Procédant comme dans la démonstration de la relation (3.13) on obtient

$$D^2\Phi(w\,;\,h,h) > c\,|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}, \tag{3.23}$$

et d'après [7] il résulte 1° et 2°.

3. En utilisant la condition b) nous avons

$$\begin{aligned}\Phi(w) &> \frac{c_1}{2}\int_\Omega [T^2(v+w)-T^2(v)]d\Omega = \frac{c_1}{2}\int_\Omega [T^2(w)+2T^2(v\,w)]d\Omega = \\ &= \frac{c_1}{2}|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)} + c_1\int_\Omega T^2(v,w)d\Omega.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Si $T^2(v,w)\geqslant 0$ alors

$$\Phi(w) > \frac{c_1}{2}|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}. \tag{3.25}$$

Si $T^2(v,w)<0$, en utilisant l'inégalité (3.6), on a :

$$\Phi(w) > \frac{c_1}{2}|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)} - c_1|w|^2_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}\int_\Omega [T^2(v)]^{1/2}d\Omega. \tag{3.26}$$

De (3.25) et (3.26) il résulte

$$\lim_{|w|_{\mathring{W}^2_2(\Omega)}\to+\infty} \Phi(w) = +\infty \tag{3.27}$$

et donc d'après [7] la fonctionnelle Φ est croissante. Du théorème (3.1) et (3.2) et aussi [5], [7] nous énonçons :

Théoremè 3.3. *Si la fonction du matériel f satisfait aux conditions a) b), c) alors il existe un seul point w_0 de minimum absolu de la fonctionnelle Φ appartenant à l'espace $\mathring{W}^2_2(\Omega)$. Chaque suite minimisante de la fonctionnelle Φ converge faiblement à w_0.*

La fonction $u=v+w_0$ est la solution faible du problème d'état de contrainte plastique plan des corps orthotrope avec écrouissage.

BIBLIOGRAPHIE

1. Diaconiţa V. — *Sur la torsion plastique des barres orthotropes.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. techn., XIX, nr. 1 (1971),
2. Hill R. — *A theory of fielding and plastic flow of anisotropic metals.* Proc. Roy. Soc. Series A 193 (1948).
3. Katchanov L. — *Eléments de la théorie de la plasticité.* Editions Mir — Moscou 1975
4. Langenbach A. — *Variationsmethoden in der nichtlincaren Elastizitäts und Plastizitätstheorie.* Wiss. Z. Humboldt Univ. Berlin, Math. — Nat R., IX 1959/1960
5. Mikhlin S.G. — *Problema minimuma kvadratichnogo funktionala.* Moskva — Leningrad, 1952
6. Olszak W., Urbanowski W. — *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies.* Arch. Mech. Stos. 8 (1956)
7. Vainberg M.M. — *Le problème de la minimisation des fonctionnelles non linéaires.* Summer courses, Varenna, 1970

Reçu le 4. IV 1985

Faculté de Mathématiques
Université de Iassy
R.S. Roumannie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 3.

LES FLOTS DYNAMIQUES MAXIMAUX SPECIAUX

PAR

ELEONOR CIUREA

1. Les flots dynamiques maximaux. Soit $G=(X, A)$, un graphe connexe avec $X=\{x_1,\dots, x_i,\dots, x_n\}$ l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs. Soit l'ensemble $P=\{0, 1,\dots,p\}$ et N l'ensemble des nombres naturels. On définit la fonction temps $h: A\to N$ et la fonction capacité $c: A\times P\to N$, où $h_{ij}=h(x_i, x_j)$, $c_{ijt}=c(x_i, x_j\,;\,t)$ représentent le temps de parcours, respectivement la capacité de l'arc $(x_i, x_j)\in A$ à l'instant t. On note par x_1 la source et par x_n le puits du réseau.

Le problème du flot dynamique pour p périodes de temps, peut être formuté de la manière suivante. Déterminer la fonction $f: A\times P\to N$, $f_{ijt}=(x_i, x_j\,;\,t)$, qui doit satisfaire

$$\sum_{x_j} f(x_i, x_j\,;\,t) - \sum_{x_k} f(x_k, x_i\,;\,s) = \begin{cases} v(x_1, t), & \text{si } i=1 \\ 0, & \text{si } i\neq 1, n, \\ -v(x_n, t), & \text{si } i=n, \end{cases} \tag{1}$$

$$s=t-h_{ki},\ t=0, 1,\dots,p-h_{ij},$$

$$v(p)=\sum_{t=0}^{p} v(x_1, t)=\sum v(x_n, t), \tag{2}$$

$$0\leqslant f(x_i, x_j\,;\,t)\leqslant c(x_i, x_j\,;\,t), \tag{3}$$

$$(x_i, x_j)\in A,\ t=0, 1,\dots,p-h_{ij},$$

$$\max v(p). \tag{4}$$

Dans [2], [3] on montre qu'un flot dynamique pour p périodes de temps dans le réseau G est équivalent à un flot dynamique pour p périodes dans un réseau G_p, où G_p est un sous-graphe de G. Aussi, un flot dynamique pour p périodes en réseau G_p est équivalent à un flot statique dans un réseau $G_p(p)$, où $G_p(p)$ est un réseau agrandi en temps de réseau G_p.

