BIBLIOGRAPHY

1. Aniculăesei Gh. — *Some structures defined on the tangent bundle of an almost contact and almost cosymplectic manifold*, Rev. Roum. pures et appl. 25(1980) 995—1002.
2. Blair D. E. — *Contact Manifolds In Riemannian Geometry*, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg — New York, 1976
3. Cruceanu V. — *Certaines structures sur le fibré tangent*, Proceedings of the Institute of Mathematics of Iași, Ed. Acad. R.S.R., 1976, p. 41—49
4. Mihai I., Nicolau C. — *Almost product structures on the tangent bundle of an almost paracontact manifold*, Demonstratio Math. 15 (1982)
5. Oproiu V. — *Some remarkable structures and connexions defined on the tangent bundle*, Rendiconti di Matematica 6, VI (1973), 503—540
6. Yano K. and Ishihara S. — *Tangent and cotangent bundles*, Marcel Dekker, Inc., New York 1972

Received 20. V. 1983

University of Iași
Faculty of Mathematics
6600 — Iași, Romania

ANALELE ȘTIINȚIFICE ALE UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA" DIN IAȘI
Tomul XXX, s.I a. Matematică, 1984—3

CHAMPS PRESQUE ξ-PRINCIPAUX DANS L'ALGÈBRE ASSOCIÉE À UN CHAMP TENSORIEL DE TYPE (1,2)

PAR

LIVIU NICOLESCU et GABRIEL PRIPOAE

On introduit les champs presque ξ-principaux et les courbes presque ξ-principales dans l'algèbre associée à un champ tensoriel de type (1,2) sur une variété différentiable. On obtient une extension du théorème de K. Yano concernant les transformations sous-projectives d'une connexion linéaire. Sont présentées des applications liées aux algèbres de Tzitzéica et de Weyl.

Dans ce qui suit, M est une variété C^∞-différentiable à n dimensions. On note par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réeles de classe C^∞ sur M et par $\mathcal{T}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs de type (r, s) sur M. Pour $\mathcal{T}^1_0(M)$ on utilise aussi la notation $\mathcal{X}(M)$.

Soit $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$. Alors $\mathcal{X}(M)$ devient une $\mathcal{F}(M)$-algèbre douée du produit $X \circ Y = A(X, Y)$. On va la noter $\mathcal{U}(M, A)$ et l'appeler algèbre associée à A. Pour $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ deux connexions linéaires sur M et pour $A = \overset{2}{\nabla} - \overset{1}{\nabla} \in \mathcal{T}^1_2(M)$, l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ s'appèlle l'algèbre de déformation du couple $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$.

§1. Champs presque ξ-principaux. On considère l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ et soit $\xi \in \mathcal{X}(M)$.

Définition 1.1. *Un élément $X \in \mathcal{X}(M)$ s'appelle champ presque ξ-principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ s'il existe $f \in \mathcal{F}(M)$ et ω, $\theta \in \mathcal{T}^0_1(M)$ t.q.*

$$A(Z, X) = f \cdot Z + \omega(Z)X + \theta(Z) \cdot \xi, \quad \forall Z \in \mathcal{X}(M). \tag{1.1}$$

Remarque 1.2. 1.2.1. Si $\theta = 0$, alors (1.1) définit un champ X presque principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ [8].

1.2.2. Quand $f = 0$, X est un champ ξ-principal.

1.2.3. Si $\omega = 0$, alors (1.1) montre que X est un champ presque ξ-spécial [13].

1.2.4. Si $\omega = 0$ et $f = 0$, alors on retrouve les champs ξ-spéciaux [13].

1.2.5. Si $f = 0$ et $\theta = 0$, alors (1.1) montre que X est un champ principal [9].

1.2.6. Pour $\omega = 0$ et $\theta = 0$ dans (1.1) on retrouve le cas des champs presque spéciaux [12].

1.2.7. Si $f = 0$, $\omega = 0$, $\theta = 0$, alors X est un champ spécial [10].

Remarque 1.3. Soient $\omega \circ \in \mathcal{T}^0_1(M)$ et $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Notons par $\mathcal{P}(M, \xi)$ l'ensemble des champs presque ξ-principaux dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$. Alors

l'ensemble $\{X \in \mathcal{P}'(M, \xi) : A(Z, X) = f \cdot Z + \omega \circ (Z) \cdot X + \theta(Z) \cdot \xi, \ \forall Z \in \mathcal{X}(M)\}$ est un $\mathcal{F}(M)$-sous-module du module $\mathcal{X}(M)$, mais pas (en général) une $\mathcal{F}(M)$-sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$.

On peut particulariser maintenant le champ $\xi \in X(M)$. Soit $\mathcal{U}(M, A)$ une algèbre commutative, X un champ presque ξ-principal donné par

$$\text{et } \xi \in \mathcal{X}(M). \tag{1.1}$$

(i) Si ξ est un champ spécial $t \cdot q \cdot \omega(\xi) \neq 0$, alors X est aussi un champ spécial.

(ii) Si ξ est un champ principal et $\omega(\xi) \neq 0$, alors X est aussi un champ principal.

(iii) Si ξ est un champ presque spécial, donné par $A(Z, \xi) = \alpha \cdot Z$, $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$, et $\alpha - \omega(\xi) \neq 0$, alors X est aussi un champ presque spécial.

