5. Gheorghiev Gh., Miron R., Papuc D. — *Geometrie analitică și diferențială*, vol. II, E.D.P., București, 1969
6. Lyra G. — *Über eine Modifikation der Riemannschen Geometrie*, Math. Zeitschr. 54 (1951), 52—64
7. Myller Al. — *Directions concourantes dans une variété métrique à n dimensions*, Bull. de la Soc. Math. de France, 56 (1928), 1—6
8. Nicolescu L. — *Champs presque principaux dans l'algèbre de déformation*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 26 (1981), 611—616
9. * * * — *Champs principaux dans l'algèbre de déformation*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de R.S.R., Tome (1981)
10. * * * — *Des champs spéciaux dans l'algèbre de déformation*, An. Univ. București, s. Mat., XXX, 1981, 39—48
11. * * * — *Sur les transformations subprojectives d'une connexion linéaire* Bull. Soc. Sci. Math. RSR, Tome 21(69), nr. 1—2, 1977, 83—91
12. * * * — *Champs presque spéciaux dans l'algèbre de déformation*. An. st. Univ. Iași, s. Ia, 27(1981), 171—176
13. Nicolescu L., Pripoae G. — *Connexions de Tzitzeica ξ-spéciales et presque ξ-spéciales* (à paraître)
14. Pripoae G. — *Algèbres de Tzitzéica* (à paraître)
15. Sen D. K., Vanstone J. R. — *On Weyl and Lyra manifolds*. J. Math. Phys. 13 (1972), 7
16. Tonnelat M. A. — *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars, 1965
17. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*, Comm. Math. Helv., 41 (1966—67), 73—87
18. Yano K. — *On the torse forming directions in riemannian spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944), 340—345
19. * * * — *Union curves and subpaths*, Math. Jap., nr. 1 (1948), 51—59
20. * * * — *Generalization of the connection of Tzitzeica*, Kodai Math. Sem. Rep. 21 (1969) 167—174
21. * * * — *On semi-symmetric metric connection*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 15, 1970, 1579—1586

Reçu le 10.VI.1983

Université de Bucarest
Faculté de Mathématiques

ANALELE ȘTIINȚIFICE ALE UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA" DIN IAȘI
Tomul XXX, s.I a. Matematică, 1984—3

SUITES SPECTRALES ET J-RÉSOLUTIONS D'UN SYSTÈME PROJECTIF

PAR

GHEORGHE PITIȘ

Nous avons présenté quelques résultats concernant le calcul des termes des suites spectrales en cohomologie de Miron-Pop, dans le travail [5].

Dans cette note nous continuons l'étude en appliquant la théorie des suites spectrales au cas des morphismes de systèmes projectifs différentiels (théorème 2.2). A l'aide des suites spectrales et en utilisant la notion de J-résolution d'un système projectif, [4], nous démontrons dans le §3 (théorème 3.1) un théorème de type de Rham en cohomologie de Miron-Pop.

1. Rappelons quelques résultats obtenus dans [5].

Soit $P^* = \bigoplus_{q\geq 0} P^q$ un système projectif différentiel sur le $\wedge$ demi-treillis $(I, \leq)$ et désignons par $C^p(J, P^q)$ le groupe des cochaînes de dimension p associé au système projectif P^q, pour $J \in A_I$.

Le groupe $C(J, P^*) = \bigoplus_{p\geq 0, q\geq 0} C^p(J, P^q)$ possède une structure de complexe double, les deux différentielles étant

$$d_{10}^{pq} = \delta_q^p : C^p(J, P^q) \longrightarrow C^{p+1}(J, P^q),$$

(δ_q^p est l'homomorphisme de cofrontière associé au système projectif P^q) et

$$d_{01}^{pq} = (-1)^p (\tilde{d^q})^p : C^p(J, P^q) \longrightarrow C^p(J, P^{q+1})$$

