$$\int_{t_1}^{t} \frac{1}{r(s)} \left(\int_{t_1}^{t} p(\theta)\, d\theta\right) ds = L + \int_{c}^{t} \frac{1}{r(s)} \left(\int_{t_1}^{t} p(\theta)\, d\theta\right) ds \geq$$

$$\geq L + \left(\int_{c}^{t} \frac{ds}{r(s)}\right) \left(\int_{t_1}^{c} p(\theta)\, d\theta\right),$$

where $L = \int_{t_1}^{c} \frac{1}{r(s)} \left(\int_{t_1}^{s} p(\theta)\, d\theta\right) ds$. Hence $\int_0^\infty \frac{1}{r(t)} \left(\int_0^t p(s)\, ds\right) dt < \infty$ implies that $\int_0^\infty \frac{dt}{r(t)} < \infty$. This in turn implies that $\int_0^\infty R(t)\, dt < \infty$. As a consequence, $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, y(t) < \infty$.

Hence the theorem is proved.

Theorem 2.6. *If $f(t) \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$ and $\int_0^\infty \frac{1}{r(t)} \left(\int_0^t p(s)\, ds\right) dt < \infty$, then all ultimately negative solutions of (1) are bounded.*

For the proof see [7].

Corollary 2.7. *Suppose that the conditions of Theorem 2.5 are satisfied. Then all non-oscillatory solutions of (1) with $0 < \alpha \leq 1$ are bounded.*

Example. $(t^3 y')' - 1/t^2\, y = 1/t^2 - 1/t^4$, $t > 1$.
$y(t) = 1/t^2 - 1$, $t > 1$, is a bounded nonoscillatory solution of the equation.

Remark. Corollary 2.7 does not hold good for $\alpha > 1$. This is clear from the equation

$$(t^3 y')' - (3/t^3 - 1/t^7)\, y^3 = 1/t^3, \quad t \geq 1,$$

which admits an unbounded nonoscillatory solution $y(t) = t$ even though the conditions of Theorem 2.5 are satisfied.

REFERENCES

1. Chang, S. H. — *Boundedness theorems for certain second order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 31 (1970), 509–516.
2. Graef, J. R. and Spikes P. W. — *Asymptotic behaviour of solutions of a second order nonlinear differential equation*, J. Diff. Eqs., 17 (1975), 461–476.
3. Hatvani, L. — *On the asymptotic behaviour of the solutions of $(p(t)\, x')' + q(t)\, f(x) = 0$*, Pub. Math. Debrecen, 19 (1972), 225–237.
4. Marini, M. and Zezza P. — *On the asymptotic behaviour of the solutions of a class of second order linear diffderential equations*, J. Diff. Eqs., 28 (1978), 1–17.
5. Parhi, N. and Nayak, S. K. — *On nonoscillatory behaviour of solutions of nonlinear differential equations*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 65 (1978), 58–62.
6. Parhi, N. and Nayak S. K. — *Nonoscillation of second order nonhomogeneous differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 102 (1984), 62–74.
7. Parhi, N. — *On nonoscillatory solutions of second order differential inequalities*, Acta Math. Hung., 42 (1983), 101–109.
8. Spikes, P. W. — *Behaviour of solutions of the differential equation $y'' + q(t)\, y^p = r(t)$* Appl. Anal., 4 (1974), 253–264.
9. Taliaferro, S. D. — *Asymptotic behaviour of solutions of $y'' = \varphi(t)\, y^\lambda$*, J. Math. Anal. Appl., 66 (1978), 95–134.
10. Teufel, H. (Jr.) — *On the behaviour of solutions of sublinear second order differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 32 (1972), 445–451.