(iv) Si ξ est un champ presque principal, donné par $A(Z, \xi) = \alpha \cdot Z + \eta(Z) \cdot \xi$, $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$, et $\alpha - \omega(\xi) \neq 0$, alors X est aussi champ presque principal.

En effet, les affirmations résultent du fait que l'ensemble des champs spéciaux, respectivement presque spéciaux, principaux, presque principaux forment des $\mathcal{F}(M)$-sous-modules dans $\mathcal{X}(M)$.

On a pour (i) $X = -[1/\omega(\xi)] \cdot [f + \theta(\xi)] \cdot \xi$,

pour (ii) $$X = -[1/\omega(\xi)] \cdot [f + \theta(\xi) - \eta(X)] \cdot \xi,$$

pour (iii) $$X = [(f + \theta(\xi)/[\alpha - \omega(\xi))]\xi \cdot \xi,$$

pour (iv) $$X = [1/(\alpha - \omega(\xi))] \cdot [f + \theta(\xi) - \eta(X)] \cdot \xi,$$

d'où on obtient c.q.f.d.

Proposition 1.4. *Tout champ presque ξ-principal est un champ ξ-sous-caractéristique dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$.*

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{P}'(M, \xi)$. Pour $Z = X$, de (1.1) on a $A(X, X) = (f + \omega(X)) \cdot X + \theta(X) \cdot \xi$,
ce qui nous montre que X est un champ ξ-sous-caractéristique [11].

Définition 1.5. *Soit $X \in \mathcal{P}'(M, \xi)$. Si les vecteurs X_p et ξ_p sont indépendents, $\forall p \in M$, alors X s'appèlle champ presque ξ-principal de directions dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$.*

On peut caractériser intrinséquement les champs presque ξ-principaux de directions par la.

Proposition 1.6. *Soit $\xi \in \mathcal{X}(M)$ et $X \in \mathcal{U}(M, A)$. On suppose que les vecteurs X_p et ξ_p sont indépendents, $\forall p \in M$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est un champ presque ξ-principal de directions.*

(ii) *Pour tout $Z \in X(M)$ on a la relation.*

$$\{[A(Z, X) \hat{\otimes} X] \hat{\otimes} (\xi \hat{\otimes} X)\} \hat{\otimes} [(Z \hat{\otimes} X) \hat{\otimes} (\xi \hat{\otimes} X)] = 0, \tag{1.2}$$

où on a noté $T \hat{\otimes} T' = T \otimes T' - T' \otimes T$.

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) De (1.1) on a, $\forall Z \in X(M)$, $A(Z, X) \otimes X = f \cdot Z \otimes X + \omega(Z) \cdot X \otimes X + \theta(Z) \cdot \xi \otimes X$ et $X \otimes A(Z, X) = f \cdot X \otimes Z + \omega(Z) \cdot X \otimes X + \theta(Z) \cdot X \otimes \xi$. Donc

$$A(Z, X) \hat{\otimes} X = f \cdot Z \hat{\otimes} X + \theta(Z) \cdot \xi \hat{\otimes} X. \tag{1.3}$$

Les vecteurs ξ_p et X_p étant indépendents, $\forall p \in M$, il en résulte que $\xi \hat{\otimes} X$ n'est nul dans aucun point. De (1.3) on obtient, $\forall Z \in X(M)$, $[A(Z, X) \hat{\otimes} X] \otimes (\xi \hat{\otimes} X) = f(Z \hat{\otimes} X) \otimes (\xi \hat{\otimes} X) + \theta(Z) \cdot (\xi \hat{\otimes} X) \otimes (\xi \hat{\otimes} X)$ et

$$(\xi \hat{\otimes} X) \otimes [A(Z, X) \hat{\otimes} X] = f(\xi \hat{\otimes} X) \otimes (Z \hat{\otimes} X) + \theta(Z) \cdot (\xi \hat{\otimes} X) \otimes (\xi \hat{\otimes} X).$$

Des deux dernières relations résulte

$$[A(Z, X) \hat{\otimes} X] \hat{\otimes} (\xi \hat{\otimes} X) = f \cdot (Z \hat{\otimes} X) \hat{\otimes} (\xi \hat{\otimes} X). \tag{1.4}$$

De (1.4) on obtient (1.2).

(ii) $\Rightarrow$(i) La relation (1.2) montre que les champs $[A(Z, X) \hat{\otimes} X] \hat{\otimes} (\xi \hat{\otimes} X)$ et $(Z \hat{\otimes} X) \hat{\otimes} (\xi \hat{\otimes} X)$ sont collinéaires. Il existe donc une fonction $f \in \mathcal{F}(M)$ t.q. on ait (1.4).
De la relation (1.4) il résulte que, pour tout $Z \in \mathcal{X}(M)$, il existe une fonction $h_Z \in \mathcal{F}(M)$ t.q.

$$A(Z, X) \hat{\otimes} X - f(Z \hat{\otimes} X) = h_Z(\xi \hat{\otimes} X). \tag{1.5}$$

Comme le champ $\xi \hat{\otimes} X$ n'est nul dans aucun point, on obtient

$$h_{Z+Y} = h_Z + h_Y \text{ et } h_{uZ} = u h_Z, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \ \forall u \in \mathcal{F}(M).$$

Donc $h_Z = \theta(Z)$, $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$, où $\theta \in \mathcal{T}_1^0(M)$. De (1.5) il résulte que $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$ il existe une fonction $u_Z \in \mathcal{F}(M)$ t.q.

$$A(Z, X) - f \cdot Z - \theta(Z) \cdot \xi = u_Z \cdot X. \tag{1.6}$$

Le champ X étant régulier, de (1.6) on a

$$u_{Z+Y} = u_Z + u_Y, \quad u_{hZ} = h \cdot u_Z, \quad \forall Z, Y \in \mathcal{X}(M), \quad \forall h \in \mathcal{F}(M).$$

Donc $u_Z = \omega(Z)$, $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$, où $\omega \in \mathcal{T}_1^0(M)$.

