], qui donnent les propriétés élémentaires des distances et sphères aléatoires,restent valables pour les espaces S-q-p-métriques aléatoires, car leurs démonstrations n'utilisent pas „l'inégalité triangulaire" 4°.

Définition 3 [5, 2]. *Un espace topologique aléatoire est un couple (X, θ), où θ est une application de $\mathcal{P}(X) \times I$ dans $\mathcal{P}(X)$ qui satisfait aux conditions suivantes (on fait les conventions : $A^\lambda=\theta(A, \lambda)$ et $p^\lambda=\{p\}^\lambda$) :*

C1. $A^0=X$, *C2.* $\varnothing^\lambda=\varnothing$, *pour tous* $\lambda \in (0, 1]$, *C3.* $A \subset A^\lambda$,

C4. $(A \cup B)^\lambda=A^\lambda \cup B^\lambda$, *C5.* $A^\lambda \subset A^\mu$ *si* $\lambda \geqslant \mu$,

T. $q \in p^1$ *et* $r \in q^1 \Rightarrow r \in p^1$, *LC.* $A^\lambda=\bigcap_{\mu<\lambda} A^\mu$, *pour tout* $\lambda \in (0, 1]$.

Un espace topologique aléatoire de type Menger est un triplet (X, θ, T), ou (X, θ) est un espace topologique aléatoire et T est une t-norme par rapport à laquelle „l'inégalité triangulaire".

$$q \in p^\lambda \text{ et } r \in q^\mu \Rightarrow r \in p^{T(\lambda, \mu)} \tag{1}$$

est vérifiée quels que soient $\lambda, \mu \in [0,1]$.

Proposition 1. *Soit (X, F, S) un espace S-q-p-métrique aléatoire dont la t-fonction S vérifie la condition*

$$\lim_{x \to 0} S(x, x)=0. \tag{2}$$

Si θ est l'application définie par

$$A^\lambda=\begin{cases} \bigcap_{\varepsilon>0} \bar{S}(A, \varepsilon, 1-\lambda), & A \neq \varnothing \text{ et } \lambda \in [0, 1], \\ \varnothing, & A=\varnothing \text{ et } \lambda \in (0, 1], \\ X, & A=\varnothing \text{ et } \lambda=0, \end{cases} \tag{θ}$$

alors (X, θ) est un espace topologique aléatoire. De plus, si (X, F, S, T) est un espace (S, T)-q-p-métrique aléatoire de type Menger, alors (X, θ) est un espace topologique aléatoire de type Menger.

Démonstration. Les conditions *C1—C5* et *LC* se vérifient sans aucune différence comme dans la Prop. 7 de [2]. Pour vérifier les „inégalités triangulaires" T et (1), on utilise la condition (2). Nous nous bornons à la vérification de (1). Supposons que $q^\lambda \in p$ et $r \in q^\mu$. Soient $\varepsilon>0$ arbitraire et $x>0$ tel que $S(x, x)<\varepsilon$. Alors, grâce à la définition de l'application θ, on a :

$$q \in p^\lambda \text{ et } r \in q^\mu \Rightarrow q \in \bar{S}(p, x, 1-\lambda) \text{ et } r \in \bar{S}(q, x, 1-\mu) \Rightarrow F_{pq}(x) \geqslant \lambda \text{ et } F_{qr}(x) \geqslant \mu.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon>0$, on obtient $F_{pr}(\varepsilon) \geqslant F_{pr}(S(x, x)) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(x)) \geqslant T(\lambda, \mu)$. Donc $r \in \bar{S}(p, \varepsilon, T(\lambda, \mu))$, pour tout $\varepsilon>0$, *c-à-d.* $r \in p^{T(\lambda, \mu)}$. La démonstration est achevée.

On peut renforcer "l'inégalité triangulaire" (1) en ajoutant des conditions supplémentaires aux hypothèses de la Prop. 1.