Received 10.VIII. 1985

Department of Mathematics
Berhampur University
Berhampur — 760007,
Orissa, India

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXII, s. I a, Matematică, 1986, f. 3

SUR LE PROBLEME DE DARBOUX POUR L'ÉQUATION $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \in F(x, y, z)$

PAR

GEORGETA TEODORU

Ayant pour point de départ le cas classique ([1], p. 149, [2], p. 209) dans les travaux [3], [4] nous avons défini le problème de Darboux pour l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \in F(x, y, z), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\},$$

comme le problème de la détermination d'une solution de cette équation, qui satisfasse aux conditions

$$(2) \qquad z(x, 0) = \sigma(x), \quad z(0, y) = \tau(y), \quad \sigma(0) = \tau(0), \quad (x, y) \in D, \quad z \in \Omega,$$

en admettant les hypothèses suivantes :

(H_1) $F : D \times \Omega \to 2^{R^n}$ est une application multivoque à valeurs compactes convexes et non vides de $\mathbf{R}^n$, où Ω est un ensemble ouvert dans $\mathbf{R}^n$,

(H_2) Pour tout $(x, y) \in D$, l'application $z \to F(x, y, z)$ est semi-continue supérieurement sur Ω,

(H_3) Pour tout $z \in \Omega$, l'application $(x, y) \to F(x, y, z)$ est mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue sur D,

(H_4) Il existe une fonction $g : D \to \mathbf{R}_+$, $g \in \mathcal{L}^1(D\,;\, \mathbf{R}_+)$, telle que $\| u \| \leq g(x, y)$, $\forall u \in F(x, y, z)$, $\forall (x, y) \in D$, $\forall z \in \Omega$,

(H_5) Il existe un ensemble convexe, compact, $M \subset \Omega$ et un point $(x_0, y_0) \in]0, \alpha] \times]0, b]$, tels que

$$\int_0^{x_0} \int_0^{y_0} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \leq d(M, C_\Omega),$$

où $d(M, C_\Omega)$ est la distance de M à $C_\Omega = \mathbf{R}^n - \Omega$,

(H_6) Les fonctions $\sigma \in AC([0, a]\,;\, \mathbf{R}^n)$, $\tau \in AC([0, b]\,;\, \mathbf{R}^n)$ satisfont à la condition $\sigma(0) = \tau(0)$,

(H_7) Les valeurs de la fonction $\alpha : D \to \mathbf{R}^n$, définie par $\alpha(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0)$, $(x, y) \in D$, appartiennent à l'ensemble M, lorsque $(x, y) \in \Delta = [0, x_0] \times [0, y_0] \subseteq D$.

Nous avons utilisé la notation $AC([\alpha_1, \alpha_2]\,;\ \mathbf{R}^n)$ pour l'espace des fonctions absolument continues $f : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbf{R}^n$, avec la norme

$$\| f \| = \sup_{t \in [\alpha_1, \alpha_2]} \| f(t) \| + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \| f'(t) \| \, dt,$$

$\| \cdot \|$ étant une norme de $\mathbf{R}^n$.

Il résulte que la fonction α est absolument continue au sens de Carathéodory sur D ([5], § 565 – § 568).

Nous avons nommé solution locale pour le problème de Darboux (1)+(2), une fonction univoque $Z : \Delta \to \Omega$, absolument continue au sens de Carathéodory sur D, qui satisfait à l'équation (1) presque partout pour $(x, y) \in \Delta$ et aux conditions (2) pour tout $x \in [0, x_0]$ et $y \in [0, y_0]$ et nous avons démontré dans [3], [4] le

Théorème 1. *Si les hypothèses $(H_1)-(H_7)$ sont remplies, il existe au moins une solution locale Z pour le problème de Darboux (1)+(2). De plus, l'ensemble S_α des solutions locales Z est compact dans l'espace de Banach $C(\Delta\,;\ \mathbf{R}^n)$ et l'application multivoque $\alpha \to S_\alpha$ est semi-continue supérieurement sur $AC([0, x_0]\,;\ \mathbf{R}^n) \times AC([0, y_0]\,;\ \mathbf{R}^n)$.*

Dans cette Note nous démontrerons un théorème de prolongement de la solution du problème de Darboux (1)+(2) et un théorème d' existence d'une solution saturée.

Définition. *Une solution locale du problème de Darboux (1)+(2), $Z : \Delta \to \Omega$ est appelée prolongeable (nonsaturée) s'il existe une solution $\tilde{Z} : \tilde{D} \to \mathbf{R}^n$ du poblème (1)+(2) telle que*

$$\begin{cases} \Delta \subseteq \tilde{D}, \quad \Delta \neq \tilde{D} \\ \tilde{Z}(x, y) = Z(x, y), \ (x, y) \in \Delta, \end{cases}$$

où $\tilde{D}$ est une réunion de Δ avec un nombre fini de rectangles adjacents.