Remarque 1.7. Soient A^i_{jk}, ξ^i, respectivement X^i les composantes de A, ξ et X, dans un système de coordonées locales. Alors la relation (1.1) s'écrit

$$A^i_{kj} X^j = f \cdot \delta^i_k + \omega_k \cdot X^i + \theta_k \cdot \xi^i, \tag{1.1'}$$

où ω_k et θ_k sont respectivement les composantes de ω et de θ, et δ^i_j sont les composantes du tenseur de Kronecker.
En coordonnées locales les relations (1.3), (1.4) et (1.2) s'écrivent

$$A^i_{kj} \delta^h_r - A^h_{kj} \cdot \delta^i_r) \cdot X^j \cdot X^r = f(\delta^i_k \cdot \delta^h_r - \delta^h_k \cdot \delta^i_r) \cdot X^r + \theta_k \cdot (\xi^i \cdot \delta^h_r - \xi^h \cdot \delta^i_r) \cdot X^r, \tag{1.3'}$$

$$[(A^i_{kj} \cdot \delta^h_q - A^h_{kj} \cdot \delta^i_q) \cdot (\xi^r \cdot \delta^s_m - \xi^s \cdot \delta^r_m) - (A^r_{kj} \cdot \delta^s_q - A^s_{kj} \cdot \delta^r_q) \cdot (\xi^i \cdot \delta^h_m - \xi^h \cdot \delta^i_m)] \cdot X^j \cdot X^q \cdot X^m = f \cdot [(\delta^i_k \cdot \delta^h_q - \delta^h_k \cdot \delta^i_q) \cdot (\xi^r \cdot \delta^s_m - \xi^s \cdot \delta^r_m) - (\delta^r_k \cdot \delta^s_q - \delta^s_k \cdot \delta^r_q) \cdot (\xi^i \cdot \delta^h_m - \delta^h_m \cdot \xi^h \cdot \delta^i_m)] X^q \cdot X^m, \tag{1.4'}$$

$$(1.2)' \qquad (E^{ihrs\,\alpha\beta\gamma\varepsilon}_{kabc\,0\,de} - E^{ihrs\,\alpha\beta\gamma\varepsilon}_{kdec\,0\,ab}) \,.\, X^a \,.\, X^b \,.\, X^c \,.\, X^d \,.\, X^e \,.\, = 0$$

où on a noté

$$(1.2)'' \qquad E^{ihrs\,\alpha\beta\gamma\varepsilon}_{kabc\,0\,de} = [(A^i_{ka} \,.\, \delta^h_b - A^h_{ka} \,.\, \delta^i_b) \,.\, (\xi^r \,.\, \delta^s_c - \xi^s \,.\, \delta^r_c) - (A^r_{ka} \,.\, \delta^s_b -$$

$$- A^s_{ka} \,.\, \delta^r_b) \,.\, (\xi^i \,.\, \delta^h_c - \xi^h \,.\, \delta^i_c)] \,.\, [(\delta^\alpha_0 \,.\, \delta^\beta_d - \delta^\beta_0 \,.\, \delta^\alpha_d) \,.\, \xi^\gamma \,.\, \delta^\varepsilon_e - \xi^\varepsilon \,.\, \delta^\gamma_e) - (\delta^\gamma_0 \,.\, \delta^\varepsilon_d -$$

$$- \delta^\varepsilon_0 \,.\, \delta^\gamma_d) \,.\, (\xi^\alpha \,.\, \delta^\beta_e - \xi^\beta \,.\, \delta^\alpha_e)$$

Définition 1.8. *Les trajectoires d'un champ presque ξ-principal de directions s'appellent courbes presque ξ-principales.*

Remarque 1.9. En utilisant (1.2)' on obtient les équations différentielles des courbes presque ξ-principales

$$(1.2)''' \qquad (E^{ihrs\,\alpha\beta\gamma\varepsilon}_{kabc\,0\,de} - E^{ihrs\,\alpha\beta\gamma\varepsilon}_{kdec\,0\,ab}) \,.\, \frac{dx^a}{dt} \,.\, \frac{dx^b}{dt} \,.\, \frac{dx^c}{dt} \,.\, \frac{dx^d}{dt} \,.\, \frac{dx^e}{dt} = 0.$$

Proposition 1.10. *Soit $\xi \in \mathcal{V}(M)$ t.q. $\xi_p \neq 0$, $\forall p \in M$. On suppose que $n \geqslant 2$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(M, A)$ sont champs presque ξ-principaux.*

(ii) *Il existe $\eta, \omega \in \mathcal{T}^0_1(M)$ et $\varphi \in \mathcal{T}^0_2(M)$ t.q.*

$$(1.7) \qquad A = \delta \otimes \eta + \omega \otimes \delta + \varphi \otimes \xi$$

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) évidente.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Comme tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(M, A)$ sont des champs presque ξ-principaux, on a

$$(1.8) \qquad A(Z, X) = f_X Z + \omega(Z) X + \theta_X(Z) \,.\, \xi, \quad \forall X, Z \in \mathcal{V}(M).$$

Pour $X = Y_1 + Y_2$ on obtient

$$[f_{Y_1+Y_2} - f_{Y_1} - f_{Y_2}] \,.\, Z + [\theta_{Y_1+Y_2}(Z) - \theta_{Y_1}(Z) - \theta_{Y_2}(Z)] \,.\, \xi = 0,$$

pour tout $Z, Y_1, Y_2 \in \mathcal{V}(M)$.