(l'homomorphisme $(\tilde{d^q})^p$ est induit par la différentielle d^q du système projectif différentiel P^*). Les sous-groupes

$$'C_p(J, P^*) = \bigoplus_{\bar{p}\geq p}^{q\geq 0} C^{\bar{p}}(J, P^q) ; \qquad ''C_q(J, P^*) = \bigoplus_{\bar{q}\geq q}^{p\geq 0} C^p(J, P^{\bar{q}})$$

définissent la première, resp. la deuxième filtration du complexe double $C(J, P^*)$. $'E_r^{pq}$ et $''E_r^{pq}$ étant les termes de la suite spectrale correspondant à la première, resp. à la deuxième filtration du complexe $C(J, P^*)$, nous pouvons énoncer le

Théorème 1.1. [5] *Si les systèmes projectifs P^p, $p \geq 0$, sont canoniques alors, pour tout $J \in A_I$, sont valables les isomorphismes*

$$''E_1^{p0} \approx H^p(\varprojlim_{i\in I} (P^*)),$$

2. Soit $'Z^p(J, P^q) = \operatorname{Ker} d_{10}^{pq}$. Alors $d_{01}^{pq}\ 'Z^p(J, P^q) \subseteq 'Z^p(J, P^{q+1})$, donc

$$'Z^p(J, P^*) = (\bigoplus_{q \geq 0} 'Z^p(J, P^q), d_{01}^{pq})$$

définit une suite semi-exacte, sous-suite de $(C(J, P^*), D^n)$. Alors l'inclusion de suites semi-exactes $i : 'Z^p(J, P^*) \to C(J, P^*)$ induit les homomorphismes

$$H^p(i) : H^p('Z^p(J, P^*)) \to H^p(C(J, P^*)), \quad p \geq 0$$

D'autre part

$$(1) \qquad H^p('Z^p(J, P^*)) \approx {}''E_2^{p0},$$

et en appliquant le théorème 1.1, nous avons la

Proposition 2.1. *Pour tout système projectif différentiel P^* sur le $\wedge$ demi-treillis $(I, \leq)$ il existe les homomorphismes*

$$\lambda^p : {}''E_2^{p0} \to H^p(C(J, P^*))$$

Si les systèmes projectifs P^p, $p \geq 0$, sont canoniques alors il existe des homomorphismes

$$\bar{\lambda}^p : H^p(\varprojlim_{i \in I} (P^*)) \longrightarrow H^p(C(J, P^*))$$

Les homomorphismes λ^p et $\bar{\lambda}^p$, définis plus haut, seront utilisés dans la démonstration du

Théorème 2.1. *Si les systèmes projectifs P^p, $p \geq 0$, sont canoniques et si les suites $H^q(J, P^*)$ sont acycliques pour tout $q \geq 1$, alors il existe une suite spectrale de terme E_2 donné par*

$$(2) \qquad E_2^{pq} \approx H^p(J, \mathcal{H}^q(P^*)),$$

et dont le terme E_∞ est le groupe gradué associé à une filtration de la suite $\varprojlim_{i \in I} (P^*)$.

Démonstration. Les suites $H^q(J, P^*)$, $q \geq 1$, étant acycliques, on déduit que ${}''E_2^{pq} = 0$ pour tout $q \geq 1$. En considérant la première suite spectrale du complexe $C(J, P^*)$, l'isomorphisme (2) est une conséquence de la proposition 2.4, [5]. $(Z^p(J, P^*), d_{01}^{pq})$ peut être considéré comme une suite double dont la première différentielle est nulle et la deuxième est d_{01}^{pq}. Alors

$${}''E_2^{pq}('Z^p(J, P^*)) \approx {}''H^p('H^q('Z^p(J, P^*))),$$

donc

$$(3) \qquad {}''E_2^{p0}('Z^p(J, P^*)) \approx H^p('Z^p(J, P^*)) : {}''E_2^{pq}('Z^p(J, P^*)) = 0$$

pour $q \geq 1$. D'autre part, pour le complexe double $C(J, P^*)$ nous avons

$$(4) \qquad {}''E_2^{p0}(C(J, P^*)) \approx {}''H^p('H^p(C(J, P^*))) : {}''E_2^{pq}(C(J, P^*)) = 0, \ q \geq 1.$$