Théorème 2. *Supposons satisfaites les hypothèses $(H_1)-(H_7)$ du Théorème 1 et de plus les hypothèses :*

(H_8) *L'ensemble Ω est borné, donc il existe une constante $c \in \mathbf{R}_+$ telle que $\| z \| \leq c$, $\forall z \in \Omega$,*

(H_9) *L'application multivoque F transforme des ensembles bornés den ensembles bornés, donc il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+$, telle que*

$$\sup \{ \| u \| \mid u \in F(x, y, z) \} \leq C$$

pour tout $(x, y, z) \in D \times \Omega$.

Alors, la solution locale Z est prolongeable.

Démonstration. En vertu du Théorème 1, il existe au moins une solution locale $Z : \Delta \to \Omega$ du problème (1)+(2). Nous allons montrer que la solution locale Z peut être prolongée sur un rectangle Δ_1, adjacent de Δ sur le côté $x = x_0$. Soit $(x_0, \bar{y})$, $0 \leq x_0 \leq a$, $0 \leq \bar{y} \leq y_0 b$ un point sur la frontière $\partial_1 \Delta$ d'équation $x = x_0$. En utilisant le critère de Cauchy de caractérisation des fonctions qui ont limite finie, nous déduirons que la solution $Z : \Delta \to \Omega$ a une

limite finie dans $(x_0, \bar{y})$. En effet, soit (x', y'), (x'', y'') deux points de Δ situés dans le voisinage de $(x_0, \bar{y})$. En vertu du Théorème 1.1 [4] ou du Théorème, [3] il y a

$$(3) \qquad \begin{cases} Z(x', y') = \alpha(x', y') + \int_0^{x'} \int_0^{y'} \lambda(\xi, \eta) \, d\xi d\eta, \ (x', y') \in \Delta, \\ Z(x'', y'') = \alpha(x'', y'') + \int_0^{x''} \int_0^{y''} \lambda(\xi, \eta) \, d\xi d\eta, \ (x'', y'') \in \Delta, \end{cases}$$

où

$$(4) \qquad \lambda(x, y) \in \Gamma(x, y) \subseteq F(x, y, Z(x, y)), \ \text{p.p.} \ (x, y) \in \Delta,$$

λ étant une sélection mesurable de l'application multivoque Γ.

De (3) nous obtenons

$$\begin{aligned} \| Z(x', y') - Z(x'', y'') \| &\leq \| \alpha(x', y') - \alpha(x'', y'') \| + \\ &+ \left\| \int_0^{x'} \int_0^{y'} \lambda(\xi, \eta) \, d\xi d\eta - \int_0^{x''} \int_0^{y''} \lambda(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \right\| = \\ &= \| \alpha(x', y') - \alpha(x'', y'') \| + \left\| \int_0^{x''} \int_{y''}^{y'} \lambda(\xi, \eta) \, d\xi d\eta + \right. \\ (5) \qquad &+ \int_{x''}^{x'} \int_0^{y''} \lambda(\xi, \eta) \, d\xi d\eta + \int_{x''}^{x'} \int_{y''}^{y'} \lambda(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \Big\| \leq \\ &\leq \| \alpha(x', y') - \alpha(x'', y'') \| + \left| \int_0^{x''} \int_{y''}^{y'} \| \lambda(\xi, \eta) \| \, d\xi d\eta \right| + \\ &+ \left| \int_{x''}^{x'} \int_0^{y''} \| \lambda(\xi, \eta) \| \, d\xi d\eta \right| + \left| \int_{x''}^{x'} \int_{y''}^{y'} \| \lambda(\xi, \eta) \| \, d\xi d\eta \right| \end{aligned}$$

pour (x', y'), $(x'', y'') \in \Delta$.