Soit d_i la valeur du plus court chemin (par rapport au temps de parcours) de x_1 à x_i et $\bar{d}_i$ la valeur du plus court chemin de x_i à x_n. Nous avons $d_1=0$, $d_n=\bar{d}_1$, $\bar{d}_n=0$. Soient les ensembles $P_i=t|t\in P,\ d_i\leqslant t\leqslant p-\bar{d}_i\}$, $x_i\in X$, $P_{ij}=\{t|t\in P,\ d_i\leqslant t\leqslant p-(h_{ij}+\bar{d}_j)\}$, $(x_i, x_j)\in A$. Il est évident que les ensembles $P_1\neq\varnothing$, $P_n\neq\varnothing$ sont de la forme $P_1=\{0, 1,\dots,p-d_n\}$, $P_n=\{d_n, d_n+1,\dots,p\}$. Nous notons : $\bar{P}_i=P-P_i$, $\bar{P}_{ij}=P-P_{ij}$.

Le réseau $G_p=(X_p, A_p)$ se construit ainsi :

$$X_p=\{x_i/x_i\in X,\ P_i\neq\varnothing,\ \},\ A_p=\{(x_i,\ x_j)/(x_i,\ x_j)\in A,\ P_{ij}\neq\varnothing\},$$

et le réseau $G_p(p)=(X_p(p),\ A_p(p))$:

$$X_p(p)=\{x_{it}/x_i\in X_p,\ t\in P_i\},\quad A_p(p)=\{(x_{it},\ x_{js})/(x_i,\ x_j)\in A_p,\ s=t+h_{ts},\ t\in P_{ij}\}.$$

De ce fait, les réseaux G et G_p s'appellent des réseaux statiques, par opposition au réseau dynamique $G_p(p)$. Aussi, s'il n'est pas spécifié explicitement, les valeur du chemin, chaîne, circuit ou cycle sont considérés par rapport au temps de parcours.

Les propositions suivantes résultent de la manière de construction des réseaux G_p et $G_p(p)$.

Proposition 1. *Si d est la valeur du chemin (ou chaîne) de x_1 à x_n en réseau statique G_p, alors ce chemin (chaîne) se multiplie $(p-d+1)$ fois dans le réseau dynamique $G_p(p)$.*

Proposition 2. *Un cycle en réseau statique G_p reste un cycle en réseau dynamique $G_p(p)$ si, et seulement si, sa valeur est zéro.*

Corollaire 1. *Le réseau dynamique $G(p)$ n'a pas de circuits.*

1. Une classification d'ensemble des flots dynamiques. On remarque le fait que $v(x_1, t)=0$, $t\in\bar{P}_1$ et $v(x_n, t)=0$, $\in\bar{P}_n$. Donc nous avons

$$v(p)=\sum_{P_1}v(x_1, t)=\sum_{P_n}v(x_n, t) \tag{2'}$$

Nous appellerons (1), (2'), (3), (4) le problème classique du flot dynamique maximal pour p périodes et notons-le par (C).

Désignous encore :

$$v_1(q)=\sum_{t=0}^{q}v(x_1, t),\quad q\in P_1,\quad v_n(q)=\sum_{t=d_n}^{q}v(x_n, t),\quad q\in P_n,$$

Il est évident que $v_1(p-d_n)=v_n(p)=v(p)$.

Nous considérons maintenant :

