$$A_\lambda x = \partial_2 K_\lambda^\lambda (x, x), \quad x \in E,$$

where the right hand side denotes the Fréchet differential of K_λ^λ with respect to the second argument.

Proof. We have $[-A_\lambda x, A_\lambda x] = \nabla K_\lambda^\lambda(x, x)$ since, by Theorem 4, K_λ^λ is Fréchet differentiable. Q.e.d.

In particular, in Corollary 7 we can choose as K the saddle function L of Theorem 2.

REFERENCES

1. Attouch, H., Wets, R. J.-B. — *A convergence theory for saddle functions.* Trans. A. M. S. 280(1983) 1, 1–41.
2. Attouch, H., Wets, R. J.-B. — *A convergence for bivariate functions aimed at the convergence of saddle values.* In: Lecture Notes in Mathematics 979, Springer (1983), 1–43.
3. Barbu, V. — *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces.* Ed. Academiei and Noordhoff Int. Publ. House (1976).
4. Barbu, V., Precupanu, Th. — *Convexity and optimization in Banach spaces.* Ed. Academiei and Sijthoff and Noordhoff Int. Publ. House (1978).
5. Brezis, H. — *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations.* In: Contributions to Nonlinear Functional Analysis (E. Zarantonello, ed.), Academic Press (1971), 101–156.
6. Brezis, H., Crandall, M., Pazy, A. — *Perturbation of nonlinear maximal monotone sets.* Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 123–144.
7. Ekeland, I., Temam, R. — *Convex analysis and variational problems.* North Holland Publ. Comp., Amsterdam (1976).
8. Gossez, J.-P. — *On the subdifferential of a saddle function.* Journal Funct. Analysis 11 (1972), 230–230.
9. Krauss, E. — *A representation of maximal monotone operators by saddle functions.* To appear in Revue Romaine Math. Pures et Appl.
10. Krauss, E. — *A representation of arbitrary maximal monotone operators via subgradients of skew-symmetric saddle functions.* To appear in Nonlinear Analysis TMA.
11. Krauss, E. — *Maximal monotone operators and saddle functions.* To appear in Zeitschrift für Anal. Anw.
12. McLinden, L. — *Dual operations on saddle functions.* Trans. A.M.S. 179 (1973), 363–381.
13. Moreau, J.-J — *Fonctionelles convexes,* Séminaire „Équations aux dérivées partielles". Collège de France, Paris (1967).
14. Rockafellar, R. T. — *Convex analysis.* Princeton Univ. Press, Princeton (N.J.) (1970).
15. Rockafellar, R. T. — *Monotone operators associated with saddle functions and minimax problems.* In: Nonlinear Functional Analysis, Part I (F. E. Browder, ed.), Proc. of Symp. in Pure Math. 18 (1970), 241–250.
16. Rockafellar, R. T. — *Saddle points and convex analysis.* In: Differential games and related topics. Am. Elsevier, New York (1971), 109–127.
17. Tiba, D. — *Regularization of saddle functions.* Bolletino U.M.I. (5), 17-A (1980), 420–427,
18. Troyanski, S. — *On local uniform convexity and differentiable norms in certain unseparable Banach spaces.* Studia Math. 37 (1971), 173–180.

Received 26.II. 1985

Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Mathematik
DDR–1086 Berlin
Mohrenstr. 39, Postfach 1304

INCREST–Bucureşti
Bd. Păcii 220
Bucureşti, România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 3.

SUI SISTEMI LINEARI DI QUADRICHE RIDUCIBILI ED IRRIDUCIBILI

BY

LANDO DEGOLI

1 — Nello spazio lineare complesso S_r riferito a coordinate proiettive omogenee x_i $(i=0, 1, 2, \ldots, r)$ si asumano $d+1$ quadriche linearmente indipendenti:

$$f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \quad (q=0, 1, 2, \ldots, d)$$

Un sistema lineare di quadriche di dimensione d è dato dalla relazione:

$$\sum_{q=0}^{d} \Lambda_q f_q = 0.$$

Supponiamo che la matrice Jacobiana a $r+1$ righe e $d+1$ colonne:

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_s} \right\| \begin{pmatrix} q=0, 1, 2, \ldots, d \\ s=0, 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

abbia caratteristica $m=r-k(k \geqslant 0)$.