Mais les suites semi-exactes $'H^n(C(J, P^*))$ et $'Z^p(J, P^*)$ sont isomorphes

et alors de (3) et de (4) nous obtenons

$${}''E_2^{p0}(C(J, P^*)) \approx H^p('Z^p(J, P^*)) \approx {}''E_2^{p0}('Z^p(J, P^*)).$$

Il résulte que l'inclusion i induit un isomorphisme entre les suites spectrales ${}''E_2$ attachées aux complexes $'Z^p(J, P^*)$ et $C(J, P^*)$. Donc ([1], §4.3, théorème 4.3.1) i induit un isomorphisme entre leurs groupes de cohomologie. Nous avons prouvé ainsi que les homomorphismes λ^p sont bijectifs. La démonstration s'achève en remarquant que λ^p sont aussi des isomorphismes parce que les systèmes projectifs P^p, $p \geq 0$, sont canoniques.

Théorème 2.2. *Soit $f : P^* \to Q^*$ un morphisme de systèmes projectifs différentiels sur le $\wedge$ demi-treillis $(I, \leq)$ et soit $J \in \mathcal{J}_I$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

a) *les systèmes projectifs P^p et Q^p sont canoniques pour $p \geq 0$;*

b) *les homomorphismes $\mathcal{H}^q(f) : \mathcal{H}^q(P^*) \to \mathcal{H}^q(Q^*)$, induits par f, sont bijectifs ;*

c) *les suites $H^q(J, P^*)$ et $H^q(J, Q^*)$ sont acycliques pour $q \geq 0$; alors les homomorphismes*

$$H^n(\varprojlim_{i \in I} f) : H^n(\varprojlim_{i \in I} (P^*)) \longrightarrow H^n(\varprojlim_{i \in I} (Q^*))$$

induits par f, sont bijectifs.

Démonstration. De la proposition 2.4, [5], résultent les isomorphismes

$${}''E_2^{pq}(C(J, P^*)) \approx H^p(J, \mathcal{H}^q(P^*)) : {}''E_2^{pq}(C(J, Q^*)) \approx H^p(J, \mathcal{H}^q(Q^*))$$

et alors de b) on déduit l'isomorphisme des suites spectrales ${}''E_2(C(J, P^*)) \to {}''E_2(C(J, Q^*))$. Donc f induit les isomorphismes

$$\tilde{f}^n : H^n(C(J, P^*)) \to H^n(C(J, Q^*))$$

entre les groupes de cohomologie des suites $C(J, P^*)$ et $C(J, Q^*)$ munies de leurs différentielles totales. Les systèmes projectifs P^p et Q^p étant canoniques, de c) il résulte que les homomorphismes λ^p sont bijectifs et en les composant avec $\tilde{f}^n$, nous obtenons le résultat cherché.

3. Soit P un système projectif de groupes abéliens sur le $\wedge$ demi-treillis $(I, \leq)$ et supposons que la suite

$$(5) \qquad 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\iota} P^0 \xrightarrow{d^0} \dots \longrightarrow P^q \xrightarrow{d^q} P^{q+1} \longrightarrow \dots$$

est une J-résolution de P pour $J \in \mathcal{J}_I$ ([4], définition 1.1). Nous pouvons associer à la suite semi-exacte

$$(P^*) \qquad 0 \longrightarrow P^0 \xrightarrow{d^0} \dots \longrightarrow P^q \xrightarrow{d^q} P^{q+1} \longrightarrow \dots$$

le complexe double $C(J, P^*) = \bigoplus_{p \geq 0, q \geq 0} C^p(J, P^q)$. Pour $n \geq 0$ définissons l'homomorphisme $j^n : C^n(J, P) \to \bigoplus_{p+q=n} C^p(J, P^q)$ de la manière suivante :

$$j^n(l) = (j_{j_0 \dots j_n}(j_{j_0 \dots \wedge j_k}))_{(j_0, \dots, j_n) \in \Sigma_n}$$

