$$u(x) \leqslant \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\{1+G[H^{-1}(\int_0^x h(s)Q(\tilde{g}(s))ds)]\} \tag{54}$$

provided that

$$H(\int_0^x h(s)Q(\tilde{g}(s))ds) < H(\infty). \tag{55}$$

Proof. Denoting

$$F(x)=f(x)+g(x)G(\int_0^x h(s)Q(u(s))ds), \quad x \geqslant 0, \tag{56}$$

we obtain from (51)

$$u(x) \leqslant F(x)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^x g_i(x, s)\,(u(s))^{r_i}ds, \quad x \geqslant 0, \tag{57}$$

which, according to the Proposition 5, implies

$$u(x) \leqslant F(x)\prod_{i=1}^{m} G_i(x), \quad x \geqslant 0. \tag{58}$$

From (56) and (58), it follows

$$u(x) \leqslant \tilde{f}(x)+\tilde{g}(x)\,G(\int_0^x h(s)Q(u(s))ds), \quad x \geqslant 0 \tag{59}$$

where $\tilde{f}$ and $\tilde{g}$ are given by (53). We make use of Yeh's result ([2], Theorem 3) to obtain the majoration (54). A similar result with the preceding Proposition 6 is Theorem 3 of the paper [3].

REFERENCES

1. Conlan J., Wang C. L. — *Higher dimensional Gronwall-Bellman type inequalities.* Applicable Analysis, 1984, vol. 18, pp. 1–12
2. Yeh C. C. — *Bellman-Bihari integral inequalities in several independent variables.* J. of Math. Anal. and Appl., 87 (1982), pp. 311–321
3. Beesack P. R. — *On some Gronwall-type integral inequalities in n independent variables.* Journal of Math. Anal. and Appl. 100 (1984), pp. 393–408
4. Yang E. H. — *Boundedness conditions for solutions of the differential equation* $(a(t)x')'+f(t, x)=0$. Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. Vol. 8 (1984), pp. 541–547

Received 23.IV.1985

Department of Mathematics
Polytechnical Institute
6600 Iaşi, Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I. a, Matematică, 1985, f. 3

SUR DE L'ETAT DE CONTRAINTE PLAN DES CORPS ORTHOTROPES AVEC ECROUISSAGE

PAR

V. DIACONIŢA

Dans ce travail on montre l'existence et l'uni ité de la solution faible du problème de l'état de contrainte plan des corps orthotropes avec écrouissage. On considère que les limites d'écoulement augmentent proportionnellement avec un paramètre qui dépend de l'histoire de la déformation.

1. Considérations sur la plasticité des corps orthotropes avec écrouissage. Si l'on considère que la pression hydrostatique n'influence pas l'écoulement, alors la condition de plasticité pour les corps orthotropes sans écrouissage se présente sous la forme [2] :

$$\begin{aligned} K_{23}(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+K_{31}(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+K_{12}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+K_{44}\sigma_{23}^2+ \\ +K_{55}\sigma_{31}^2+K_{66}\sigma_{12}^2=1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où K_{ij} sont les paramètres qui caractérisent l'état d'écoulement anisotrope et σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes.

En désignant par X_{ij} les limites d'écoulement à l'extension et au glissement par rapport aux axes d'anisotropie nous avons :

$$\begin{aligned} &2K_{23}=\frac{1}{X_{22}^2}+\frac{1}{X_{33}^2}-\frac{1}{X_{11}^2}, \quad 2K_{31}=\frac{1}{X_{33}^2}+\frac{1}{X_{11}^2}-\frac{1}{X_{22}^2}, \\ &2K_{12}=\frac{1}{X_{11}^2}+\frac{1}{X_{22}^2}-\frac{1}{X_{33}^2}, \quad K_{44}=\frac{1}{X_{23}^2}, \quad K_{55}=\frac{1}{X_{31}^2}, \quad K_{66}=\frac{1}{X_{12}^2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

De (1.2) on observe que les paramètres K_{44}, K_{55}, K_{66} sont positifs, et

$$K_{23}+K_{31}>0, \; K_{31}+K_{12}>0, \; K_{12}+K_{23}>0, \; K_{23}+K_{31}+K_{12}>0. \tag{1.3}$$