Mais la fonction α est absolument continue sur D, donc elle est continue sur D, ([5], §565 – §568) et continue sur $\Delta \subseteq D$. Il résulte que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$(6) \qquad \| (x', y') - (x'', y'') \| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \| \alpha(x', y') - \alpha(x'', y'') \| < \varepsilon.$$

Par l'hypothèse (H_9), de (4) il résulte

$$(7) \qquad \| \lambda(\xi, \eta) \| \leq C, \ \text{p.p. dans } \Delta.$$

De (5), (6), (7) nous obtenons

$$\begin{aligned} (8) \qquad \| Z(x', y') - Z(x'', y'') \| &< \varepsilon + C y'' \mid x' - x'' \mid + C x' \mid y' - y'' \mid + \\ &+ C \mid x' - x'' \mid \mid y' - y'' \mid < \varepsilon + C b \delta(\varepsilon) + C a \delta(\varepsilon) + C \delta^2(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}, \end{aligned}$$

pour (x', y'), $(x'', y'') \in \Delta$ et $\| (x', y') - (x'', y'') \| < \delta(\varepsilon)$.

Par suite, du critère de Cauchy, il existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\bar{y})} Z(x, y)=\psi. \tag{9}$$

Compte tenu de (9) nous pouvons définir une fonction ψ sur le côté $x=x_0$ de Δ, qui est absolument continue par rapport à $\bar{y}$ sur $[0, y_0]$. En vertu du Théorème 1.1 [4] ou du Théorème 3, nous pouvons écrire la solution locale Z sous la forme

$$Z(x, y)=\sigma(x)+\tau(y)-\sigma(0)+\int_0^x\int_0^y \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,\ (x, y)\in\Delta. \tag{10}$$

Grâce à l'hypothèse (H_θ) et au Théoréme 1 [6], p. 321, les fonctions σ et τ peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{cases} \sigma(x)=\sigma(0)+\int_0^x \sigma'(\xi)\, d\xi,\ 0\leqslant x\leqslant a \\ \tau(y)=\tau(0)+\int_0^y \tau'(\eta)\, d\eta,\ 0\leqslant y\leqslant b. \end{cases} \tag{11}$$

De (10) et (11), nous obtenons pour la solution locale Z l'expression

$$Z(x, y)=\int_0^x\int_0^y \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta+\int_0^x \sigma'(\xi)\, d\xi+\int_0^y \tau'(\eta)\, d\eta+C_0, \tag{12}$$

$(x, y)\in\Delta$, où $C_0=\sigma(0)=\tau(0)$.

Pour obtenir l'expression de la fonction $\psi(x_0, \bar{y})$, en vertu de (9) il faut passer à la limite pour $x\to x_0$ et $y\to\bar{y}$ dans la relation (12).

Nottons $L([0, x])=\int_0^x \sigma'(\xi)\, d\xi$, $0\leqslant x\leqslant a$. Alors,

$$L([0, x_0])=\int_0^{x_0} \sigma'(\xi)\, d\xi,\ 0\leqslant x_0\leqslant a.$$

Nous avons

$$\| L([0, x])-L([0, x_0]) \|=\| \int_0^x \sigma'(\xi)\, d\xi-\int_0^{x_0} \sigma'(\xi)\, d\xi \|=$$

$$=\| \int_x^{x_0} \sigma'(\xi)\, d\xi \|\leqslant | \int_x^{x_0} \| \sigma'(\xi) \|\, d\xi |<\varepsilon.$$

parceque $\mu([x, x_0])<\delta(\varepsilon)$ pour $x\to x_0$, où $\delta(\varepsilon)>0$ existe, grâce à la continuité absolue de l'integrale.

Donc $\lim_{x\to x_0} L([0, x])=L([0, x_0])$ c'est à dire

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^x \sigma'(\xi)\, d\xi=\int_0^{x_0} \sigma'(\xi)\, d\xi. \tag{13}$$

D'une façon analogue nous aurons

$$\lim_{y\to\bar{y}}\int_0^y \tau'(\eta)\, d\eta=\int_0^{\bar{y}} \tau'(\eta)\, d\eta. \tag{14}$$

Pour le passage à la limite dans l'integrale double de (12), nottons

$$D_{xy}=[0, x]\times[0, y] \text{ et } L(D_{xy})=\int\int_{D_{xy}} \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta=$$

$$=\int_0^x\int_0^y \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,\ (x, y)\in\Delta.$$