où $t=(t_{j_0\wedge\dots\wedge j_n})_{(j_0,\dots,j_n)\in\Sigma_n}\in C^n(J, P)$; j^n ainsi défini est monomorphisme parce que j est monomorphisme et de plus $\operatorname{Im} j^n=\operatorname{Ker} d^{n0}_{01}$.
D^n étant la différentielle totale du complexe $C(J, P^*)$, on a

$$D^n j^n t=j^{n+1}\,\delta^n t,$$

donc $\bar{j}=(j^n)_{n\geqslant 0}: C^*(J, P)\to C(J, P^*)$ est morphisme de suites semi-exactes. Soient alors

$$\bar{j}^n : H^n(J, P)\to H^n(C(J, P^*))$$

les homomorphismes induites par $\bar{j}$ entre les groupes de cohomologie des suites semi-exactes $C^*(J, P^*)$ et $C(J, P^*)$.

Proposition 3.1. *Si la suite (5) est une J-résolution du système projectif P alors pour tout $q\geqslant 1$*

$$'E_2^{pq}(C(J, P^*))=0.$$

Démonstration. La suite $(H^*_{j_0\wedge\dots\wedge j_p})$ étant exacte pour les termes $H^q_{j_0\wedge\dots<j_p}$, $q\geqslant 1$, il résulte $H^q(H^*_{j_0\wedge\dots\wedge j_0})=0$. D'autre part on a $C^p(J,\mathcal{H}^q(P^*))=$ $=0$, donc $H^p(J, \mathcal{H}^q(P^*))=0$, $q\geqslant 1$
et il suffit d'appliquer la proposition 2.4, [5].

Proposition 3.2. $\bar{j}^n : H^n(J, P)\to H^n(C(J, P^*))$
est isomorphisme pour tout $n\geqslant 0$.

Démonstration. Considérons $C^*(J, P)$ comme un complexe double dont la seconde différentielle est nulle. La première suite spectrale de $C^*(J, P)$ est alors donnée par

$$'E_2^{pq}(C^*(J, P))\approx {}'H^p({}''H^q(C^*(J, P))),$$

d'où il résulte

$$(6)\qquad 'E_2^{p0}(C^*(J, P))\approx H^p(C^*(J, P))=H^p(J, P)\ ;\quad 'E_2^{pq}(C^*(J, P))=0,\quad q\geqslant 1$$

Mais les complexes $''H^0(C(J, P^*))$ et $C^*(J, P)$ sont isomorphes et alors de (6) on déduit

$$'E_2^{p0}(C(J, P^*))\approx {}'H^p({}''H^0(C(J, P^*)))\approx H^p(J, P)\,.$$

D'après la proposition 3.1, $\bar{j}$ induit un isomorphisme des suites spectrales $'E_2$ associées aux complexes $C^*(J, P)$ et $C(J, P^*)$. Les filtrations de ces deux complexes étant régulières, il résulte que $\bar{j}^n$ est isomorphisme.

Supposons que les systèmes projectifs P^p, $p\geqslant 0$, sont canoniques. En composant $\bar{\lambda}^n$ et $(\bar{j}^n)^{-1}$ il résulte les homomorphismes suivantes

$$\mu^n : H^n(\varprojlim_{i\in I}\ (P^*))\to H^n(J, P)\,.$$

Compte tenu des propositions 2.5, [5] et 3.2, nous pouvons énoncer la

Proposition 3.3. *Pour toute J-résolution de la forme (5) du système projectif P il existe une suite spectrale pour laquelle*

$$E_2^{pq}\approx H^p(H^q(J, P^*)),$$

et dont le terme E_∞ est le groupe gradué associé à une filtration de la cohomologie Miron Pop du système projectif P.

Une propriété importante des homomorphismes μ^n est donnée dans le suivant

Théorème 3.1. *Supposons que (5) est une J-résolution des systèmes projectifs canoniques pour le système projectif P et que $J\in A_I$. Si*

$$H^p(H^q(J, P^*))=0\ ;\ p\geqslant 0,\ q\geqslant 1,$$

alors les homomorphismes μ^n sont bijectifs.