$$\max v_1(q),\ q\in P_1-\{x-d_n\}, \tag{5}$$

$$\min v_1(q),\ q\in P\ -\{x-d_n\}, \tag{6}$$

$$\max v_n(q),\ q\in P_n-\{p\}, \tag{7}$$

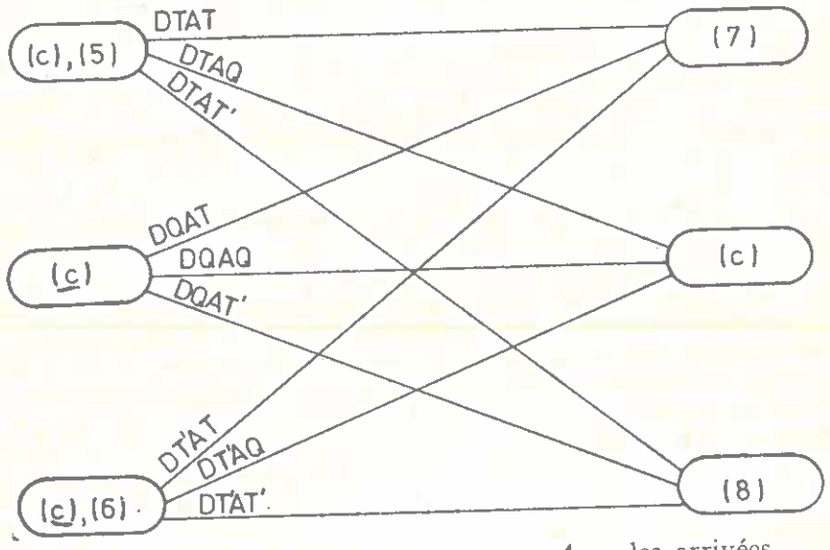
$$\min v_n(q),\ q\in P_n-\{p\}. \tag{8}$$

Le problème (C) ou le problème (C) combiné avec une ou deux des fonctions objectif (5), (6), (7), (8), ainsi que le montre le graphe de la figure 1, déterminera neuf catégories de flots dynamiques maximaux. Par exemple, la catégorie des flots dynamiques maximaux avec les départs au plus tôt et les arrivées quelconques (le plus, tôt, ou les plus tardives, ou intermédiaires c'est-à-dire ni le plus tôt, ni les plus tardives) est déteminée par le problème (C), (5).

Remarques 1) Si la fonction capacité est indépendente du temps, alors les flots dynamiques avec les départs au plus tôt et les arrivées les plus tardives sont les flots répétés dans le temps [5].

2) Les flots dynamiques maximaus avec les arrivées le plus tôt sont les flots dynamiques maximaux universels [6].

3) L'existence des neuf catégories de flots dynamiques maximaux dépend tant du réseau statique G que du nombre de périodes p et nous les appelons les flots dynamiques maximaux spéciaux.



D — les départs
T — tôt ; Q — quelconque ;
A — les arrivées
T' — tardive

Figure 1

3. Les algorithmes pour les flots dynamiques maximaux spéciaux. Considérons seulement la catégorie des flots dynamiques maximaux avec les départs au plus tôt et les arrivées les plus tardives. Les modifications qu'il faut faire dans l'algorithme exposé ci-dessous, pour obtenir un flot d'une autre catégorie, sont évidentes. L'algorithme pour la détermination d'un flot dans cette catégoerie consiste dans une adoptation de l'algorithme de Klein [7] pour le problème des flots à coût minimal.

Construisons le réseau $G'_p(p)=(X'_p(p),\ A'_p(p))$ avec $X'_p(p)=X_p(p)$, tandis que $A'_p(p)$ est obtenu en ajoutant à $A_p(p)$ les arcs $(x_{1t},\ x_{1t+1})$, $t\in P_1-\{d-d_n\}$, $(x_{nt},\ x_{nt+1})$, $t\in P_n-\{p\}$ avec $c'(x_{1t},\ x_{1t+1})=\infty$, $f'(x_{1t},\ x_{1t+1})=v(p)-v_1(t)$, $t\in P_1-\{p-d_n\}$, $c'(x_{nt},\ x_{nt+1})=\infty$, $f'(x_{nt},\ x_{nt+1})=v_n(t)$, $t\in P_n-\{p\}$.

Soit $\bar{f}=(\ldots, f_{ijt},\ldots)$ le flot dynamique maximal pour p périodes en G_p déterminé avec l'algorithme présenté dans [4]. L'algorithme détermine aussi une coupe dynamique minimale en G_p équivalente à une coupe statique minimale $(\bar{Y}_p(p),\ \bar{Y}_p(p))$ en $G_p(p)$.

Correspondant au flot $\bar{f}'$ dans $G'_p(p)$, pour n'importe quel $x_{it}, x_{js} \in Y_p(p)$, on définit les temps

$$(9) \qquad h'_{ij} = \begin{cases} h_{ij}, \text{ si } (J_{it}, x_{js}) \in A'_p(p) \text{ et } f'_{ijt} < c'_{ijt}, \\ -h_{jt}, \text{ si } (x_{js}, x_{it}) \in A'_p(p) \text{ et } f'_{jit} > 0, \\ \pm\infty, \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ces temps définissent la matrice des temps sommets-sommets $H'_p(p)$. De même, définissons la matrice sommets-sommets $\bar{H}'_p(p)$ des temps pour n'importe quel $x_{it}, x_{js} \in \bar{Y}_p(p)$. En (9) nous prenons $h'_{ij} = +\infty$ ou $h'_{ij} = -\infty$, selon que nous cherchons les circuits négatifs respectivement positifs.