Alors

$$D_{x_0\bar{y}}=[0, x_0]\times[0, \bar{y}] \text{ et } L(D_{x_0\bar{y}})=\int\int_{D_{x_0\bar{y}}} \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta=$$

$$=\int_0^{x_0}\int_0^{\bar{y}} \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,\ (x_0, \bar{y})\in\partial_1\Delta.$$

Nous obtenons

$$\| L(D_{x_0\bar{y}})-L(D_{xy}) \|\leqslant | \int_0^x\int_y^{\bar{y}} \| \lambda(\xi, \eta) \|\, d\xi\, d\eta |+$$

$$+| \int_x^{x_0}\int_0^y \| \lambda(\xi, \eta) \|\, d\xi d\eta |+| \int_x^{x_0}\int_y^{\bar{y}} \| \lambda(\xi, \eta) \|\, d\xi d\eta |. \tag{15}$$

En posant $A_1=[0, x]\times[y, \bar{y}]$, $A_2=[x, x_0]\times[0, y]$, $A_3=[x, x_0]\times[y, \bar{y}]$ pour $x\to x_0$, $y\to\bar{y}$, les mesures de ces ensembles peuvent être rendues suffisamment petites, donc $\forall\varepsilon>0$, il existe $\delta(\varepsilon)>0$ tel que $\mu(A_1)=x\,|\,y-\bar{y}\,|<\delta(\varepsilon)$, $\mu(A_2)=|\,x_0-x\,|\,y<\delta(\varepsilon)$, $\mu(A_3)=|\,x_0-x\,|\,|\,y-\bar{y}\,|<\delta(\varepsilon)$.

En vertu de la continuité absolue de l'integrale, nous pouvons faire les évaluations

$$\begin{cases} | \int\int_{A_1} \| \lambda(\xi, \eta) \|\, d\xi d\eta |<\frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } \mu(A_1)<\delta(\varepsilon), \\ | \int\int_{A_2} \| \lambda(\xi, \eta) \|\, d\xi d\eta |<\frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } \mu(A_2)<\delta(\varepsilon), \\ | \int\int_{A_3} \| \lambda(\xi, \eta) \|\, d\xi d\eta |<\frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } \mu(A_3)<\delta(\varepsilon). \end{cases} \tag{16}$$

Grâce à (19), la relation (15) nous conduit à

$$\| L(D_{x_0\bar{y}})-L(D_{xy}) \|<\varepsilon,\ (x, y)\in\Delta,\ (x_0, \bar{y})\in\partial_1\Delta, \tag{17}$$

d'où il résulte

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\bar{y})} L(D_{xy})=L(D_{x_0\bar{y}}),$$

ou

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\bar{y})} \int_0^x \int_0^y \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \int_0^{x_0} \int_0^{\bar{y}} \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{18}$$

Compte tenu de (9), (13), (14), (18), par le passage à la limite dans (12) nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \bar{y}) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,\bar{y})} Z(x, y) = \int_0^{x_0} \int_0^{\bar{y}} \lambda(\xi, \eta)\, d\xi d\eta + \int_0^{x_0} \sigma'(\xi)\, d\xi + \\ &+ \int_0^{\bar{y}} \tau'(\eta)\, d\eta + C_0 = \int_0^{\bar{y}} \left[\int_0^{x_0} \lambda(\xi, \eta)\, d\xi + \tau'(\eta) \right] d\eta + \\ &+ \int_0^{x_0} \sigma'(\xi)\, d\xi + C_0 = \int_0^{\bar{y}} \left[\int_0^{x_0} \lambda(\xi, \eta)\, d\xi + \tau'(\eta) \right] d\eta + C_1, (x_0, \bar{y}) \in \partial_1 \Delta \end{aligned} \tag{19}$$

où $C_1 = \int_0^{x_0} \sigma'(\xi)\, d\xi + C_0$.

En vertu du Théorème 1, [6], p. 321, de (19) nous déduirons que la fonction ψ est absolument continue par rapport à $\bar{y}$.