Soient $\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ et $\{\lambda^i\}_{i=\overline{1,n}}$ deux bases duales, locales, dans $\mathcal{V}(M)$ et $\mathcal{T}^0_1(M)$ respectivement. On fait premièrement $Z = \xi$; puis, pour $Z = X_i$, en appliquant λ^i et en sommant, on obtient un système dont la solution est

$$(1.9) \qquad f_{Y_1+Y_2} = f_{Y_1} + f_{Y_2} \quad \text{et} \quad \theta_{Y_1+Y_2}(Z) = \theta_{Y_1}(Z) + \theta_{Y_2}(Z), \quad \forall Z \in \mathcal{V}(M).$$

Par la même voie, en prenant $X = hY$, on obtient de (1.8) que

$$(1.10) \qquad f_{hY} = h \,.\, f_Y \quad \text{et} \quad \theta_{hY}(Z) = h \,.\, \theta_Y(Z), \quad \forall Z \in \mathcal{V}(M).$$

De (1.9) et (1.10) il résulte que $\eta(X) \overset{\Delta}{=} f_X$, $\forall X \in \mathcal{V}(M)$ est une 1-forme et que $\varphi(Z, X) \overset{\Delta}{=} \theta_X(Z)$, $\forall X, Z \in \mathcal{V}(M)$ est un champ tensoriel de type (0.2).

Proposition 1.11. *Si l'algèbre $\mathcal{A}(M, A)$ est commutative, $n > 2$, $\xi \in \mathcal{V}(M)$ t.q. $\xi_p \neq 0$, $\forall p \in M$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(M, A)$ sont des champs presque ξ-principaux.*

(ii) *Il existe $\omega \in \mathcal{T}^0_1(M)$ et $\varphi \in \mathcal{T}^0_2(M)$ symétrique t.q.*

$$(1.11) \qquad A(Z, X) = \omega(X) Z + \omega(Z) X + \varphi(Z, X) \,.\, \xi, \quad \forall X, Z \in \mathcal{V}(M)$$

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) évidente.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Par hypothèse nous avons

$$A(Z, X) = \eta(X) Z + \omega(Z) X + \varphi(Z, X) \,.\, \xi, \quad \forall X, Z \in \mathcal{V}(M).$$

Mais $A(Z, X) = A(X, Z)$; donc

$$(1.12) \qquad [\eta(X) - \omega(X)] \,.\, Z + [\omega(Z) - \eta(Z)] \,.\, X + [\varphi(Z, X) - \varphi(X, Z)] \,.\, \xi = 0$$

$$\forall Z, X \in \mathcal{V}(M).$$

Soit $\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ une base dans $\mathcal{V}(M)$ et $\{\lambda^i\}_{i=\overline{1,n}}$ la base duale pour $\mathcal{T}^0_1(M)$. Dans (1.12) on fait $X = X_i$, on applique λ^i et on somme. On obtient

$$\eta(Z) + n \,.\, \omega(Z) + \varphi(Z, \xi) = n \,.\, \eta(Z) + \omega(Z) + \varphi(\xi, Z), \text{ d'où}$$

$$(1.13) \qquad \eta(Z) = \omega(Z) + \frac{1}{n-1} \,.\, [\varphi(Z, \xi) - \varphi(\xi, Z)], \quad \forall Z \in \mathcal{V}(M).$$

En remplaçant dans (1.12) et en faisant $X = \xi$, on obtient

$$\frac{n-2}{n-1} \,.\, [\varphi(Z, \xi) - \varphi(\xi, Z)] \,.\, \xi = 0, \text{ d'où}$$

$\varphi(Z, \xi) - \varphi(\xi, Z) = 0$, $\forall Z \in \mathcal{V}(M)$. De (1.13) il résulte $\eta(Z) = \omega(Z)$, et de

$$A(Z, X) = \omega(Z) X + \omega(X) Z + \varphi(Z, X) \,.\, \xi, \quad \forall X, Z \in \mathcal{V}(M)$$

on a aussi φ symétrique, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.12. *Soient ∇ et $\overline{\nabla}$ deux connexions linéaires sur M, telles que $\mathcal{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$ soit commutative. On considère $\xi \in \mathcal{V}(M)$ t.q. $\xi_p \neq 0$, $\forall p \in M$, $n > 2$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(M, \nabla - \overline{\nabla})$ sont champs presque ξ-principaux.*

(ii) *Tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(M, \nabla - \overline{\nabla})$ sont champs ξ-sous-caractéristiques.*

(iii) *∇ et $\overline{\nabla}$ admettent les mêmes courbes ξ-sous-autoparallèles.*

(iv) *Il existe $\omega \in \mathcal{T}^0_1(M)$, $\varphi \in \mathcal{T}^0_2(M)$ t.q. $\overline{\nabla} = \nabla + \delta \otimes \omega + \omega \otimes \delta + \varphi \otimes \xi$.*

Démonstration. On applique la proposition précedente. Pour (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) voir K. Yano [19].