Nous considérons, comme en [2], [1], que dans le processus de chargement, les limites d'écoulement augmentent proportionnellement, c'est-à-dire $X_{ij}=hX_{ij}^0$, où nous avons noté avec l'indice zéro les valeurs initiales des limites d'écoulement et où h est un paramètre monotone croissant à partir de 1 et qui exprime la grandeur de l'écrouissage. Les paramètres K_{ij} décroissent comme $1/h^2$. En tenant compte de ce fait, de (1.1) nous déduisons :

$$\begin{aligned} K_{23}^0(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+K_{31}^0(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+K_{12}^0(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+K_{44}^0\sigma_{23}^2+ \\ +K_{55}^0\sigma_{31}^2+K_{66}^0\sigma_{12}^2=h^2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

où K^0_{ij} sont les valeurs initiales des K_{ij}.

Pour écrire les équations qui caractérisent les corps orthotropes avec écrouissage du type considéré ci-dessus, il est nécessaire de connaitre h comme une fonction des déformations ε_{ij}. Dans ce but nous introduisons les expressions [1] :

$$T=\frac{1}{\sqrt{B}}[K^0_{23}(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+K^0_{31}(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+K^0_{12}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+ +K^0_{44}\sigma^2_{23}+K^0_{55}\sigma^2_{31}+K^0_{66}\sigma^2_{12}]^{1/2}, \tag{1.5}$$

$$\Gamma=\sqrt{B}\Big[A_2\{K^0_{23}(K^0_{31}\varepsilon_{22}-K^0_{12}\varepsilon_{33})^2+K^0_{31}(K^0_{12}\varepsilon_{33}-K^0_{23}\varepsilon_{11})^2+ +K^0_{12}(K_{23}\varepsilon_{11}-K_{31}\varepsilon_{22})^2\}+\frac{4}{K^0_{44}}\varepsilon^2_{23}+\frac{4}{K^0_{55}}\varepsilon^2_{31}+\frac{4}{K^0_{66}}\varepsilon^2_{11}\Big]^{1/2}, \tag{1.6}$$

où

$$B=2(K^0_{23}+K^0_{31}+K^0_{12}),\quad A=K^0_{23}K^0_{31}+K^0_{31}K^0_{12}+K^0_{12}K^0_{23}, \tag{1.7}$$

que nous nommons intensité généralisée des tensions tangentielles, respectivement intensité généralisée de glissement. Alors, si le corps est isotrope ($K^0_{44}=K^0_{55}=K^0_{66}=6K^0_{23}=6K^0_{31}=6K^0_{12}$), les expressions (1.5) et (1.6) se réduisent à l'intensité des tensions tangentielles, respectivement l'intensité des déformations de glissement [3].

Nous supposons [1] qu'entre T et Γ il existe une relation de la forme

$$T=g(\Gamma^2)\Gamma, \tag{1.8}$$

où g est une fonction caractéristique du matériel donné.

On admet qu'on peut écrire (1.8) sous la forme :

$$\Gamma=f(T^2)T, \tag{1.9}$$

avec $f(T^2)=1/g(T^2)$.

De (1.4) et (1.8) on trouve

$$h=\sqrt{B}g(\Gamma^2)\Gamma. \tag{1.10}$$

Nous supposons que la fonction $\Gamma=\Gamma(T)$ est strictement croissante et dans la fonction f satisfait à la condition.

$$f(T^2)+2f'(T^2)T^2>0. \tag{1.11}$$

Avec la croissance de l'intensité généralisée des déformations Γ, l'écrouissage se développe et l'intensité généralisée des tensions tangentielles augmente. De cette manière, à chargement $dT>0$, à déchargement $dT\leqslant 0$ et pour $dT=0$ nous avons un processus de chargement neutral.

