Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, Matematică, 1985, f. 3.

SOLUTIONS BORNÉES ET OSCILLATIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

PAR

CONSTANTIN SIMIRAD et PAVEL TALPALARU

1. Introduction. En [5] on considère le système différentiel :

$$\dot{x}_i(t)=f_i(t, x_1,\dots, x_n), \quad i=1,\dots, n \tag{1}$$

et on suppose qu'il existe une matrice $g=(g_{ij})_{n\times n}$ de fonctions continues, $g_{ij}: R\to R$, satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)\leqslant g_{ij}(t), & \forall i=j, \\ \left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)\right|\leqslant g_{ij}(t), & \forall i\neq j, \quad \forall (t, x). \end{cases}$$

Au système (1) on associe le problème différentiel :

$$(F_p) \quad \begin{cases} \dot{x}(t)=f(t, x(t))+p(t), \\ x\in B^n, \end{cases}$$

et au problème (F_p) on attache le problème suivant :

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} \dot{y}(t)=g(t)y(t)+1, \\ y\in B^n, \end{cases}$$

où B^n est l'ensemble des fonctions $x: R\to V^n$, continues et bornées, V^n étant l'espace vectoriel n-dimensionel, le symbole 1 est un vecteur.

Une hypothèse principale est que le problème (G) a une solution positive. Dans ces conditions on montre les théorèmes suivants :

Théorème A. *Si pour un $p\in B^n$ le problème (F_p) a au moins une solution, alors pour toutes $p\in B^n$ le problème (F_p) a une solution unique. De plus, si $p_1\in B^n$, $p_2\in B^n$ et x_1, x_2 sont les solutions des problèmes (F_{p_1}) et (F_{p_2}), alors on a l'inégalité :*

$$|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant |y(t)|\,.\,|p_1-p_2|_t,$$

y étant la solution positive du problème (G) ; par $|\,.\,|_t$ on comprend $\sup\limits_{s\leqslant t}|x(s)|$. Si x est la solution du problème (F_p) et x' est une solution de l'équation différentielle contenue dans le problème (F_p), alors on a :

$$|x(t)-x'(t)|\leqslant |G(t, s)|\,|x(s)-x'(s)|,$$

$G(t, s)$ est la matrice fondamentale des solutions du système contenu dans le problème (G)

Parfois il est très facile de trouver une solution pour un $p \in B^n$. Par exemple, s'il existe v_0 tel que $f(t, v_0) \in B^n$, alors en prenant $p = -f(t, v_0)$, le problème (F_p) a la solution $x(t) = v_0 \in B^n$.

Théorème B. *Si les fonctions f, p sont ω-périodiques en t, ou presque-périodiques, alors la solution du problème (F_p) est ω-périodique, presque-périodique, respectivement.*

En ce qui suit, nous allons trouver un moyen pour le fonctionnement de ces théorèmes dans le cas de quelques classes remarcables d'équations différentielles du deuxième ordre.

2. Solutions bornées et oscillations de l'équation

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = h(t). \tag{2}$$

Supposons que la fonction h est ω-périodique ou presque-périodique et les fonctions f, g, continues sur R.

Soit l'ensemble K contenant les nombres réels ayant les propriétés suivantes :

1. $$k > 0\,;$$

2. $$\exists r > 0, \quad \beta > 0, \quad \text{tels que } r < k\beta, \quad |k^2(f(x)-1) - g_x(x)| \leqslant r,$$
$$k(f(x)-1) \geqslant \beta.$$

Supposons que l'ensemble K n'est pas vide. Nous allons donner un exemple d'une classe d'équations différentielles pour lesquelles l'ensemble K n'est pas vide. Soit $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = k^2x^3/3 + k^2x + rx/2$ et choisissons $\beta = k > 0$, $0 < r < k^2$, alors $K = (0, \infty)$. On peut choisir des exemples quand la fonction g est indépendente de k.

Théorème 1. *Pour $\forall k \in K$ et $\forall h \in B^1$ l'équation (2) a une seule solution bornée. Si la fonction h est ω-périodique, respectivement presque-périodique, alors la solution bornée de l'équation (2) est ω-périodique, presque-périodique respectivement, ainsi que ses dérivées du premier et du deuxième ordre. De plus, cette solution est uniformément asymptotiquement stable.*

Démonstration. Posons $F(x) = \int^x (f(u) - 1)\,du$ et faisons le changement de variable $\dot{x} = y - kF(x)$, alors l'équation (2) nous conduit au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -kF(x) + y, \\ \dot{y} = k^2F(x) - g(x) - ky + h(t). \end{cases} \tag{3}$$

Nottons par f_1 et f_2 les fonctions du système différentiel (3) et alors nous aurons :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -k(f(x)-1) \leqslant -\beta, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1,$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right| = |k^2(f(x)-1) - g_x(x)| \leqslant r, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -k,$$

Posons $g_{11}(t) = -\beta$, $g_{12}(t) = 1$, $g_{21}(t) = r$, $g_{22}(t) = -k$ et au système différentiel (3) nous allons associer le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -\beta z_1(t) + z_2(t) + 1, \\ \dot{z}_2(t) = rz_1(t) - kz_2(t) + 1, \\ z_1 \in B^1, \quad z_2 \in B^1, \end{cases} \tag{4}$$

ayant la solution positive :

$$z_1 = \frac{k+1}{k-r}, \quad z_2 = \frac{k+\beta}{k-r}.$$

Puisque les fonctions $f_1(t, 0, 0) = -kF(0)$ et $f_2(t, 0, 0) = k^2F(0) - g(0) + h(t)$ sont bornées sur R, si la fonction h est bornée sur R, il résulte que pour $p_1 = -f_1(t, 0, 0)$ et $p_2 = -f_2(t, 0, 0)$ le système (3) a une solution $x = 0$, $y = 0$, donc on peut utiliser le théorème A. Si la fonction h est ω-périodique, presque-périodique respectivement, alors les fonctions f_1, f_2 sont ω-périodiques, presque-périodiques respectivement, par la suite les théorèmes A, B fonctionnent. Il faut encore montrer que la solution assurée par le théorème A est uniformément asymptotiquement stable.