E noto che quando la Jacobiana è identicamente nulla, l'intero S_r è luogo di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche. Se la caratteristica e $r-h(h \geqslant 0)$, un punto generico di S_r è coniugato con un S_h. Un sistema lineare $L_{d/m}$ di dimensione d e caratteristica m possiede $d+1$ quadriche linearmente indipendenti, tra cui è possibile scegliere m quadriche funzionalmente indipendenti da cui dipendono tutte le altre. Un sistema $L_{d/m}$ $(m \leqslant d)$ che non possiede *sistemi subordinati essenziali* $L_{g/c}$ (vedi: [6]) con:

$$2 \leqslant g \leqslant d-1, \quad 2 \leqslant c \leqslant m-1, \quad c \leqslant g$$

è detto *irriducibile di prima specie.*

Abbiamo dimostrato il:

Teorema A: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare irriducibile di prima specie sia a Jacobiana di caratteristica $r-k \leqslant d (k \geqslant 0)$ è che le quadriche del sistema che passano per un punto generico di S_r abbiano in comune un S_{k+1}.*

Dati due sistemi lineari L_a ed L_b, aventi in comune un sistema lineare L_c, il loro *sistema congiungente* risulta di dimensione: $a+b-c$.

Diremo che il sistema $L_{d/m} (m \leqslant d)$ è *riducibile* se congiunge dei sistemi subordinati, tra i quali almeno uno L_{d_1/m_1} $(m_1 \leqslant d_1)$ non ha quadriche in comune con gli altri.

Diremo che i sistemi lineari : L_{d_1}, L_{d_2}, ..., L_{d_s} formano *una catena* quando non sono riducibili e se L_{d_1} ed L_{d_2} hanno in comune almeno una quadrica, il loro sistema congiungente L_a ha in comune con L_{d_3} almeno una quadrica, ed il sistema L_b congiungente L_a con L_{d_3} ha in comune almeno una quadrica con L_{d_4} e così via fino ad L_{d_s}.

Esiste in proposito il :

Lemma 1 : *Se il sistema L_d possiede i sistemi subordinati L_{d_1}, L_{d_2}, ..., L_{d_s} formanti una catena, ed L_d non possiede altre quadriche funzionalmente indipendenti oltre quelle dei sistemi subordinati è sempre possibile scegliere tra le quadriche di L_{d_1}, L_{d_2}, ..., L_{d_s} passanti per un punto generico P, d quadriche linearmente indipendenti in modo da individuare il sistema L_{d-1} di quadriche di L_d passanti per P.*

Possiamo scrivere le equazioni di L_{d_1} ed L_{d_2} nel seguente modo :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Lambda_0 f_0+\Lambda_1 f_1+\ldots+\Lambda_h f_h+\ldots+\Lambda_{d_1} f_{d_1}=0,\\ &\mu_0 g_0+\mu_1 g_1+\ldots+\mu_h g_h+\ldots+\mu_{d_2} g_{d_2}=0. \end{aligned}$$

L'equazione del sistema L_a congiungente risulta :

$$(2)\qquad \nu_0 f_0+\nu_1 f_1+\ldots+\nu_h f_h+\ldots+\nu_{d_1} f_{d_1}+\theta_0 g_0+\theta_1 g_1+\ldots+\theta_h g_h+\ldots+\theta_{d_2} g_{d_2}=0.$$

Poichè L_{d_1} ed L_{d_2} hanno in comune almeno una quadrica, potremo supporre che f_h coincida con g_h.

Sia P un punto di S_r. Indichiamo con $f_0(P)$, $f_1(P)$, ..., $g_0(P)$, $g_1(P)$, ... i valori complessi che le quadriche assumono nel punto P.