En tenant compte de (1.9), les relations entre les déformations et les tensions peuvent être mises sous la forme

$$\varepsilon_{11}=[K^0_{31}K^0_{12}/(3AV^*)]\sigma^*+(1/B)f(T^2)[(K^0_{12}+K^0_{31})\sigma_{11}-K^0_{12}\sigma_{22}-K^0_{31}\sigma_{33}],$$
$$\varepsilon_{22}=[K^0_{12}K^0_{23}/(3AV^*)]\sigma^*+(1/B)f(T^2)[(K^0_{23}+K^0_{12})\sigma_{22}-K^0_{23}\sigma_{33}-K^0_{12}\sigma_{11}],$$

$$\varepsilon_{33}=[K^0_{23}K^0_{31}/3AV^*)]\sigma^*+(1/B)f(T^2)[(K^0_{31}+K^0_{23})\sigma_{33}-K^0_{31}\sigma_{11}-K^0_{23}\sigma_{22}], \tag{1.12}$$
$$\varepsilon_{23}=[K^0_{44}/(2B)]f(T^2)\sigma_{22},\ \varepsilon_{31}=[K^0_{55}/(2B)f(T^2)\sigma_{31},\ \varepsilon_{12}=[K^0_{66}/(2B)f(T^2)\sigma_{12},$$

où, d'après [6]

$$\sigma^*=\bar{A}_{klmn}\sigma_{kl}\delta_{mn},\quad \sigma^*=3V^*\varepsilon,\quad \varepsilon=\varepsilon_{kl}\delta_{kl},\quad \varepsilon_{kl}=A_{klmn}\sigma_{mn},$$
$$\bar{A}_{kkll}=2G^*[A_{kkll}-\Omega(A_{11kk}+A_{22kk}+A_{33kk})(A_{11ll}+A_{22ll}+A_{33ll})],$$
$$\bar{A}_{klmm}=0 \text{ pour } k\neq l;\ \Omega=V^*\left(1-\frac{3V^*}{2G^*}\right),$$
$$\frac{1}{V^*}=A_{1111}+A_{2222}+A_{3333}+2(A_{2233}+A_{3311}+A_{1122}),$$
$$\frac{1}{G^*}=\frac{2}{3}(A_{1111}+A_{2222}+A_{3333}-A_{2233}-A_{3311}-A_{1122}).$$

si le corps est isotrope les relations (1.12) se réduisent aux relations du cas isotrope avec écrouissage [3].

2. La formulation mathématique du problème de l'état de contrainte plan. L'état de contrainte plan est réalisé de façon approximative dans une plaque mince qui se déforme sous l'action des forces se trouvant dans son plan moyen. On considère que le matériel est orthotrope avec écrouissage (relation (1.8) ou (1.9)) et

$$A_{1111}+A_{2222}+A_{3333}+2(A_{2233}+A_{3311}+A_{1122})=0. \tag{2.1}$$

Dans ce cas les composantes de la contrainte σ_{33}, σ_{31}, σ_{23} dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) sont nulles et les composantes σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} sont indépendantes de la coordonée x_3. Les relations entre les déformations et les tensions dans notre cas se présentent sous la forme suivante

$$\varepsilon_{11}=(1/B)f(T^2)[(K^0_{12}+K^0_{31})\sigma_{11}-K^0_{12}\sigma_{22}],$$
$$\varepsilon_{22}=(1/B)f(T^2)[(K^0_{23}+K^0_{12})\sigma_{22}-K^0_{12}\sigma_{11}], \tag{2.2}$$
$$\varepsilon_{33}=-(1/B)f(T^2)[K^0_{31}\sigma_{11}+K^0_{23}\sigma_{22}],\ \varepsilon_{12}=(K^*_{66}/2B)f(T^2)\sigma_{12},$$

où

$$T^2=(1/B)[(K^0_{12}+K^0_{23})\sigma^2_{22}+(K^0_{12}+K^0_{31})\sigma^2_{11}-2K^0_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}+K^0_{66}\sigma^2_{12}]. \tag{2.3}$$

Pour les tensions σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} nous avons le système d'équations déterminé par :

I. Les équations de l'équilibre, qui, en l'absence de forces de volume, se réduisent à

$$\sigma_{ij,j}=0. \tag{2.4}$$

II. Les équations de compatibilité, qui en vertu de (2.2) prennent la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{1}{B}f(T^2)[(K_{12}^0+K_{31}^0)\sigma_{11}-K_{12}^0\sigma_{22}]\right\}+$$

(2.5)