Proposition 2. *Soit (X, F, S, T) un espace (S, T)-q-p-métrique aléatoire dont la t-fonction S vérifie la condition (2). Alors,*

a) *si T est continue à gauche par rapport à chaque variable, on a*

$$(p^\lambda)^\mu \subset p^{T(\lambda, \mu)}, \text{ pour tous } p \in X \text{ et } \lambda, \mu \in [0,1], \tag{3}$$

b) *si T est une t-norme continue à gauche, on a*

$$(A^\lambda)^\mu \subset A^{T(\lambda, \mu)}, \text{ pour tous } A \subset X \text{ et } \lambda, \mu \in [0,1]. \tag{4}$$

Démonstration. Grâce à la condition (2), on peut suivre pas à pas la démonstration de la Prop. 8 [2] (à qui se réduit pour $S(x, y)=x+y$).

Proposition 3. *Soit (X, F, S) un espace S-q-p-métrique aléatoire dont la t-fonction S est continue à droite et croissante par rapport à chaque variable. Si $d: X \times X \to \bar{R}_+$ est l'application définie par*

$$d(p, q)=\inf \{x ; F_{pq}(x)=1\} \tag{d}$$

($d(p, q)=+\infty$, si $\{x ; F_{pq}(x)=1\}=\varnothing$), alors (X, d, S) est S-q-p-métrique. Si (X, F, S) est un espace S-métrique aléatoire, alors (X, d, S) est S-métrique.

Démonstration. Évidemment, $d(p, p)=0$. D'autre part, grâce aux hypothèses relatives à S, on a

$$S(d(p, q), d(q, r))=S(\inf \{x ; F_{pq}(x)=1\}, \inf \{y ; F_{qr}(y)=1\})=$$
$$=\inf \{S(x, y) ; F_{pq}(x)=1, F_{qr}(y)=1\}.$$

En vertu de „l'inégalité triangulaire" 4°, Déf. 2, on obtient

$$S(d(p, q), d(q, r)) \geqslant \inf \{z ; F_{pr}(z)=1\}=d(p, r).$$

Par suite, d est une S-q-p-métrique sur X. La dernière affirmation de l'énoncé est évidente.

Remarque. Étant donné un espace (X, F, S) S-q-p-métrique aléatoire, on considère que les structures définies par les relations (θ) et (d) sont les structures naturelles induites par cet espace.

Lorsque la t-fonction $S: R_+ \times R_+ \to R_+$ est stricte, c-à-d, elle est une opération associative sur R_+, continue et strictement croissante par rapport à chaque variable, on peut réduire un espace S-métrique aléatoire (X, F, S) à un espace (X, F'). Parmi les t-fonctions strictes se trouvent : $S_1(x, y)=xy$, $S_2(x, y)=x+y+xy$, $S_3(x, y)=(x^k+y^k)^{(1/k)}$ $(k>0)$ etc. Donnons, d'abord, l'énoncé d'un théorème de J. Aczél sur la représentation des demi-groupes continus.

Théorème [1]. *Soit $S: R_+ \times R_+ \to R_+$ une t-fonction stricte. Il y a une générateur de cette t-fonction, c-à-d une fonction f définie, continue et strictement monotone sur R_+ telle que S a la représentation suivante*

$$S(x, y)=f^{-1}(f(x)+f(y)), \quad x, y \in R_+, \tag{5}$$

ou f^{-1} est la fonction inverse de f.

Proposition 4. *Soit (X, F, S) un espace S-métrique aléatoire dont la t-fonction S est stricte, vérifie la condition à la limite*

$$S(x, 0)=S(0, x)=x, \quad x \in R_+, \tag{6}$$

et a la représentation (5). Soit $F': X \times X \to \Delta$ définie par

$$F'_{pq}=F_{pq} \circ f^{-1}. \tag{7}$$

Alors, (X, F') est un espace métrique aléatoire qui induit le même espace topologique aléatoire comme l'espace donné et une métrique d' sur X donnée par la relation $d'=f \circ d$. De plus, si (X, F, S, T) est S-métrique aléatoire de type Menger, alors (X, F') est métrique aléatoire de type Menger.