Sostituendo le coordinate di P in (1), si possono ricavare i valori di Λ_h e μ_h in funzione dei Λ_i e μ_i rimanenti, dopo di che i due sistemi diventano :

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\Lambda_0\left(f_0+\frac{f_0(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\Lambda_1\left(f_1+\frac{f_1(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\ldots+\Lambda_{d_1}\left(f_{d_1}+\frac{f_{d_1}(P)}{f_h(P)}f_h\right)=0,\\ &\mu_0\left(g_0+\frac{g_0(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\mu_1\left(g_1+\frac{g_1(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\ldots+\mu_{d_2}\left(g_{d_2}+\frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)}f_h\right)=0. \end{aligned}$$

Questi sistemi mancano rispetto ai primi dei parametri Λ_h e μ_h. Essi risultano i sistemi L_{d_1-1} ed L_{d_2-1} di quadriche di L_{d_1} ed L_{d_2} passanti per P. Operando nello stesso modo nel sistema (2) e ricavando il parametro $(\nu_h+\theta_h)$ si ottiene :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\nu_0\left(f_0+\frac{f_0(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\nu_1\left(f_1+\frac{f_1(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\ldots+\nu_{d_1}\left(f_{d_1}+\frac{f_{d_1}(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\\ &+\theta_0\left(g_0+\frac{g_0(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\theta_1\left(g_1+\frac{g_1(P)}{f_h(P)}f_h\right)+\ldots+\theta_{d_2}\left(g_{d_2}+\frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)}f_h\right)=0. \end{aligned}$$

Poiché il sistema lineare (4) è individuato dalle stesse quadriche linearmente indipendenti dei sistemi (3) risulta provato che il sistema L_{a-1} di quadriche di L_a passanti per P è individuato da a quadriche linearmente indipendenti di L_{d_1-1} ed L_{d_2-1}.

Poiche per ipotesi i sistemi subordinati di L_d formano una catena, il sistema congiungente L_a avrà almeno una quadrica in comune con L_{d_3}.

Operando quindi nello stesso modo, si proverà che il sistema L_{b-1}, formato dalle quadriche del sistema L_b, congiungente L_a con L_{d_3}, passanti per il punto P è individuato da b quadriche linearmente indipendenti estratte da L_{a-1} ed L_{d_3-1}, cioé estratte da L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, L_{d_3-1}.

Così proseguendo e tenendo presente che L_d non possiede altre quadriche funzionalmente indipendenti esterne alla catena, il lemma risulta dimostrato.

Esiste il :

Teorema B: *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema lineare di quadriche L_d, che possiede una catena di sistemi irriducibili di prima specie : $L_{d_1|m_1}$, $L_{d_2|m_2}$, ..., $L_{d_s|m_s}$...$(m_i \leqslant d_i)$ e nessun'altra quadrica funzionalmente indipendente, sia Jacobiana di caratteristica $r-k \leqslant a$ $(k \geqslant 0)$, è che le quadriche del sistema che passano per un punto abbiano in comune un S_{k+1}.*

Supponiamo dapprima che là caratteristica della Jacobiana sia :

$$r-k \leqslant d. \quad (k \geqslant 0).$$

Significa che tra le $d+1$ quadriche linearmente indipendenti che individuano L_d ne esistono $r-k$ funzionalmente indipendenti.

Poichè L_{d_1} è un sistema irriducibile di prima specie, cioè privo di sistemi subordinati essenziali, soddisfa al teorema A. Pertanto le quadriche di L_{d_1} che passano per un generico punto P di S_r hanno in comune un : $S_{r-m_1}+1$. Esse costituiscono un sistema L_{d_1-1}

Consideriamo il sistema L_{d-1} di quadriche di L_d passanti per P. Le quadriche funzionalmente indipendenti di detto sistema, che non appartengono ad L_{d_1-1} sono : $s-k-m_1$

Infatti siano :

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\Lambda_0 f_0+\Lambda_1 f_1+\ldots+\Lambda_{d_1} f_{d_1}=0,\\ &\mu_0 f_0+\mu_1 f_1+\ldots+\mu_{d_1} f_{d_1}+\mu_{d_1+1} f_{d_1+1}+\ldots+\mu_d f_d=0, \end{aligned}$$

Le equazioni rispettive di L_{d_1} e di L_d.