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{1}{B}f(T^2)[(K_{23}^0+K_{12}^0)\sigma_{22}-K_{12}^0\sigma_{11}]\right\}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[\frac{K_{66}^0}{B}f(T^2)\sigma_{12}\right]=0.$$

III. Les conditions à la limite

(2.6) $\sigma_{11}\cos(n_1x_1)+\sigma_{12}\cos(n_1x_2)=X_n^1,\quad \sigma_{12}\cos(n_1x_1)+\sigma_{22}\cos(n_1x_2)=X_n^2,$

où X_n^1 et X_n^2 sont les projections sur Ox_1 et Ox_2 des forces extérieures appliquées sur la frontière S, et n le vecteur de la normale extérieure. En introduisant la fonction d'Airy par

(2.7) $$\sigma_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\quad \sigma_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\quad \sigma_{12}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},$$

les équations d'équilibre (2.4) sont identiquement satisfaites.

En introduisant les valeurs (2.7) en (2.5), on trouve pour la détermination de la fonction $u(x_1, x_2)$ l'équation non linéaire

$$Pu\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{1}{B}f(T^2)\left[(K_{23}^0+K_{12}^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-K_{12}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]\right\}+$$

(2.8)

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[\frac{K_{66}^0}{B}f(T^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{1}{B}f(T^2)\left[(K_{12}^0+K_{31}^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-K_{12}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right]\right\}=0,$$

où

(2.9)

$$T^2=\frac{1}{B}\left[(K_{12}^0+K_{23}^0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+(K_{12}^0+K_{31}^0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2K_{12}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+K_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right].$$

Les conditions à la limite (2.6) sont équivalentes à

(2.10) $$u\Big|_S=\varphi_1(s),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\varphi_2(s).$$

Nous concluons donc que la solution du problème de l'état de contrainte plastique plan revient à la détermination de la fonction $u(x_1, x_2)$ qui satisfait dans Ω à l'équation (2.8) et sur S aux conditions (2.10).

3. **L'existence et l'unicité de la solution faible du problème de l'état de contrainte plastique plan.** Considérons l'opérateur P défini sur $M=W_2^4(\Omega)$, les dérivées sont prises dans le sens de la théorie des distributions. On désigne par M^0 l'ensemble des fonctions dans $W_2^4(\Omega)$ qui s'annulent sur S avec les dérivées de premier ordre.

Nous supposons que la fonction du matériel f satisfait aux conditions :

a) la fonction f est trois fois continuement différentiable dans Ω ;
b) $c_1<f(\xi^2)<c_2$; $c_1c_2=$ctes. positives ;
c) $c_3\leq f(\xi^2)+2f'(\xi^2)\xi^2<c_4$; $c_3, c_4=$ctes. positives.

Théorème 3.1. *Si la fonction du matériel f satisfait aux conditions a), b), c) alors :*

1. *L'opérateur P admet une différentielle Gâteaux, quelle que soient $u, h\in M$, linéaire en h, continue avec u dans chaque hyperplan qui contient u.*
2. $(P'_u h_1, h_2)=(P'_u h_2, h_1)$, quelles que soient $u\in M$, $h_1, h_2\in M^0$,
3. $(P'_u h, h)>0$, quelles que soient $u\in M$, $h\in M^0$, $h\neq 0$.

Démonstration. 1. En effet pour $u, h\in M$ nous avons

$$P'_u h=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{1}{B}f(T^2(u))\left[(K_{23}^0+K_{12}^0)\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}-K_{12}^0\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{B}f'(T^2(u))T^2(u,h)\left[(K_{23}^0+K_{12}^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-K_{12}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]\right\}+$$

(3.1)

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[\frac{K_{66}^0}{B}f(T^2(u))\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{K_{66}^0}{B}f'(T^2(u))T^2(u,h)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{1}{B}f(T^2(u))\left[(K_{12}^0+K_{31}^0)\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}-K_{12}^0\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{B}f'(T^2(u))T^2(u,h)\left[(K_{12}^0+K_{31}^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-K_{12}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right]\right\},$$

où

$$T^2(u,h)=\frac{1}{B}\left[(K_{12}^0+K_{23}^0)\frac{\partial^2 u\partial^2 h}{\partial x_1^2\partial x_1^2}+(K_{12}^0+K_{31}^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}-\right.$$