Démonstration. D'abord, on observe que

$$f(0)=0; \tag{8}$$

(en effet, grâce aux relations (6) et (5), on obtient que $f(x)=f(S(x, 0))=f(x)+f(0)$ et, donc, $f(0)=0$). L'application F' introduite par (7) vérifie d'une manière évidente les conditions 1°—3° de la Déf. 2. D'autre part on a

$$F'_{pq}(x)=1, \ F'_{qr}(y)=1 \Rightarrow F_{pq}(f^{-1}(x))=1, F_{qr}(f^{-1}(y))=1 \Rightarrow F_{pr}(S(f^{-1}(x), f^{-1}(y)))=1 \Rightarrow F'_{pr}(x+y)=1,$$

et, donc, (X, F') est un espace métrique aléatoire.

Il est facile de voir que $\overline{S}_{F'}(A, \varepsilon, \lambda)=\overline{S}_F(A, f^{-1}(\varepsilon), \lambda)$, pour tous $\varepsilon>0$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, grâce aux propriétés de f et aux relations (8) et (8), on déduit immédiatement que les espaces topologiques aléatoires induits par (X, F, S) et (X, F') coincident.

La relation $d'=f \circ d$ se vérifie par un calcul direct :

$$d'(p, q)=\inf \{x; F'_{pq}(x)=1\}=\inf \{x; F_{pq}(f^{-1}(x))=1\}=$$
$$=\inf. \{f(t); F_{pq}(t)=1\}=f(\inf \{t; F_{pq}(t)=1\})=f \circ d(p, q).$$

Enfin, supposons que (X, F, S, T) est un espace S-métrique aléatoire de type Menger. Alors, en vertu de (5), on a

$$F'_{pr}(x+y)=F_{pr}(f^{-1}(x+y))=F_{pr}(S(f^{-1}(x), f^{-1}(y))) \geqslant$$
$$\geqslant T(F_{pq}(f^{-1}(x)), F_{qr}(f^{-1}(y)))=T(F'_{pq}(x), F'_{qr}(y))$$

et, par conséquent, (X, F', T) est métrique aléatoire de type Menger.

Remarque. Dans la Prop. 4, nous avons sous-entendu que f est strictement croissante. Si f est strictement décroissante, on doit remplacer (7) par $F'_{pq}(x)=F_{pq} \circ f^{-1}(-x)$, $x>0$, et considérer $d'=-f \circ d$ dans son énoncé.

Lorsque la t-fonction $S(x, y)=x+y$ qui intervient dans les Th. 1—5 de [2] est remplacée par une t-fonction quelconque S *strictement croissante par rapport à chaque variable*, on obtient des résultats toujours valables. Grâce à ces théorèmes, nous possédons des conditions suffisantes pour qu'un espace topologique aléatoire (de type Menger) et un autre S-q-p-métrique engendrent un espace S-q-p-métrique aléatoire (respectivement, (S, T)-q-p-métrique aléatoire de type Menger).

2. Espaces métriques aléatoires non-archimédiens. La t-fonction $S(x, y)=\mathrm{Max}\,(x, y)$ n'est pas strictement croissante par rapport à chaque variable, mais elle satisfait aux conditions suivantes :

(i) S est croissante ($x \leqslant a$ et $y \leqslant b$ entraînent $S(x, y) \leqslant S(a, b)$) ;

(ii) S est strictement croissante ($x<a$ et $y<b$ entraînent $S(x, y)<S(a, b)$) ;

(iii) $S(x, x) \leqslant x$, quel que soit $x \in R_+$;

(iv) $S(x, 0)=S(0, x)=x$, quel que soit $x \in R_+$.