Se imponiamo ad entrambi i sistemi di passare per P, ricavando Λ_0 e μ_0 si ottiene :

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\Lambda_1\left(f_1+\frac{f_1(P)}{f_0(P)}f_0\right)+\Lambda_2\left(f_0+\frac{f_2(P)}{f_0(P)}f_0\right)+\ldots+\Lambda_{d_1}\left(f_{d_1}+\frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)}f_0\right)=0,\\ &\mu_1\left(f_1+\frac{f_1(P)}{f_0(P)}f_0\right)+\mu_2\left(f_0+\frac{f_2(P)}{f_0(P)}f_0\right)+\ldots+\mu_{d_1}\left(f_{d_2}+\frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)}f_0\right)+\\ &+\mu_{d+1}\left(f_{d_1+1}+\frac{f_{d_1+1}+(P)}{f_0(P)}f_0\right)+\ldots+\mu_d\left(f_d+\frac{f_d(P)}{f_0(P)}f_0\right)=0. \end{aligned}$$

Ora il numero delle quadriche funzionalmente indipendenti di L_d che non appartengono ad L_{d_1} é ovviamente la differenza delle relative caratteristiche, cioé : $r-k-m_1$.

Ma le (5) e le (6) dimostrano che tale numero rimane invariato passando ad L_{d-1} ed L_{d_1-1}, perchè le quadriche che individuano L_{d_1-1} si trovano tutte in L_{d-1}, perciò se L_{d_1-1} ha perso una quadrica funzionalmente indipendente rispetto ad L_{d_1}, la stessa quadrica è stata persa da L_{d-1} rispetto ad L_d.

Gli iperpiani polari delle $r-k-m_1$ quadriche funzionalmente indipendenti di L_{d-1} non appartenenti ad L_{d_1-1}, passano tutti per P e intersecano l' S_{r-m_1+1} secondo un S_{k+1}, che risulta almeno tangente a tutte le quadriche di L_{d-1}.

Questo risultato è dunque indipendente da d_1 e da m_1. Pertanto ragionando in modo analogo su L_{d_2/m_2}, L_{d_3/m_3} . etc. fino ad L_{d_s/m_s} si otterranno gli spazi :

$$S_{r-m_2+1},\ S_{r-m_3+1},\ \dots,\ S_{r-m_s+1},$$

che, intersecati dagli iperpiani polari delle rimanenti quadriche funzionalmente indipendenti di L_{d-1}, daranno sempre lo stesso S_{k+1}.

Perciò questo S_{k+1} risulta essere comune rispettivamente a tutte le quadriche di L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, ..., L_{d_s-1} in quanto è contenuto negli :

$$S_{r-m_2+1},\ S_{r-m_3+1},\ \dots,\ S_r-m_{s+1}.$$

precedenti.

Ma poichè L_{d_1}, L_{d_2}, ..., L_{d_s} formano una catena entro L_d e questi non possiede altre quadriche funzionalmente indipendenti per il lemma 1 è sempre possibile scegliere in L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, ..., L_{d_s-1}, $\bar{d}$ quadriche linearmente indipendenti che individuano L_{d-1}.

Ora queste $\bar{d}$ quadriche possiedono in comune l' S_{k+1} e pertanto tutte le quadriche di L_{d-1} avranno in comune un S_{k+1} passante per P, come volevasi dimostrare.

Viceversa se tutte le quadriche di L_d che passano per un punto P, hanno in comune un S_{k+1} è evidente che il punto P ha per coniugato lo stesso S_{k+1} rispetto a tutte le quadriche dell' L_{d-1} passanti per P.