(3.2)

$$\left.-K_{12}^0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right)+K_{66}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\partial x_2}\right].$$

2. Pour $u\in M$, $h_1, h_2\in M^0$ nous avons

(3.3) $$(P'_u h_1, h_2)=\int_\Omega h_2 P'_u h_1 d\Omega.$$

En utilisant la relation (3.1) on trouve

(3.4) $$(P'_u h_1, h_2)=\int_\Omega [f(T^2u))T^2(h_1,h_2)+2f'(T^2(u))T^2(u,h_1)T^2(u,h_2)]d\Omega=$$
$$=(P'_u h_2, h_1).$$

3. Pour $u\in M$, $h_1=h_2=h\in M^0$, $h\neq 0$, de (3.4) il résulte

(3.5) $$(P'_u h, h)=\int_\Omega\{f(T^2(u))T^2(h)+2f'(T^2(u))[T^2(u,h)]^2\}d\Omega.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy

(3.6) $$|T^2(u,h)|\leq T(u)T(h),$$

de (3.5), il résulte

$$(3.7)\qquad (P'_u h, h) \geq \int_\Omega [f(T^2(u)) - 2f'_-(T^2(u))T^2(u)]T^2(h)d\Omega,$$

où f' désigne la partie negative de la fonction f'. Si $f' \geq 0$, alors $f' = 0$; d'où, vu (3.7) et b)

$$(3.8)\qquad (P'_u h, h) > c_1 \int_\Omega T^2(h)d\Omega.$$

Si $f' < 0$ alors $f' = -f'$; d'où, vu (3.7) et c)

$$(3.9)\qquad (P'_u h, h) \geq c_3 \int_\Omega T^2(h)d\Omega.$$

De (3.8) et (3.9) résulte

$$(3.10)\qquad (P'_u h, h) > c \int_\Omega T^2(h)d\Omega, \quad c = \min(c_1, c_3).$$

En tenant compte que pour $h \in M^3$ nous avons

$$(3.11)\qquad \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] d\Omega = 0,$$

en supposant $K_{66}^0 - 2K_{12}^0 > 0$, nous avons

$$(3.12)\qquad \int_\Omega T^2(h)d\Omega > 0,$$

et donc

$$(3.13)\qquad (P'_u h, h) > 0.$$

Soit v une fonction admise par l'opérateur P qui satisfait aux conditions (2.10). En posant $u = v + w$, nous avons pour la détermination de la fonction w

$$(3.14)\qquad P(v+w) = 0, \quad w\Big|_S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

or

$$(3.15)\qquad Q(w) = q, \quad w\Big|_S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

où

$$Q(w) = P(v+w) - P(v).$$

L'opérateur Q possède la même propriété que l'opérateur P. Du théorème (3.1) et du résultat de [4] il résulte que $w_0 \in M^6$ qui réalise le minimum de la fonctionnelle

$$(3.16)\qquad \Phi(w) = \int_0^1 (P(v+tw), w)dt = \frac{1}{2}\int_\Omega d\Omega \int_{T^2(v)}^{T^2(v+w)} f(\xi^2)d\xi,$$

est la solution du problème (3.14) or (3.15). Nous avons démontré que la fonctionnelle Φ admet un minimum unique sur $\mathring{W}_2^2(\Omega)$.

Lemme 3.1. *La norme dans $W_2^2(\Omega)$ sur le sousespace $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ est équivalente avec*

$$(3.17)\qquad |w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} = \int_\Omega T^2(w)d\Omega.$$

Démonstration. En effet, d'une part

$$(3.18)\qquad \begin{aligned} |w|^2_{W_2^2(\Omega)} &= \int_\Omega w^2 d\Omega + \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] d\Omega + \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \right. \\ &\left. + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right] d\Omega \leq \\ &\leq \frac{(1+\varkappa+\varkappa^2)}{k\beta}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varkappa_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right] d\Omega \leq \\ &\leq \frac{1+\varkappa+\varkappa^2}{KB}\int_\Omega \left[(K_{12}^0 + K_{23}^0)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + (K_{66}^0 - 2K_{12}^0)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \right. \\ &\left. + (K_{12}^0 + K_{31}^0)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right] d\Omega = \frac{1+\varkappa+\varkappa^2}{K}\int_\Omega T^2(w)\, d\Omega = \gamma |w|^2_{W_2^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé l'inégalité de Friedrichs et la relation (3.11) pour $w \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ mais

$$K = [\min\{K_{12}^0 + K_{23}^0,\ 1/2(K_{66}^0 - 2K_{12}^0),\ K_{12}^0 + K_{31}^0\},\ \gamma = (1+\varkappa+\varkappa^2)/K,$$

$\varkappa$ est la constante de Friedrichs.