Remarques. 1) (i) et (iii) $\Rightarrow S \leqslant \mathrm{Max}$ (car $S(x, y) \leqslant S(\mathrm{Max}\,(x, y), \mathrm{Max}\,(x, y)) \leqslant \mathrm{Max}\,(x, y)$).

2) (i) et (iv) $\Rightarrow S \geqslant \mathrm{Max}$ (car $S(x, y) \geqslant S(x, 0)=x$ et $S(x, y) \geqslant S(0, y)=y$).

3) (i), (iii), (iv) $\Leftrightarrow S=\mathrm{Max}$.

4) (i), (iii), (iv) $\Rightarrow$ (ii).

On sait que dans un espace métrique non-archimédien (X, d, Max) les sphères ouvertes $S_d(p, \varepsilon)$ et $S_d(A, \varepsilon)$ sont des ensembles à la fois ouverts et fermés, pour tous $p \in X$, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, $\varepsilon>0$. Ce résultat est généralisé par le

Lemme. *Soit (X, d, S) un espace S-p-métrique dont la t-fonction S satisfait aux conditions (ii) et (iii). Alors, on a :*

1) *$S_d(q, \varepsilon)=S_d(p, \varepsilon)$, pour tout $q \in S_d(p, \varepsilon)$;*

2) *$\varepsilon \leqslant \eta$ et $S_d(p, \varepsilon) \cap S_d(q, \eta) \neq \varnothing$ impliquent $S_d(p, \varepsilon) \subset S_d(q, \eta)$;*

3) *$S_d(p, \varepsilon)$ et $S_d(A, \varepsilon)$ sont à la fois ouvertes et fermées pour tous $p \in X$, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$ et $\varepsilon>0$.*

Nous allons nous occuper avec la génération d'un espace S-métrique aléatoire ou (S, T)-métrique aléatoire de type Menger dans ce cas non-archimédien. Pour les considérations qui suivent, il suffit que la t-fonction S ait les propriétés (i)—(iii). En particulier, S peut être Max ou Min.

Soient (X, θ) un espace topologique aléatoire et (X, d, S) un espace S-q-p-métrique. Parce que $(S_d(p, \varepsilon))^1$ peut être interprété comme l'ensemble des points qui appartiennent presque certainement à l'ensemble $\overline{S_d(p, \varepsilon)}$, il est raisonnable de considérer que $\overline{S_d(p, \varepsilon)} \subset (S_d(p, \varepsilon))^1 \subset \overline{S}_d(p, \varepsilon)$ [2]. Grâce au Lemme, cette condition deviennent $S_d(p, \varepsilon) \subset (S_d(p, \varepsilon))^1 \subset \overline{S}_d(p, \varepsilon)$. Ainsi, dans le cadre non-archimédien du problème,

la condition de compatibilité $(S_d(p, \varepsilon))^1 = S_d(p, \varepsilon)$ utilisée ci-dessous apparait comme une condition extrême.

Théorème 1. *Soient $(X, 0)$ un espace topologique aléatoire et (X, d, S) un espace S-q-p-métrique dont la t-fonction S vérifie les conditions (i)—(iii). Supposons que les conditions de compatibilité suivantes sont vérifiées :*

$$(I) \qquad (S_d(p, \varepsilon))^1 = S_d(p, \varepsilon),$$

$$(II) \qquad (S_d(p, \varepsilon))^\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} \bigcup_{\eta<\varepsilon} (S_d(p, \eta))^\mu,$$

pour tous $p \in S$, $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in (0, 1]$. Si on définit $F : X \times X \to \Delta$ par

$$(F) \qquad F_{pq}(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leqslant 0, \\ \sup \{\lambda \,;\, q \in (S_d(p, \varepsilon))^\lambda\}, & \varepsilon > 0, \end{cases}$$