Un'ulteriore quadrica di L_d non passante per P non contiene ovviamente l' S_{k+1}, ma nemmeno il suo iperpiano polare rispetto a P può contenere l' S_{k+1}, altrimenti P giacerebbe sulla quadrica.

Perciò l'iperpiano taglierà l' S_{k+1} secondo un S_k e quindi il punto P ha per coniugato un S_k rispetto a tutte le quadriche di L_d.

Ciò significa che la Jacobiana di L_d è a caratteristica $r-k$, come volevasi dimostrare.

Nota : Il teorema è valido anche se : L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, ..., $L_{d_s/m_s}(m_i \leqslant d_i)$ non sono sistemi irriducibili di prima specie secondo le ipotesi del teorema A, ma sono in tutto o in parte sistemi analoghi ad L_d, soddisfacenti alle ipotesi del teorema B. Infatti L_d, per il teorema dimostrato, gode della stessa proprietà dei sistemi irriducibili di prima specie e quindi nulla cambia nella dimostrazione precedente.

Ne deriva che il teorema è valido anche se L_d possiede una catena di sistemi lineari $L_{d_i/m_i}(m_i \leqslant d_i\ ;\ i=1, 2, \dots, s)$ qualsiasi, purchè non possieda altre quadriche funzionalmente indipendenti.

2. — Chiameremo *sistemi irriducibili di seconda specie* i sistemi lineari che soddisfano alle ipotesi del teorema B con le considerazioni della nota precedente. Esiste il :

Lemma 2 : *Consideriamo un sistema $L_{d/m}$ $(m \leqslant d)$ di S_r il quale possiede soltanto dei sistemi subordinati L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, ..., $L_{d_s/m_s}(m_i \leqslant d_i)$ irriducibili (di prima e seconda specie) non intersecantesi fra loro ed eventualmente p $(p \geqslant 0)$ quadriche funzionalmente indipendenti. Dovranno sussistere le seguenti relazioni :*

$$d=d_1+d_2+\dots+d_s+s+p-1,\quad m=m_1+m_2+\dots+m_s+p.$$

Infatti, poichè non esistono altre quadriche oltre a quelle menzionate nel sistema, L_d risulta il sistema congiungente i sistemi dati e le $p(p \geqslant 0)$ quadriche funzionalmente indipendenti percio la sua dimensione aumentata di 1 sarà uguale alla somma delle dimensioni dei sistemi subordinati aumentate di 1 più il numero delle quadriche funzionalmente indipendenti.
Si avrà : $d+1=(d_1+1)+(d_2+1)+\dots+(d_s+1)+p$, ossia : $d=d_1+d_2+\dots+$ $+d_s+s+p-1$.

Inoltre le quadriche funzionalmente indipendenti tra le $\bar{d}+1$ linearmente indipendenti che individuano L_d sono ovviamente m.

Poichè le quadriche funzionalmente indipendenti di ciascun sistema sono sempre diverse da quelle degli altri sistemi, in quanto i sistemi non hanno quadriche in comune, il numero delle quadriche funzionalmente indipendenti di tutti i sistemi subordinati è dato dalla somma delle caratteristiche :

$$m_1+m_2+\dots+m_s.$$

Questo numero aumentato di $\bar{p}$, quante sono le quadriche funzionalmente indipendenti esterne ai sistemi, darà il numero totale delle quadriche funzionalmente indipendenti di L_d. Percio si avrà :

$$m=m_1+m_2+\dots+m_s+p.$$

Esiste il :

Teorema C. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare L_d di quadriche di S_r che possiede i sistemi subordinati irriducibili (di prima o di seconda specie) : L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, ..., L_{d_s/m_s} con $(m_i \leqslant d_i\ ;$ $i=1, 2, \dots, s)$ non intersecantesi fra loro ed eventualmente $p(p \geqslant 0)$ quadriche funzionalmente indipendenti, abbia la Jacobiana di caratteristica $r-k \leqslant d$ $(k \geqslant 0)$, è che per un punto generico P di S_r passi un sistema L_{d-s-p} di quadriche appartenenti ai sistemi subordinati aventi in comune un S_{k+s+p}.*