Exemple. Dans ce qui suit on présente un exemple d'algèbre $\mathcal{A}(M, A)$ dont tous les éléments sont champs presque ξ-principaux.

Soit M une hypersurface immergée dans l'espace R^{n+1}, doué de la structure riemannienne canonique g et $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée. Sur M sont induites deux structures : une de Riemann, par

$$(1.14) \qquad \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \,.\, N, \quad \forall X, Y \in \mathcal{V}(M)$$

$$(1.15) \qquad \overline{\nabla}_X N = -F(X), \quad \forall X \in \mathcal{V}(M).$$

où ∇ est la connexion Levi-Civita associée à la métrique g induite sur M, h la deuxième forme fondamentale ; $N \in \mathcal{X}(R^{n+1})$ t.q. $g(X, N)=0, \forall X \in \mathcal{X}(M)$; $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$ l'application de Weingarten, $g(F(X), Y)=h(X, Y)$ $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

La deuxième structure, de type Tzitzéica a été définie par A. Dobrescu [2] et généralisée par K. Yano [20]. Elle est donnée par

$$\bar{\nabla}_X Y=\tilde{\nabla}_X Y+\tilde{h}(X, Y) \cdot C, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{1.16}$$

$$\bar{\nabla}_X C=f \cdot X+\omega(X) \cdot C, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M), \tag{1.17}$$

où $C \in \mathcal{X}(R^{n+1})$ est un champ torse t.q. $C_p \notin T_pM$, $\forall p \in M$, $\tilde{\nabla}$ est la connexion de Tzitzéica, $\tilde{h} \in \mathcal{T}_2^0(M)$ est le tenseur de Tzitzéica, $\omega \in \mathcal{T}_1^0(M)$.

En considérant les conditions d'intégrabilité de (1.14)—(1.15) respectivement de (1.16)—(1.17) et en écrivant $C=\xi+p \cdot N$, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ et $p \in \mathcal{F}(M)$. on a montré, [14], qu'on peut mettre en évidence l'algèbre de déformation des connexions ∇ et $\tilde{\nabla}$, appelée algèbre de Tzitzéica. Dans ce cas, $A(X, Y)=\nabla_X Y-\tilde{\nabla}_X Y=\tilde{h}(X, Y) \cdot \xi$.

Maintenant, il apparait comme évident que tout champ $X \in \mathcal{X}(M)$ est un champ ξ-sous-caractéristique.

Comme ∇ et $\tilde{\nabla}$ sont symétriques, $\mathcal{U}(M, A)$ est commutative. Pour $n>2$ et pour $\xi_p \neq 0$, $\forall p \in M$ (ce qui veut dire que C n'est normal à M dans aucun point), du corollaire 1.12 résulte que tous les éléments d'une algèbre de Tzitzéica sont champs presque ξ-principaux.

§2. Interprétation géométrique des champs presque ξ-principaux. Soit $\tilde{\nabla}$ une connexion linéaire sur la variété M et soit $\xi \in \mathcal{X}(M)$ un champ fixé.

Définition 2.1. *Un élément $X \in \mathcal{X}(M)$ s'appèlle champ $(\tilde{\nabla}, \xi)$-torse s'il existe $h \in \mathcal{F}(M)$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_1^0(M)$ t.q.*

$$\tilde{\nabla}_Z X=h \cdot Z+\alpha(Z) X+\beta(Z) \cdot \xi, \quad \forall Z \in \mathcal{X}(M). \tag{2.1}$$

Remarque 2.2.1. Si $\beta=\alpha=0$ et $h=1$, alors (2.1) montre que X est un champ $\tilde{\nabla}$-concurrent (A. Myller [7]).

2.2.2. Quand $h=0$ et $\beta=0$, on obtient la définition des champs $\tilde{\nabla}$-recourants (L. P. Eisenhart [3]).

2.2.3. Pour $\beta=0$, (2.1) définit un champ X qui est $\tilde{\nabla}$-torse (K. Yano [18]).

On considère de nouveau l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$. Avec A et $\tilde{\nabla}$ on construit les connexions linéaires

$$\nabla=\tilde{\nabla}-(1/2) \cdot A, \quad \bar{\nabla}=\tilde{\nabla}+(1/2) \cdot A$$

En ce qui concerne le couple de connexions $(\nabla, \bar{\nabla})$, nous avons la

Proposition 2.3. *Soit $X \in \mathcal{U}(M, A)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) *X est un champ presque ξ-principal et (∇, ξ)-torse.*

(ii) *X est un champ presque ξ-principal et $(\bar{\nabla}, \xi)$-torse.*

(iii) *X est un champ (∇, ξ)-torse et $(\bar{\nabla}, \xi)$-torse.*

Démonstration. On utilise les relations (1.1) et (2.1).