alors (X, F, S) est un espace S-q-p-métrique aléatoire ayant les propriétés :

a) $\bar{N}_p(\varepsilon, 1-\lambda) = (S_d(p, \varepsilon))^\lambda$,

b) *la S-q-p-métrique induite coïncide avec d.*

Démonstration. On établit directement que $F_{pq} \in \Delta$ en utilisant les relations (F), $C3$, et (II) (voir et Th. 1 [2]). Pour démontrer l'égalité

$$(9) \qquad (S_d(p, \varepsilon))^\lambda = \{q \,;\, F_{pq}(\varepsilon) \geqslant \lambda\},$$

ou la relation suivante, équivalente avec elle,

$$(10) \qquad q \in (S_d(p, \varepsilon))^\lambda \Leftrightarrow F_{pq}(\varepsilon) \geqslant \lambda,$$

on utilise (F), $C5$, LC (voir aussi Th. 1 [2]).

Il est évident que $F_{pp} = H$ pour tout $p \in X$. D'autre part, grâce à (10), (I) et (ii), on a :

$$F_{pq}(\varepsilon) = 1, \ F_{qr}(\eta) = 1 \Rightarrow q \in (S_d(p, \varepsilon))^1, \ r \in (S_d(q, \eta))^1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q \in S_d(p, \varepsilon), \ r \in S_d(q, \eta) \Rightarrow r \in S_d(p, S(\varepsilon, \eta)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r \in (S_d(p, S(\varepsilon, \eta))^1 \Rightarrow F_{pr}(S(\varepsilon, \eta)) = 1.$$

Par conséquent, l'espace (X, F, S) est S-q-p-métrique aléatoire.

L'égalité (9) n'est autre chose que la relation a). Enfin, b) résulte de la manière suivante :

$$\{\varepsilon \,;\, F_{pq}(\varepsilon) = 1\} = \{\varepsilon \,;\, q \in (S_d(p, \varepsilon))^1\} = \{\varepsilon \,;\, q \in S_d(p, \varepsilon)\} = \{\varepsilon \,;\, d(p, q) < \varepsilon\},$$

d'où, $\inf \{\varepsilon \,;\, F_{pq}(\varepsilon) = 1\} = d(p, q)$. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarques. 1) Pour démontrer le théorème précédent on a eu besoin seulement de (ii). Mais, pour avoir une justification pour la condition de compatibilité (I), nous avons imposé à S les trois conditions (i) — (iii). 2) On dit que l'espace (X, F, S) construit dans le Th. 1 grâce à la relation (F) est engendré par les espaces $(X, 0)$ et (X, d, S).

Théorème 2. *Soient $(X, 0, T)$ un espace topologique aléatoire de type Menger vérifiant „l'inégalité triangulaire" (4) et (X, d, S) un espace S-q-p-métrique dont la t-fonction S vérifie les conditions (i)—(iii). Supposons que les conditions de compatibilité (II) et*

$$(I') \qquad (S_d(p, \varepsilon))^\lambda = S_d(p^\lambda, \varepsilon), \ p \in X, \ \varepsilon > 0, \ \lambda \in [0, 1],$$

sont vérifiées. Alors, l'espace (X, F, S, T), ou l'application F est définie par (F), est (S, T)-q-p-métrique aléatoire de type Menger ayant les propriétés a) et b) du Th. 1.