I sistemi subordinati di cui all'enunciato, soddisfano le ipotesi del lemma 2, quindi dovrà essere :

$$d=d_1+d_2+\dots+d_s+s+p-1, \tag{7}$$

$$r-k=m_1+m_2+\dots+m_s+p. \tag{8}$$

Poichè i sistemi : L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, ..., L_{d_s/m_s} sono irriducibili (di prima o seconda specie) soddisfano al teorema A oppure al teorema B. In entrambi i casi per un punto generico P di S_r passeranno rispettivamente un :

$$L_{d_1-1},\ L_{d_2-1},\ \ldots,\ L_{d_s-1}$$

di quadriche aventi in comune rispettivamente un :

$$S_{r-m_1+1},\ S_{r-m_2+1},\ \ldots,\ S_{r-m_s+1}.$$

Questi spazi in virtù della (7) si tagliano secondo un :

$$S_{r-m_1-m_2-\cdots-m_s+s}=S_{k+s+p}.$$

Ma poichè si possono scegliere in ciascuno di detti sistemi : $d_1, d_2, \ldots, d_s$ quadriche tutte linearmente indipendenti fra loro, si trova che complessivamente le quadriche di detti sistemi che passano per P formano per la (8) un sistema :

$$L_{d_1+d_2+\cdots+d_s-1}=L_{d-s-p},$$

le cui quadriche hanno in comune l' S_{k+s+p}, come volevasi dimostrare. La condizione è dunque necessaria. Essa è anche sufficiente.

Infatti nelle ipotesi del teorema, supponiamo che per un punto $\overline{P}$ di S_r passi un sistema L_{d-s-p} individuato da quadriche appartenenti ad :

$$L_{d_1/m_1},\ L_{d_2/m_2},\ \ldots,\ L_{d_s/m_s},$$

aventi in comune un S_{k+s+p}.

Indichiamo con x la caratteristica di L_d.

Per il lemma 2 dovrà essere :

$$(9)\qquad \begin{aligned} d&=d_1+d_2+\ldots+d_s+s+p-1,\\ x&=m_1+m_2+\ldots+m_s+p,\end{aligned}$$

Poichè i sistemi subordinati sono irriducibili per il teorema A, oppure per il teorema B, per un punto generico $\overline{P}$ di S_r passeranno rispettivamente i sistemi :

$$L_{d_1-1},\ L_{d_2-1},\ \ldots,\ L_{d_s-1},$$

di quadriche aventi in comune rispettivamente un :

$$S_{r-m_1+1},\ S_{r-m_2+1},\ \ldots,\ S_{r-m_s+1}.$$

Questi spazi in virtù della (9) si intersecano secondo un :

$$S_{r-m_1-m_2-\cdots-m_s+s}=S_{r-x+s+p}.$$

Ma dai susdetti sistemi si possono estrarre rispettivamente : d_1, d_2, ... d_s quadriche tutte linearmente indipendenti tra loro. Esse individuano il sistema :

$$L_{d_1+d_2+\cdots+d_s-1}=L_{d-s-p}$$

di quadriche aventi incomune l'$S_{r-x+s+p}$.

Le quadriche che individuano L_{d-s-p} sono tutte quadriche linearmente indipendenti appartenenti ai sistemi subordinati e passanti per P. Ma tali quadriche hanno in comune per ipotesi un S_{k+sp}, che dovrà coincidere con l'$S_{r-x+s+p}$. Pertanto sarà : $x=r-k$, come volevasi dimostrare.

I sistemi $L_d/_m$ $(m\leqslant d)$ irriducibili di prima e seconda specie non sono i soli a godere delle proprietà espresse dai teoremi A e B.