Soit le système différentiel homogène correspondant au système différentiel du problème (4) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\beta z_1 + z_2, \\ \dot{z}_2 = rz_1 - kz_2. \end{cases}$$

La matrice de ce système a les valeurs propres données par

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-(\beta + k) \pm \sqrt{(\beta - k)^2 + 4r}\right.$$

De l'hypothèse, on a :

$$\beta^2 - 2k\beta + k^2 + 4r \leqslant \beta^2 + 2r + k^2 \leqslant \beta^2 + 2k\beta + k^2 = (\beta + k)^2,$$

donc les valeurs propres sont negatives et par suite la solution banale du système homogène est uniformément asymptotiquement stable. L'inégalité du théorème A nous conduit au fait que la solution du système (3) est uniformément asymptotiquement stable.

L'équation (2) a été abordée par G.E. Reuter [3] et [4], M.L. Cartwright et J.E. Litlewood [1],, Z. Opial [2] etc.

3. Solutions bornées et oscillations de l'équation de Duffing. Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + k^2x(1 + \mu^2x^2) = a^2\varphi(t), \tag{5}$$

et supposons que la fonction φ est ω-périodique ou presque-périodique, r, k, μ, a sont des nombres réels qui ne sont pas zéro.

Dans l'équation (5) nous allons faire le changement de variable donné par $\dot{x}(t) = y(t) - rx(t)$ ce qui nous conduit au système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = -rx + y, \\ \dot{y} = (r^2 - k^2)x - k^2\mu^2x^3 - ry + a^2\varphi(t). \end{cases} \tag{6}$$

Nottons par f_1, f_2 les fonctions du système (6) et on voit que, si $\varphi(t)$ est presque-périodique (ω-périodique), alors les fonctions f_1 et f_2 sont presque-périodiques (ω-périodiques respectivement) en t, uniformément par rapport aux autres variables appartenant à des ensembles compactes.

On a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=-r, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=r^2-k^2-3k^2\mu^2x^2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}=-r.$$

Dans l'hypothèse $r^2>k^2$, soit la bande :

$$\Delta=\left\{(x, y)/y\in R, \quad |x|<\sqrt{\frac{r^2-k^2}{3k^2\mu^2}}\right\},$$

et alors dans cet ensemble nous aurons :

$$|r^2-k^2-3k^2\mu^2x^2|\leqslant r^2-k^2.$$

Posons $g_{11}(t)=g_{22}(t)=-r$, $g_{21}(t)=r^2-k^2$, $g_{12}(t)=1$ et alors nous avons remplies les inégalités (I). Le problème associé est :

$$(7) \qquad \begin{cases} \dot{z}_1(t)=-rz_1(t)+z_2(t)+1, \\ \dot{z}_2(t)=(r^2-k^2)z_1(t)-rz_2(t)+1, \\ z_1\in B^1, \quad z_2\in B^1 \end{cases}$$

Le problème (7), pour $k>0$, a la solution positive suivante :

$$(8) \qquad z_1(t)=\frac{r+1}{k^2}, \quad z_2(t)=\frac{r^2+r-k^2}{k^2}$$

Soit le domaine (D) donné par

$$D=\{(x, y)/(x, y)|\leqslant |(z_1, z_2)|\, a^2\sup_{t\in R}\varphi(t)\},$$

Pour „a suffisamment petit" on peut affirmer que le cercle (D) est inclus dans la bande (Δ) et par suite on peut utiliser les théorèmes $A-B$ en obtenant le théorème suivant :

Théorème 2. *Si $r^2>k^2$ et „a suffisamment petit", alors l'équation de Duffing a une solution bornée unique, ayant la dérivée bornée. Si φ est ω-périodique, respectivement presque-périodique, alors la solution de l'équation (5) est ω-périodique, presque-périodique respectivement, ainsi que sa dérivée. De plus, cette solution bornée est uniformément asymptotiquement stable.*

On voit que l'unicité de la solution bornée de l'équation (5) résulte de l'unicité de la solution du problème (6).

Le système homogène correspondant au système différentiel du problème (7) est :

$$\begin{cases} \dot{z}_1=-rz_1+z_2, \\ \dot{z}_2=(r^2-k^2)z_1-rz_2. \end{cases}$$

La matrice de ce système a les valeurs propres negatives, donc la solution banale est uniformément asymptotiquement stable et par la suite la solution bornée du système (6) est uniformément asymptotiquement stable.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartwright M.L. and Litlewood J. E. — *On non-linear differential equations of the second order II*. Ann. Math. no. 2, 48 (1947), p. 472—494.
2. Opial Z. — *Sur les solutions presque-périodiques des équations différentielles du premier et du second ordre*. An. Pol. Math. 7(1959 p. 51—61.
3. Reuter G. E. H. — *A boundedness theorem for non-linear differential equations of the second order*. Proc. Cambr. Phil. Soc. 47 (1951), p. 49—54.
4. Reuter G. E. H. — *On certain non-linear differential equations with almost periodic solutions*. J. London Math. Soc. 26 (1951), p. 215—221.
5. Simirad C. et Ursescu C. — *Solutions bornées et oscillations de certaines classes de systèmes différentiels* (en cours d'apparition).

Received 25.IV 1985

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
6600 Iaşi, Romania