D'autre part

$$(3.19)\qquad \begin{aligned} |w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} &= \int_\Omega T^2(w)d\Omega \leq \frac{K_1}{B}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right] d\Omega \leq \\ &\leq \int w^2 d\Omega + \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right] d\Omega + \\ &+ \frac{K_1}{B}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right] d\Omega \leq \delta |w|^2_{W_2^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

où $\delta = \max(1, K_1/B)$, $K_1 = \max\{X_{12}^0 + K_{23}^0,\ 1/2(K_{66}^0 - 2K_{12}^0),\ K_{12}^0 + K_{31}^0\}$.

De (3.18) et (3.19) il résulte

$$(3.20)\qquad \frac{1}{\delta}|w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} \leq |w|^2_{W_2^2(\Omega)} \leq \gamma |w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}.$$

Théorème 3.2. *Si la fonction du matériel f satisfait aux conditions a), b), c) alors*

1. *La fonctionnelle Φ est faiblement semi-continue.*
2. *La fonctionnelle Φ est strictement convexe.*
3. *La fonctionnelle Φ est croissante.*

Démonstration. Tenant compte de (3.16) il résulte

$$(3.21)\qquad D\Phi(w, h) = \int_\Omega f(T^2(v+w))T^2(v+w, h)d\Omega,$$

et

$$(3.22)\qquad D^2\Phi(w\,;h, h) = \int_\Omega \{f(T^2(v+w))T^2(h) + 2f'(T^2(v+w))[T^2(v+w, h)]^2\}d\Omega$$

Procédant comme dans la démonstration de la relation (3.13) on obtient

$$D^2\Phi(w\,;\,h,h) > c\,|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}, \tag{3.23}$$

et d'après [7] il résulte 1° et 2°.

3. En utilisant la condition b) nous avons

$$\begin{aligned}\Phi(w) &> \frac{c_1}{2}\int_\Omega [T^2(v+w)-T^2(v)]d\Omega = \frac{c_1}{2}\int_\Omega [T^2(w)+2T^2(v\,w)]d\Omega = \\ &= \frac{c_1}{2}|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)} + c_1\int_\Omega T^2(v,w)d\Omega.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Si $T^2(v,w)\geqslant 0$ alors

$$\Phi(w) > \frac{c_1}{2}|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}. \tag{3.25}$$

Si $T^2(v,w)<0$, en utilisant l'inégalité (3.6), on a :

$$\Phi(w) > \frac{c_1}{2}|w|^2_{W^2_2(\Omega)} - c_1|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}\int_\Omega [T^2(v)]^{1/2}d\Omega. \tag{3.26}$$

De (3.25) et (3.26) il résulte

$$\lim_{|w|_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}\to+\infty} \Phi(w) = +\infty \tag{3.27}$$

et donc d'après [7] la fonctionnelle Φ est croissante. Du théorème (3.1) et (3.2) et aussi [5], [7] nous énonçons :

Théoremè 3.3. *Si la fonction du matériel f satisfait aux conditions a) b), c) alors il existe un seul point w_0 de minimum absolu de la fonctionnelle Φ appartenant à l'espace $\mathring{W}^2_2(\Omega)$. Chaque suite minimisante de la fonctionnelle Φ converge faiblement à w_0.*

La fonction $u=v+w_0$ est la solution faible du problème d'état de contrainte plastique plan des corps orthotrope avec écrouissage.