L'algorithme pour déterminer un flot de la catégorie des flots dynamiques maximaux avec les départs au plus tôt et les arrivées les plus tardives a les étapes suivantes.

Etape 1. On détermine un flot dynamique maximal $\bar{f}$ pour p périodes du temps et la coupe minimale avec l'algorithme présenté dans [4]. On construit $G'_p(p)$ avec le flot $\bar{f}'$. On passe à l'étape 2.

Etape 2. Pas 1. Correspondant au flot $\bar{f}'$ courant, on détermine la matrice $H'_p(p)$.

Pas 2. A l'aide de la matrice $H'_p(p)$ on cherche les circuits négatifs. S'il existe un tel circuit, on fait le changement de flot comme dans [7] et on passe au Pas 1. Sinon, on passe à l'étape 3.

Etape 3. On applique les pas de l'étape 2 concernant la matrice $\bar{H}'_p(p)$ et avec la spécification qu'on cherche les circuits positifs. S'il n'existe pas de circuits positifs, alors f' est le flot cherché.

Théorème 1. *L'algorithme exposé ci-dessus détermine un flot dynamique maximal avec les départs au plus tôt et les arrivées le plus tardives en un nombre fini d'itérations.*

Démonstration. L'affirmation de ce théoreme résulte du fait qu'un flot dynamique maximal avec les départs au plus tôt et les arrivées les plus tardives est un flot dynamique maximal du temps minimal aux départs et du temps maximal aux arrivées.

BIBLIOGRAPHIE

1. Berge, C. — *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. Ciurea, E. — *Deux remarques sur le flot dynamique maximal de coût minimal*, R.A.I.R.O., volume 13, Paris, 1979, 303—306.
3. Ciurea, E. — *Sur les flots dynamiques*, An. St. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, tom. XXV, s-I-a, 1979, 73—77.
4. Ciurea, E. — *Les problèmes des flots dynamiques*, Cahiers du C.E.R.O., volume 26, no 1—2, Bruxelles, 1984, 3—9.
5. Ford, L. R. and Fulkerson, D. R. — *Flow in Networks*, Princeton University Press Princeton, N. J., 1962.
6. Gale, D. — *Transient Flows in Networks*, Michigan Math. J. 6, 1959, 59—63.
7. Klein, M. — *A Primal Method for Minimal Cost Flows*, Manag. Sci. 14, 1967, 205—220.

Reçu le 13. III. 1985

Université de Braşov
Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 3.

SYSTOLIC ALGORITHMS TO SOLVE LINEAR SYSTEMS BY ITERATION METHODS

BY

OCTAV BRUDARU

1. Introduction. The notion of systolic computation was introduced by Kung and Leiserson. The computation is described using a network of processors which act on flows of data, passing through the system. The processors compute rhythmically and all operands used in computation arrive at a processor simultaneously. At every tick the data can pass from a processor to its neighbours according to the communication graph and free global communication is disallowed. A systolic device perform its computation on behalf of a host.

Foster and Kung [2] consider that a systolic algorithm must be designed so that it can be implemented by means of only a few types of simple processors, the data and control flow of the algorithm is simple allowing cells to be connected by a network with local and regular interconnections and the algorithm extensively employs pipelining and parallel computation.

The time to solve just one instance of a problem is the response time while the period of system [1] is the time elapsed between the solutions of two consecutive problems inputs to a system.

Many examples of systolic algorithms are given in [4] and [5]. In the sequel we shall focus on systolic algorithms to solve a linear system, $Ax=b$.

Leiserson presents in [4] a linearly connected array to solve $Ax=b$, where A is a nonsingular $n \times n$ lower triangular matrix with the band width $w=q$. The solution is obtained in $2n+q$ clock ticks (CT).

Another way to solve $Ax=b$ is to use the LU-decomposition. In [4] it is given a hex-connected systolic array for pipelining the LU-decomposition assuming no pivoting is needed. The computation is executed in $3n+$ $+\min(p, q)$, where A is an $n \times n$ band matrix with band width $w=p+q-1$. After the factorization, the solving of linear systems $Ly=b$ and $Ux=b$ takes $4n+p+q$ CT and two distinct networks are used.

Kramer presents in [3] a systolic algorithm to invert an $n \times n$ nonsingular matrix in $4n$ CT with a two-dimensional systolic array using Gauss's algorithm and assuming no pivoting is needed. If pivoting is required then an $O(n^2)$-time systolic algorithm is given.

In the next section we present a systolic algorithm to solve a linear system by the Gauss-Seidel method. The design of a systolic array able to implement the acceleration method is discussed in Section 3. The proposed algorithms satisfy the design requirements above mentioned.