§3. Algèbres de Weyl presque ξ-principales. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit $\hat{g}$ la structure conforme engendrée par g, c'est a dire $\hat{g}=\{e^\lambda, g \mid \lambda \in \mathcal{F}(M)\}$. On considère une structure de Weyl sur $(M, \hat{g})$, donnée par [1]

$$W(e^\lambda \cdot g)=W(g)-d\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathcal{F}(M). \tag{3.1}$$

$(M, \hat{g}, W)$ s'appelle variété Weyl [4]. On sait que sur une variété Weyl il existe une unique connexion linéaire symétrique ∇ compatible avec la structure Weyl (i.e. $\nabla_X g+W(g)(X) g=0$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$). Elle s'appèlle la connexion de Weyl et est donnée par [4].

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z)=&X(g(Y, Z))+Y(g(X, Z))-Z(g(X, Y))-g(Y, [X, Z])- \\ &-g(Z, [Y, X])+g(X, [Z, Y])+W(g)(X) g(Y, Z)+W(g)(Y) \cdot g(X, Z)- \\ &-W(g)(Z) \cdot g(X, Y). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si $\mathring{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita associée à g, alors

$$\nabla_X Y-\mathring{\nabla}_X Y-(1/2)[W(g)(X) Y+W(g)(Y) X-g(X, Y) \cdot G_* W(g)] \tag{3.3}$$

où $G_* : \mathcal{T}_1^0(M) \to \mathcal{X}(M)$ est l'isomorphisme canonique.

∇ et $\mathring{\nabla}$ étant symétriques, de la Prop. 1.11 résulte que tous les éléments de $\mathcal{U}(M, \nabla-\mathring{\nabla})$ sont des champs presque $G_* W(g)$-principaux.

Proposition 3.1. *Soit $\bar{\nabla}$ une connexion linéaire. Alors $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla}-\nabla)$ et $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla}-\mathring{\nabla})$ ont les mêmes champs presque $G_* W(g)$-principaux.*

Remarque 3.2. Soit $\xi \in X(M)$ fixé et soit $\bar{\nabla}$ une connexion linéaire t.q. l'algèbre $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla}-\mathring{\nabla})$ ait tous les éléments des champs presque ξ^*principaux. Alors, d'après la Prop. 1.10, il existe $\eta, \omega \in \mathcal{T}_1^0(M)$, $\varphi \in \mathcal{T}_2^0(M)$ t.q., $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

$$\bar{\nabla}_X Y-\mathring{\nabla}_X Y=\eta(X) Y+\omega(Y) X+\varphi(X, Y) \cdot \xi. \tag{3.4}$$

On sait [4] que la connexion de Weyl est un invariant conforme. La connexion $\bar{\nabla}$ ainsi introduite ne l'est plus, en général. Ce que nous cherchons, c'est une condition imposée aux objets η, ω, φ, ξ pour que $\bar{\nabla}$ soit aussi un invariant conforme.

Définition 3.3. *Soit $\xi \in \mathcal{X}(M)$ fixé. Une connexion linéaire $\bar{\nabla}$ s'appelle connexion de Weyl presque ξ-principale si 1° $\bar{\nabla}$ est un invariant conforme et 2° l'algèbre $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla}-\mathring{\nabla})$ a tous les éléments champs presque ξ-principaux.* L'algèbre $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla}-\mathring{\nabla})$ s'appèlle alors *algèbre de Weyl presque ξ-principale.*

Remarque 3.4. Pour $\eta=\omega=(1/2) W(g)$, $\varphi \otimes \xi=-(1/2) \cdot g \otimes G_* W(g)$, on a que la connexion de Weyl est aussi une connexion de Weyl presque $G_* W(g)$-principale.

Proposition 3.5. *Soit $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla}-\mathring{\nabla})$ une algèbre de Weyl presque ξ-principale. Alors les algèbres $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla}-\nabla)$ et $\mathcal{U}(M, \nabla-\mathring{\nabla})$ ont les mêmes champs presque ξ-principaux.*

Proposition 3.6. *Une connexion linéaire $\overline{\nabla}$ sur M est une connexion de Weyl presque ξ-principale si et seulement s'il existe $\eta, \omega \in \mathcal{T}_1^0(M), \varphi \in \mathcal{T}_2^0(M)$ t.q. 1° on ait la relation (3.9) et 2°.*

$$(3.5)\quad \overline{\varphi}(X, Y)g(Z, \xi)+\overline{\varphi}(X, Z)g(Y, \xi)+\overline{\omega}(Z)g(X, Y)+\overline{\omega}(Y)g(X, Z)+$$
$$+2\overline{\eta}(X)g(Y, Z)=\varphi(X, Y)g(Z, \xi)+\varphi(X, Z)g(Y, \xi)+\omega(Z)g(X, Y)+$$
$$+\omega(Y)g(X, Z)+2\eta(X)g(X, Y)-d\lambda(X)\,.\,g(Y, Z),\ \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$
$$\forall \lambda \in \mathcal{F}(M).$$

où $\overline{\varphi}^{not}\varphi_g$, $\overline{\varphi}^{not}\varphi_{e^\lambda g}$, $\overline{\omega}^{not}\omega_{e^\lambda g}$, $\overline{\eta}^{not}\eta_{e^\lambda g}$, $\overline{\xi}^{not}\xi_{e^\lambda g}$, $\omega^{not}\omega_g$, $\eta^{not}\eta_g$, $\xi^{not}\xi_g$.