Démonstration. Tenant compte du Th. 1, il nous reste à démontrer seulement l'inégalité triangulaire 5°, Déf. 2. D'abord, on démontre que

$$(11) \qquad [S_d((S_d(p, \varepsilon))^\lambda, \eta)]^\mu \subset [S_d(p, S(\varepsilon, \eta))]^{T(\lambda, \mu)},$$

quels que soient $p \in X$, $\varepsilon, \eta > 0$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$. En effet, utilisant nos hypothèses dans l'ordre : (I'), (ii), (I'), (4), on a :

$$[S_d((S_d(p, \varepsilon))^\lambda, \eta)]^\mu \subset [S_d(S_d(p^\lambda, \varepsilon), \eta)]^\mu \subset [S_d(p^\lambda, S(\varepsilon, \eta))]^\mu \subset$$
$$\subset [(S_d(p, S(\varepsilon, \eta)))^\lambda]^\mu \subset [S_d(p, S(\varepsilon, \eta))]^{T(\lambda, \mu)}$$

Alors, l'inclusion (11) entraîne l'implication

$$(12) \qquad q \in (S_d(p, \varepsilon))^\lambda, \ r \in (S_d(q, \eta))^\mu \Rightarrow r \in [S_d(p, S(\varepsilon, \eta))]^{T(\lambda, \mu)}$$

ou, grâce à (10),

$$(13) \qquad F_{pq}(\varepsilon) \geqslant \lambda, \ F_{qr}(\eta) \geqslant \mu \Rightarrow F_{pr}(S(\varepsilon, \eta)) \geqslant (\lambda, \mu).$$

Parce que le premier membre de cette implication est vérifié pour $\lambda = F_{pq}(\varepsilon)$ et $\mu = F_{qr}(\eta)$, alors, le deuxième membre est aussi vérifié pour ces valeurs de λ et μ, et, par suite, on obtient l'inégalité triangulaire de type Menger désirée.

Théorème 3. *Soient $(X, 0, T)$ un espace topologique aléatoire de type Menger qui satisfait à „l'inégalité triangulaire" (3) et (X, d, S) un espace de même sorte comme dans le $T_{h_0 2}$. Si les conditions de compatibilité (II) et*

$$(I'') \qquad (S_d(A, \varepsilon))^\lambda = S_d(A^\lambda, \varepsilon), \ \varnothing \neq A \subset S, \ \varepsilon > 0, \ \lambda \in [0, 1],$$

sont satisfaites, alors les con}lusions du Th. 2 restent valables.

Démonstration. L'inclusion (11) est aussi vraie dans les hypothèses de ce théorème, car

$$[S_d((S_d(p, \varepsilon))^\lambda, \eta)]^\mu \subset [S_d(S_d(p^\lambda, \varepsilon), \eta)]^\mu \subset [S_d(p^\lambda, S(\varepsilon, \eta))]^\mu \subset$$
$$\subset S_d((p^\lambda)^\mu, S(\varepsilon, \eta)) \subset S_d(p^{T(\lambda, \mu)}, S(\varepsilon, \eta)) \subset [S_d(p, S(\varepsilon, \eta))]^{T(\lambda, \mu)}.$$

On achève la démonstration en continuant comme dans le Th. 2.

Naturellement, il faut ajouter des conditions supplémentaire pour que l'espace (X, F, S) engendré par les espaces $(X, 0)$ et (X, d, S) soit S-q-métrique aléatoire ou S-p-métrique aléatoire ou bien S-métrique aléatoire. Le Th. 3 de [3] reste valable dans notre cadre.

Théorème 4. *Soient (X, F, S) l'espace engendré par les espaces $(X, 0)$ et (X, d, S) (on suppose que les hypothèses du Th. 1 sont vérifiées). Alors, on a :*

1) *(X, F, S) est S-q-métrique aléatoire si et seulement si (X, d, S) est S-q-métrique ;*