Démonstration. Le même raisonnement que celui présenté dans la démonstration du théorème 2.2 montre que les homomorphismes λ^n sont bijectifs. Du théorème 1.1 on déduit alors que $\bar{\lambda}^n$ sont des isomorphismes. μ^n s'obtient donc par la composition de deux isomorphismes.

Remarque 3.1. Le résultat précédent généralise le théorème 3.1 de [4].

Soit Q un système projectif sur le $\wedge$ demi-treillis $(I, \leqslant)$, $J\in A_I$ et supposons que la suite

$$(7)\qquad 0\longrightarrow Q\xrightarrow{\tilde{j}}Q^0\xrightarrow{\tilde{d}^0}\dots\longrightarrow Q^q\xrightarrow{\tilde{d}^q}Q^{q+1}\longrightarrow\dots$$

est une J-résolution de Q. Si $f: P^*\to Q^*$ est un morphisme des systèmes projectifs différentiels (P^*) et (Q^*), alors

$$\tilde{f}^1 d^0=\tilde{d}^0 f^0,$$

donc $f^0\,(\operatorname{Ker} d^0)\subseteq\operatorname{Ker}\tilde{d}^0$. Mais (5) et (7) sont des J-résolution pour les systèmes projectifs P, resp. Q et alors

$$\operatorname{Ker} d^0=j(P)\ ;\qquad\qquad \operatorname{Ker}\tilde{d}^0=\tilde{j}(Q),$$

ce qui montre que $f^0\,j(P)\subseteq\tilde{j}(Q)$. $\tilde{j}: Q\to\operatorname{Ker}\tilde{d}^0$ étant isomorphisme, il en résulte que le morphisme f induit un morphisme de systèmes projectifs

$$g=\tilde{j}^{-1}\,f^0\,j : P\to Q$$

Théorème 3.2. *Soient P et Q deux systèmes projectifs sur le $\wedge$ demi-treillis $(I, \leqslant)$, ayant les J-résolutions (5), resp. (6), formées de systèmes projectifs canoniques. Pour tout morphisme de systèmes projectifs différentiels $f:(P^*)\to(Q^*)$ sont commutatifs les diagrammes suivants*

$$\begin{array}{ccc} H^n(\varprojlim_{i\in I}\ (P^*)) & \xrightarrow{\mu^n} & H^n(J, P) \\ {\scriptstyle H^n(\varprojlim f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^n} \\ H^n(\varprojlim_{i\in I}\ (Q^*)) & \xrightarrow{\mu^n} & H^n(J, Q) \end{array}$$

Démonstration. Pour $t\in C^n(J, P)$ et $(j_0,\dots,j_n)\in\Sigma_n$ on a

$$(8)\qquad (\tilde{j}\,\bar{j}\,t)_{j_0\wedge\dots\wedge j_n}=(\tilde{j}\,\tilde{g}\,t)_{j_0\wedge\dots\wedge j_n},$$

où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont les extensions de f, resp. g, aux groupes de cochaines. En passant aux groupes de cohomologie, de (8) nous obtenons le diagramme commutatif

$$
(9) \qquad \begin{array}{ccc}
H^n(J, P) & \xrightarrow{\tilde{f}^n} & H^n(C(J, P^\cdot)) \\
\tilde{g}^n \downarrow & & \downarrow \tilde{f}^n \\
H^n(J, Q) & \xrightarrow{\tilde{f}^n} & H^n(C(J, Q^\cdot))
\end{array}
$$

D'autre part est commutatif le diagramme

$$
(10) \qquad \begin{array}{ccc}
H^n(\varinjlim_{i\in I} (P^\cdot)) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}^n} & H^n(C(J, P^\cdot)) \\
H^n(\varinjlim_{i\in I} f) \downarrow & & \downarrow \tilde{f}^n \\
H^n(\varprojlim_{i\in I} (Q^\cdot)) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}^n} & H^n(C(J, Q^\cdot))
\end{array}
$$

$\tilde{f}^n$ étant isomorphisme (proposition 3.2), des diagrammes (9) et (10) nous obtenons le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

1. Godement, R. — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1973.
2. Miron, R., Pop, I. — *Topologie algebrică — omologie, omotopie, spații de acoperire*. Editura Academiei R.S.R., București, 1974.
3. Miron, R., Pop, I. — *On the abstract Čech homology and cohomology*. *Proceedings of the Institute of Mathematics*, Iași, (1974), 57—60.
4. Pitiș, Gh. — *Une méthode de calcul des groupes de cohomologie de Čech abstraite*. Mémoires Academiei R.S.R., tom. 11(1979), 87—96.
5. Pitiș, Gh. — *Suites spectrales en cohomologie de Čech abstraite*. Bull. de la Soc. des Sci. Math. de la R.S.R., (à paraître).