Démonstration. Dans la relation (3.4) on remplace Δ par ∇, qui est un invariant conforme. Alors

$$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\eta(X)Y+\omega(Y)X+\varphi(X, Y)\,.\,\xi-(1/2)\,.\,[W(g)(X)Y+$$
$$+W(g)(Y)X-g(X, Y)\,.\,G_g W(g)].$$

Pour que $\overline{\nabla}$ soit invariant conforme, il faut que $\overline{\nabla}-\nabla$ le soit ce qui nous mène à la condition (3.5).

Remarque 3.7.1. Une condition suffisante pour que (3.5) soit satisfaite est

$$\eta_{e^\lambda g}(X)=\eta_g(X)-\frac{1}{2}\,d\lambda(X) \text{ et } \varphi, \xi, \omega \text{ indépendents de } g.$$

3.7.2. Une autre condition suffisante pour (3.5) est

$$\eta_{e^\lambda g}(X)=\eta_g(X)-(1/2)d\lambda(X)\ ;\ \omega_{e^\lambda g}(X)=\omega_g(X)-(1/2)\,.\,d\lambda(X)\ ;$$
$$(\varphi\otimes\xi)_{e^\lambda g}(X, Y)=(\varphi\otimes\xi)_g(X, Y)+(1/2)g(X, Y)\,.\,G_g d\lambda,\quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M),$$
$$\forall \lambda \in \mathcal{F}(M).$$

Proposition 3.8. *Soient $\eta, \omega \in \mathcal{T}_1^0(M)$, $\xi \in \mathcal{X}(M)$, $\varphi \in \mathcal{T}_2^0(M)$.*

(i) *Alors il existe une unique connexion linéaire $\overline{\nabla}$ t.q.*

$$(3.6)\quad (\overline{\nabla}_X g)(Y, Z)+\varphi(X, Y)g(Z, \xi)+\varphi(X, Z)g(Y, \xi)+g(X, Y)\,.\,\omega(Z)+$$
$$+g(X, Z)\,.\,\omega(Y)+2\eta(X)g(Y, Z) \text{ et}$$

$$(3.7)\quad \overline{\nabla}_X Y-\overline{\nabla}_Y X-[X, Y]=[\eta(X)-\omega(X)]\,.\,Y-[\eta(Y)-\omega(Y)]\,.\,X+$$
$$+[\varphi(X, Y)-\varphi(Y, X)]\,.\,\xi,\quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

(ii) *Si la relation (3.5) est satisfaite, la connexion de (i) est un invariant conforme.*

Démonstration. (i) Resulte d'une affirmation plus générale de [15]. La connexion cherchée est donnée par

$$(3.8)\quad 2g(\overline{\nabla}_X Y, Z)=X(g(Y, Z))+Y(g(Z, X))-Z(g(X, Y))-g(Y, [X, Z])-$$
$$-g(Z, [Y, X])+g(X, [Z, Y])+2\varphi(X, Y)\,g(Z, \xi)+2\omega(Y)\,g(X, Z)+$$
$$+2\eta(X)\,g(Y, Z).$$

Pour $\overline{g}=e^\lambda g$ dans (3.8), en utilisant (3.5), on obtient

$$2e^\lambda g(\overline{\nabla}_X Y, Z)=e^\lambda\{X(g(Y, Z))+Y(g(Z, X))-Z(g(X, Y))-g(Y, [X, Z])-$$
$$-g(Z, [Y, X])+g(X, [Z, Y])+2\varphi(X, Y)\,g(Z, \xi)+2\omega(Y)\,g(X, Z)+$$
$$+2\eta(X)\,g(Y, Z)\},$$

ce qui nous dit que $\overline{\nabla}$ est invariant conforme.

Remarque 3.9. La relation (3.8) s'écrit

$$\overline{\nabla}_X Y=\mathring{\nabla}_X Y+\eta(X)\,Y+\omega(Y)\,X+\varphi(X, Y)\,.\,\xi.$$

Donc la proposition précédente affirme que, étant donnés φ, ξ, η, ω avec (3.5), il existe une unique connexion de Weyl presque ξ-principale qui vérifie (3.6) et (3.7). On a obtenu une propriété caractéristique ainsi qu'un théorème d'existence et d'unicité des objets nouveau introduits.

§4. Une remarque concernant les champs spéciaux. Si dans (1.1) on fait $\omega=0$, $0\otimes\xi=0$, X est un champ spécial. Les champs spéciaux (et peut-être aussi les champs presque ξ-principaux dont ils sont un cas particulier) sont susceptibles d'avoir certaines applications physiques.

M. A. Tonnelat [16] mét en évidence une relation de la forme

$$(4.1)\qquad \nabla_X Y=\mathring{\nabla}_X Y-f\,.\,\eta(Y)\,X,$$

où ∇ est une connexion linéaire et $\mathring{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita sur la variété (M, g).

La connexion ∇ de (4.1) a été considérée par H. Eyraud, dans le cas particulier $\eta_i=\Gamma^j_{ij}$, où Γ^i_{jk} sont les composantes locales de ∇. La forme (4.1) a été utilisée par P. Straneo [16].

Le choix d'une fonction d'action convenable conduit, paraît-il, à la lois de la gravitation d'Einstein, dans le cas de l'univers fermé, à courbure totale constante. D'après H. Eyraud, ces équations pourrait être valables à l'intérieur de l'électron [16].

Pour nous, la relation (4.1) affirme que, dans l'algèbre de déformation $\mathcal{U}(M, \nabla-\mathring{\nabla})$, tous les éléments sont des champs spéciaux [10].