Esiste in proposito il :

Teorema D : *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le quadriche di un sistema lineare L_d passanti per un punto P di S_r abbiano in comune un S_{k+1} è che ∞^k corde della varietà base del sistema dato escano da P.*

Sia un sistema lineare L_d tale che tutte le quadriche del sistema che passano per un punto generico P abbiano in comune un S_{k+1}. Queste quadriche individuano un sistema L_{d-1}. Una ulteriore quadrica di L_d, non appartenente ad L_{d-1}, interseca l' S_{k+1} secondo una quadrica G_k di S_{k+1}, che risulta comune a tutte le quadriche del sistema dato e di conseguenza appartiene alla sua varietà base V.

Una retta generica passante per P e giacente su S_{k+1} interseca G_k in due punti, che appartengono a V, e quindi è una corda di V.

Potendosi ripetere questo ragionamento per tutte le rette di S_{k+1} uscenti da P, se ne deduce che per P passano ∞^k corde di V.

Viceversa se ∞_k corde di V, varietà base del sistema L_d, passano per un punto generico P e costituiscono un S_{k+1}, una corda generica s scelta tra queste, avrà due punti R e T su V e quindi su tutte le quadriche di L_d.

Ma le quadriche passanti per P formano un sistema L_{d-1} in cui ogni quadrica possiede tre punti P, R, S della retta s. Perciò l'intera retta giacerà su tutte queste quadriche.

E poichè tale ragionamento si può ripetere per le ∞^k corde di V ne risulta che le quadriche di L_{d-1} hanno in comune un S_{k+1}.

Da ciò si deduce :

Corollario. *Se le quadriche di L_{d-1} passanti per P hanno in comune soltanto l'S_{k+1} e nient'altro, escludendo quindi che abbiano un S_h $(h\geqslant 1)$ tangente comune in P, allora la caratteristica della Jacobiana di L_d è : $r-k$.*

Infatti detto Q il coniugato di P rispetto ad R e T, questo risulta il coniugato di P rispetto a tutte le quadriche del sistema.

Potendosi ripetere cio per ciascuna delle ∞^k corde e solo per esse, P risulta il coniugato di ∞^k punti che costituiscono una varietà a k dimensioni.

Questa non puo essere che un S_k. Infatti deve risultare l'intersezione degli iperpiani polari di P rispetto a ciascuna quadrica del sistema.

Pertanto P ha per coniugato un S_k e quindi la caratteristica della Jacobiana è : $r-k$.

Diremo *sistema a varietà base* ∞^k un sistema lineare di quadriche che soddisfi al teorema D.

A questo tipo di sistema appartengono tutti i sistemi irriducibili di prima e seconda specie in virtù dei teoremi A e B.

Ma non soltanto questi.

Consideriamo, ad esempio, il sistema lineare individuato dalle quadriche estratte dalle equazioni :

$$\frac{x_0}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}$$

cioè :

$$\Lambda_0(x_0x_2-x_1^2)+\Lambda_1(x_0x_3-x_1x_2)+\Lambda_2(x_1x_3-x_2^2)=0.$$

Poichè le tre quadriche sono funzionalmente indipendenti si tratta di un $L_{2/3}$ di S_3 evidentemente privo di sistemi subordinati essenziali, che però non soddisfa alla condizione : $r-k\leqslant d$ del teorema A.

Tuttavia la sua varietà base è la cubica sghemba dell' S_3, di equazioni parametriche :

$$x=1,\ x_1=\varphi,\ x_2=\varphi^2,\ x_3=\varphi^3,$$

le cui corde riempiono tutto l' S_3.

Pertanto tale sistema è *a varietà base* ∞^0 e quindi per ogni punto di S_3 passano ∞^2 quadriche del sistema aventi in comune una retta.