Received 15.V. 1982

Université de Brașov
Str. Karl Marx, 50
2200 — Brașov, Romania

ANALELE ȘTIINȚIFICE ALE UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA" DIN IAȘI
Tomul XXX, s.I a. Matematică, 1984—3

A GEOMETRICAL CHARACTERIZATION OF NORMAL FINSLER CONNECTION

BY

EMIL STOICA

1. In the paper [4], R. Miron defines the notion of Finsler connection on vectorial bundles and establishes that locally, these are characterized by four coeficients $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{1}{C}$, $\overset{2}{C}$.

In the particular case of the tangent bundle the Finsler connection which is so obtained is more general then that known so far. The classical connections are obtained if the conditions $\overset{1}{F}=\overset{2}{F}$ and $\overset{1}{C}=\overset{2}{C}$, are satisfied.

In this paper, by means of the natural almost complex structure of tangent bundle endowed with a nonlinear connection, we give a geometrical characterization of these connections.

The terminology and notations are those of the paper [4].

The author wishes to express his sincer gratitude to Prof. R. Miron for his kindness and invaluable suggestions.

2. Let M be an n-dimensional differentiable manifold, $T(M)=(TM, \Pi, M)$ the tangent bundle, N a nonlinear connection, VTM and HTM the vertical and horizontal subbundles of TTM.

R. Miron defines a Finsler connections on TM as a linear connection ∇ on TM, which preserves by parallelism the horizontal N and vertical TM^V distributions.

It is known that a Finsler connection ∇ on TM is then characterized by conditions: $(\nabla_X Y^H)^V=0$ and $(\nabla_X Y^V)^H=0$. Putting $\nabla_X Y=\nabla_X^H Y+\nabla_X^V Y$, where $\nabla_X^H Y=\nabla_{X^H} Y$ and $\nabla_X^V Y=\nabla_{X^V} Y$, two covariant derivative operators ∇^H and ∇^V in the algebra of Finsler tensors fields on TM, are obtained.

In canonical coordinates, those covariant derivatives are expressed as:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\nabla_\delta^H}{\delta x^k}\frac{\delta}{\delta x^j}=\overset{1}{F}{}^i_{jk}\frac{\delta}{\delta x^i}, \quad \frac{\nabla_\delta^H}{\delta x^k}\frac{\partial}{\partial y^j}=\overset{2}{F}{}^i_{jk}\frac{\partial}{\partial y^i} \\
&\frac{\nabla_\partial^V}{\partial y^k}\frac{\delta}{\delta x^j}=\overset{1}{C}{}^i_{jk}\frac{\delta}{\delta x^i}, \quad \frac{\nabla_\partial^V}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^j}=\overset{2}{C}{}^i_{jk}\frac{\partial}{\partial y^i}
\end{aligned}
$$

where $\delta/\delta x^i=\partial/\partial x^i-N^j_i\partial/\partial y^j$, $i, j=1, 2, \ldots, n$ is a local base of horizontal distribution N and $\{\partial/\partial y^i\}$, $i=1, 2, \ldots, n$ is a local base of vertical distribution TM^V.

Definition. *We call a normal Finsler connection on TM, a Finsler connection ∇ on TM whose coefficients of connection, given by* (1), *have the property:*

$$
(2) \qquad \overset{1}{F}{}^i_{jk}(x, y)=\overset{2}{F}{}^i_{jk}(x, y), \quad \overset{1}{C}{}^i_{jk}(x, y)=\overset{2}{C}{}^i_{jk}(x, y).
$$