REFERENCES

1. Anastasiei M. — *Conformal structures on Banach vector bundles*. An. şt. Univ. Iaşi, T. XX, fasc. 2 (1974), 351—358
2. Douresco A. — *Sur les variétés V immergées dans E*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 12, 1967, 829—841
3. Eisenhart L. P. — *Riemannian geometry*, Bull. Princeton Univ. Pres. 1966
4. Folland G. — *Weyl manifolds*. J. Diff. geom., 4 (1970), 145—153

5. Gheorghiev Gh., Miron R., Papuc D. — *Geometrie analitică și diferențială*, vol. II, E.D.P., București, 1969
6. Lyra G. — *Über eine Modifikation der Riemannschen Geometrie*, Math. Zeitschr. 54 (1951), 52—64
7. Myller Al. — *Directions concourantes dans une variété métrique à n dimensions*, Bull. de la Soc. Math. de France, 56 (1928), 1—6
8. Nicolescu L. — *Champs presque principaux dans l'algèbre de déformation*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 26 (1981), 611—616
9. * * * — *Champs principaux dans l'algèbre de déformation*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de R.S.R., Tome (1981)
10. * * * — *Des champs spéciaux dans l'algèbre de déformation*, An. Univ. București, s. Mat., XXX, 1981, 39—48
11. * * * — *Sur les transformations subprojectives d'une connexion linéaire* Bull. Soc. Sci. Math. RSR, Tome 21(69), nr. 1—2, 1977, 83—94
12. * * * — *Champs presque spéciaux dans l'algèbre de déformation*, An. st. Univ. Iași, s. Ia, 27(1981), 171—176
13. Nicolescu L., Pripoae G. — *Connexions de Tzitzeica ξ-spéciales et presque ξ-spéciales* (à paraitre)
14. Pripoae G. — *Algèbres de Tzitzeica* (à paraitre)
15. Sen D. K., Vanstone J. R. — *On Weyl and Lyra manifolds*, J. Math. Phys. 13 (1972), 7
16. Tonnelat M. A. — *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars, 1965
17. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*, Comm. Math. Helv., 41 (1966—67), 73—87
18. Yano K. — *On the torse forming directions in riemannian spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944), 340—345
19. * * * — *Union curves and subpaths*, Math. Jap., nr. 1 (1948), 51—59
20. * * * — *Generalization of the connection of Tzitzeica*, Kodai Math. Sem. Rep. 21 (1969) 167—174
21. * * * — *On semi-symmetric metric connection*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 15, 1970, 1579—1586

Reçu le 10.VI.1983

Université de Bucarest
Faculté de Mathématiques

ANALELE ȘTIINȚIFICE ALE UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA" DIN IAȘI
Tomul XXX, s.I a. Matematică, 1984—3

SUITES SPECTRALES ET J-RÉSOLUTIONS D'UN SYSTÈME PROJECTIF

PAR

GHEORGHE PITIȘ

Nous avons présenté quelques résultats concernant le calcul des termes des suites spectrales en cohomologie de Miron-Pop, dans le travail [5].

Dans cette note nous continuons l'étude en appliquant la théorie des suites spectrales au cas des morphismes de systèmes projectifs différentiels (théorème 2.2). A l'aide des suites spectrales et en utilisant la notion de J-résolution d'un système projectif, [4], nous démontrons dans le §3 (théorème 3.1) un théorème de type de Rham en cohomologie de Miron-Pop.

1. Rappelons quelques résultats obtenus dans [5].

Soit $P^* = \bigoplus_{q\geq 0} P^q$ un système projectif différentiel sur le demi-treillis $(I, \leq)$ et désignons par $C^p(J, P^q)$ le groupe des cochaînes de dimension p associé au système projectif P^q, pour $J \in A_I$.

Le groupe $C(J, P^*) = \bigoplus_{p\geq 0,\, q\geq 0} C^p(J, P^q)$ possède une structure de complexe double, les deux différentielles étant

$$d_{10}^{pq} = \delta_q^p : C^p(J, P^q) \longrightarrow C^{p+1}(J, P^q),$$

(δ_q^p est l'homomorphisme de cofrontière associé au système projectif P^q) et

$$d_{01}^{pq} = (-1)^p (\tilde{d^q})^p : C^p(J, P^q) \longrightarrow C^p(J, P^{q+1})$$

(l'homomorphisme $(\tilde{d^q})^p$ est induit par la différentielle d^q du système projectif différentiel P^*). Les sous-groupes

$$'C_p(J, P^*) = \bigoplus_{\bar{p}\geq p}^{q\geq 0} C^{\bar{p}}(J, P^q) ; \qquad ''C_q(J, P^*) = \bigoplus_{\bar{q}\geq q}^{p\geq 0} C^p(J, P^{\bar{q}})$$

définissent la première, resp. la deuxième filtration du complexe double $C(J, P^*)$. $'E_r^{pq}$ et $''E_r^{pq}$ étant les termes de la suite spectrale correspondant à la première, resp. à la deuxième filtration du complexe $C(J, P^*)$, nous pouvons énoncer le

Théorème 1.1. [5] *Si les systèmes projectifs P^p, $p \geq 0$, sont canoniques alors, pour tout $J \in A_I$, sont valables les isomorphismes*

$$''E_1^{p0} \approx H^p(\varprojlim_{i\in I} (P^*)),$$