BIBLIOGRAFIE

1. Palatini, F. — *Sulle superficie algebriche i cui $S_h+(h+1)$ secanti non riempiono lo spazio ambiente*. Atti R. Accad. Torino 41—1906.
2. Bonferroni G. — *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare*. R. Acc. Scienze di Torino vol. 50. 1914—15.
3. Terracini A. — *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*. Atti. S. acc. Sc. Torino. Nota 11, 51 (1916) III, 55, 1919—20.
4. Muracchini, L. — *Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all''ordinaria*. (parte II). Riv. Mat. Univ. di Parma, 3, 75—89 (1952).
5. Xambo, S. — *On projectives varieties of minimal degree*. Collectanea Mathematica — Barcelona — 1981 — vol. XXXII.
6. Degoli, L. — *Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indeterminée*. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica Budapest. Tomo 17 (1982 325—330.
7. Degoli, L. — *Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*. Collectanea Mathematica Barcèlona — 1982 vol. XXXIII.
8. Degoli, L. — *Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle*. Demonstratio Mathematica — Varszawa — n° 3 Vol. 16 — 1983.
9. Degoli, L. — *Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*. Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation — Cluj-Napoca, Tome 26(49) n° 1 — 1984 p. 33—43

Received 29.III.1985

Via Berengario 82
41012 CARPI (Modena) Italy

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 3.

EQUAL SUBMANIFOLDSIN A G-SPACE

BY

A. NEAGU

To determine a normalization is a fundamental problem in the theory of submanifolds. For the sul manifolds of a homogeneous space this problem is solved by E. Cartan [2] ànd D. Papuc [8].

In this note we investigate this problem for the submanifolds in a differentiable G-space with all orbits of the same type and in a manifold with a G-structure.

1. Let X be a right differentiable G-space with all orbits of the same type G/H, where G is a compact Lie group, H is a closed subgroup of G and G/H is the homogeneous quotient space. The canonical projection of X on the orbit space $X^*=X/G$ defines a fibre bundle structure with the fibre G/H and the structure group $K=N/H$, where N denotes the normalizer of; H in G (see [1] p. 309).

Let $X^{(H)}$ be the fixed point space of H (where H acts on X by restriction), thus X may be canonically identified with the twisted products $X^{(H)}\times_H G$ and $X^{(H)}\times_K(G/H)$ respectively. Also $X^{(H)}$ is a principal fibre bundle over X^* with the structure group K (see [1] p. 182).

In [7], we constructed the prolongation of order r of X. This prolongation is denoted by $\tau^r X$ and its points are the pair $(j_0^r\varphi,\ j^r_{\varphi(0)}\tau)$ where $\varphi: U\subset R^m\to X^*$ is a local diffeomorphism around $0\in R^m$, $\sigma:\varphi(U)\subset X^*\to X$ is a local cross section over $\varphi(U)$ of the fibre bundle $X\to X^*$ and $j_0^r\varphi$ (resp. $j^r_{\varphi(0)}\sigma$) denotes the r-jet of φ (resp. σ). at the point $o\in R^m$ (resp. $\varphi(o)\in X^*$. The space $\tau^r X$ is canonically identified with the fibre product $H^r(X^*)\times_{X^*}J^rX$, where $H^r(X^*)$ denotes the principal fibre bundle of all tangent r-frames of X^* and J^rX denotes the fibre bundle of the r-jets of all local cross sections of the fibre bundle $X\to X^*$. It follows that $\tau^r X$ is a differentiable fibre bundle over X^*.

Let G^r_m be the group defined by $G^r_m=\{(j_0^r\bar\varphi,\ j_0^r\bar\sigma)\}$, where $\bar\varphi: U\subset R^m\to R^m$ is a local diffeomorphism such that $\bar\varphi(o)=o$ and $\bar\sigma:\bar\varphi(U)\subset R^m\to G$ is a differentiable map. Thus G^r_m may be canonically identified with the semidirect product $L^r_m\times T^r_m G$, where L^r_m is the structure group of $H^r(X^*)$ and $T^r_m G$ is the group of m^r-velocity on G. The product in G^r_m is

$$(1)\qquad \bar h_2\cdot\bar h_1=(\bar y_2,\ \bar S_2)\cdot(\bar y_1,\ \bar S_1)=(\bar y_2\cdot\bar y_1,\ (\bar S_2\cdot\bar y_1)\,.\,\bar S_1),$$