BIBLIOGRAPHIE

1. Diaconiţa V. — *Sur la torsion plastique des barres orthotropes.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. techn., XIX, nr. 1 (1971),
2. Hill R. — *A theory of fielding and plastic flow of anisotropic metals.* Proc. Roy. Soc. Series A 193 (1948).
3. Katchanov L. — *Eléments de la théorie de la plasticité.* Editions Mir — Moscou 1975
4. Langenbach A. — *Variationsmethoden in der nichtlincaren Elastizitäts und Plastizitätstheorie.* Wiss. Z. Humboldt Univ. Berlin, Math. — Nat R., IX 1959/1960
5. Mikhlin S.G. — *Problema minimuma kvadratichnogo funktionala.* Moskva — Leningrad, 1952
6. Olszak W., Urbanowski W. — *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies.* Arch. Mech. Stos. 8 (1956)
7. Vainberg M.M. — *Le problème de la minimisation des fonctionnelles non linéaires.* Summer courses, Varenna, 1970

Reçu le 4. IV 1985

Faculté de Mathématiques
Université de Iassy
R.S. Roumannie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 3.

LES FLOTS DYNAMIQUES MAXIMAUX SPECIAUX

PAR

ELEONOR CIUREA

1. Les flots dynamiques maximaux. Soit $G=(X, A)$, un graphe connexe avec $X=\{x_1,\dots, x_i,\dots, x_n\}$ l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs. Soit l'ensemble $P=\{0, 1,\dots,p\}$ et N l'ensemble des nombres naturels. On définit la fonction temps $h: A\to N$ et la fonction capacité $c: A\times P\to N$, où $h_{ij}=h(x_i, x_j)$, $c_{ijt}=c(x_i, x_j\,;\,t)$ représentent le temps de parcours, respectivement la capacité de l'arc $(x_i, x_j)\in A$ à l'instant t. On note par x_1 la source et par x_n le puits du réseau.

Le problème du flot dynamique pour p périodes de temps, peut être formuté de la manière suivante. Déterminer la fonction $f: A\times P\to N$, $f_{ijt}=(x_i, x_j\,;\,t)$, qui doit satisfaire

$$\sum_{x_j} f(x_i, x_j\,;\,t) - \sum_{x_k} f(x_k, x_i\,;\,s) = \begin{cases} v(x_1, t), & \text{si } i=1 \\ 0, & \text{si } i\neq 1, n, \\ -v(x_n, t), & \text{si } i=n, \end{cases} \tag{1}$$

$$s=t-h_{ki},\ t=0, 1,\dots,p-h_{ij},$$

$$v(p)=\sum_{t=0}^{p} v(x_1, t)=\sum v(x_n, t), \tag{2}$$

$$0\leqslant f(x_i, x_j\,;\,t)\leqslant c(x_i, x_j\,;\,t), \tag{3}$$

$$(x_i, x_j)\in A,\ t=0, 1,\dots,p-h_{ij},$$

$$\max v(p). \tag{4}$$

Dans [2], [3] on montre qu'un flot dynamique pour p périodes de temps dans le réseau G est équivalent à un flot dynamique pour p périodes dans un réseau G_p, où G_p est un sous-graphe de G. Aussi, un flot dynamique pour p périodes en réseau G_p est équivalent à un flot statique dans un réseau $G_p(p)$, où $G_p(p)$ est un réseau agrandi en temps de réseau G_p.

Soit d_i la valeur du plus court chemin (par rapport au temps de parcours) de x_1 à x_i et $\bar{d}_i$ la valeur du plus court chemin de x_i à x_n. Nous avons $d_1=0$, $d_n=\bar{d}_1$, $\bar{d}_n=0$. Soient les ensembles $P_i=t|t\in P,\ d_i\leqslant t\leqslant p-\bar{d}_i\}$, $x_i\in X$, $P_{ij}=\{t|t\in P,\ d_i\leqslant t\leqslant p-(h_{ij}+\bar{d}_j)\}$, $(x_i, x_j)\in A$. Il est évident que les ensembles $P_1\neq\varnothing$, $P_n\neq\varnothing$ sont de la forme $P_1=\{0, 1,\dots,p-d_n\}$, $P_n=\{d_n, d_n+1,\dots,p\}$. Nous notons : $\bar{P}_i=P-P_i$, $\bar{P}_{ij}=P-P_{ij}$.