2) (X, F, S) *est S-p-métrique aléatoire si et seulement si la condition*

$$q \in (S_d(p, \varepsilon))^\lambda \Rightarrow p \in (S_d(q, \varepsilon))^\lambda \tag{12}$$

est satisfaite pour tous $p \in X$, $\varepsilon > 0$ *et* $\lambda \in [0,1]$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Aczél, J. — *Sur les opérations définies pour nombres réels*, Bull. Soc. Math. France, 76 (1948), 59—64
2. Bîrsan, T. — *Generation of the probabilistic quasi-pseudo-metric spaces*, An. şt. Univ. Iaşi, s. I Matematică, 28 (1982), 35—44
3. Bîrsan, T. — *Generation of the probabilistic quasi-pseudo-metric spaces (II)*, An. şt Univ. Iaşi, Supliment 28 (1982), 11—21
4. Bîrsan T. — *Une application d'un théorème de J. Aczél*, Publ. Math. Debrecen, 31 (1984)
5. Frank, M. J. — *Probabilistic topological spaces*, J. Math. Anal. Appl., 34 (1971), 67—81
6. Istrăţescu, A. — *On a generalization of probabilistic metric spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R., 15(63) (1971), 341—350
7. Menger, K. — *Statistical metrics*, Proc. Nat. Acad. of Sci., U.S.A., 28 (1942), 535—537
8. Schweizer, B., Sklar, A. — *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math., 10 (1960), 314—334

Received 14.III. 1983

Institut Polytechnique de Jassy
Département de Mathématiques
6600 — Iaşi, Roumanie

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII „AL. I. CUZA" DIN IAŞI
Tomul XXX, s. I a. Matematică, 1984—3

CHARACTERIZATION OF H-CLOSED EXTENSIONS

BY

IULIAN HAIMOVICI

0. Preliminaries. As one knows, a profitable method of approaching topological extensions is by using the complete description with the filter trace of all possible extensions of a given space. Our main purpose is to establish a theorem of the same kind for the identifications of H-closed extensions only. Before that, we had to prove a similar description for Hausdorff extensions, some characterizations for H-closed spaces and to study properties of maximal filters with open base, which we use as a tool. Most of the concequences are included in a sequel to this paper devoted to locally H-closed spaces.

Let X denote a Hausdorff space. If $A \subset X$, then cA denotes the complement of A. Let Sp (X) be the set of filters on X. Let $\mathcal{O}$ be the set of those filters on X which have a base of open sets and $\mathcal{H}$ the set of those filters belonging to $\mathcal{O}$ which have no cluster points. If A is an open subset of X, we consider the set $O(A) = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Sp}(X) : A \in \mathcal{F}\}$; the sets of this kind form a base of topology on $\mathrm{Sp}(X)$ which will be denoted by O_0. The topology induced by O_0 on different subspaces of $\mathrm{Sp}(X)$ will also be denoted by O_0, if the underlying set is well specified.

The mapping $i : X \to \mathrm{Sp}(X)$, where $i(x)$ is the neighbourhood filter of x, is homeomorphism between X and $i(X)$, if we endow $i(X)$ with the topology O_0.

The set $\{i(A) : A$ *open in* $X\} \cup \{i(A) \cup \{\mathcal{F}\} : A$ open in X, $A \in \mathcal{F}\}$ is also the base of a topology, denoted by O_1. The same notation will be used for the induced topology on well specified of $\mathrm{Sp}(X)$.

Clearly $O_0 < O_1$. If we endow $\mathrm{Sp}(X)$ with a topology between O_0 and O_1 and $i(X)$ with the induced topology, then i previously defined is still a homeomorphism, as the topology on $i(X)$ is the same.

Definition 1. *The topological space* (Y, σ) *is an extension of* (Z, τ) *if* $Z \subset Y$, $\sigma|_Z = \tau$, *and* $\overline{Z} = Y$. *If* Y *is Hausdorff (respectively H-closed) it is called a Hausdorff (respectively an H-closed) extension.*

Definition 2. *An open filter on the topological space* Z *is a filter in the lattice of the open subsets of* Z.

Replacing in the definition of the topologies O_0 and O_1, $\mathrm{Sp}(X)$ by the family of the open filters on X and $i(x)$ by the filter $i(x)$ of the open neighbourhoods of x for any $x \in X$, two correspondent topologies O_0' and O_1' on the family of open filters on X are obtained.