La solution Z peut être prolongée sur un rectangle Δ_1 adjacent de Δ sur le côté $x = x_0$ de la manière suivante. Si l'abscise maxime de Δ est $x_0 < a$, nous utilisons le Théorème 1.1 [4] ou Théorème [3] d'existence d'une solution locale du problème de Darboux dans le rectangle

$$\Delta_1' = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq a,\ 0 \leq \bar{y} \leq y_0\}$$

avec les conditions sur les „caractéristiques" $x = x_0$, $y = 0$,

$$\begin{cases} Z(x, 0) = \sigma(x), & x_0 \leq x \leq a \\ Z(x_0, \bar{y}) = \psi(x_0, \bar{y}), & 0 \leq \bar{y} \leq y_0. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une solution locale du problème de Darboux dans un rectangle $\Delta_1 \subseteq \Delta_1'$, qui est un prolongement de la solution Z.

Maintenant, nous allons prouver que la solution locale $Z : \Delta \to \Omega$ peut être prolongée sur un rectangle Δ_2 adjacent de Δ sur le côté $y = y_0$.

En considérant un point $(\bar{x}, y_0)$ arbitraire sur la frontière $\partial_2 \Delta$ de Δ $y = y_0$ on peut montrer d'une manière analogue que la solution locale Z a une limite finie en ce point,

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},y_0)} Z(x, y) = \varphi, \tag{20}$$

donc il définit la fonction $\varphi : \partial_2 \Delta \to \mathbf{R}^n$, $\varphi = \varphi(\bar{x}, y_0)$ qui est absolument continue par rapport à $\bar{x}$.

On peut faire le prolongement de la solution Z sur un rectangle Δ_2 adjacent de Δ sur le côté $y = y_0$ de la manière suivante. Si l'ordonée maxime

de Δ est $y_0 < b$, nous appelons au Théorème 1.1. [4], ou au Théorème [3], d'existence d'une solution locale du problème de Darboux dans le rectangle

$$\Delta_2' = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq x_0,\ y_0 \leq y \leq b\}$$

en prenant comme conditions initiales les fonctions φ et τ définies par

$$\begin{cases} Z(\bar{x}, y_0) = \varphi(\bar{x}, y_0), & 0 \leq \bar{x} \leq x_0 \\ Z(0, y) = \tau(y), & y_0 \leq y \leq b \end{cases}$$

Grâce au même Théorème 1.1 [4] on obtient une solution locale du problème de Darboux sur un rectangle $\Delta_2 \subseteq \Delta_2'$, qui est un prolongement de la solution Z.

Donc il résulte que la solution Z peut être prolongée sur un domain D, qui est la réunion de Δ et un nombre fini de rectangles adjacents.

Théorème 3. *Suppons satisfaites les hypothèses* $(H_1) \div (H_9)$ *de Théorème 2. Si* $Z : \Delta \to \Omega$ *est une solution locale du problème de Darboux* (1) + (2) *nonsaturée (prolongeable), alors il existe une solution saturée* $Z^* : D^* \to \Omega$ *du problème* (1) + (2), *telle que*

$$\begin{cases} \Delta \subseteq D^*,\ \Delta \neq D^* \\ Z^*(x, y) = Z(x, y),\ (x, y) \in \Delta, \end{cases}$$

donc Z^* est un prolongement du Z sur D^* constitué de Δ et d'une réunion de rectangles adjacents de Δ, $D^* \subseteq D$.

Démonstration. Parceque par hypothèse la solution Z est nonsaturée (prolongeable), il résulte qu'il existe au moins une solution $Z' : D' \to \Omega$ du problème de Darboux (1) + (2), qui est un prolongement du Z sur $D' \supseteq \Delta$, en vertu du Théorème 2.1. [4], ou du. Théorème 2,

$$\begin{cases} \Delta \subseteq D',\ \Delta \neq D' \\ Z'(x, y) = Z(x, y),\ (x, y) \in \Delta, \end{cases}$$

où D' est constitué de Δ et d'une réunion de rectangles adjacents de Δ, $D' \subseteq D$.

Nottons avec S l'ensemble des solutions $Z_i : D_i \to \Omega$ du problème de Darboux (1) + (2), définies sur la famille des ensembles $\{D_i\}_{i \in I}$, chaque D_i étant constitué de Δ et d'une réunion de rectangles adjacents à Δ, $D_i \subseteq D$. Les solutions Z_i, $i \in I$, sont des prolongements de la solution Z sur D_i, $i \in I$, qui peuvent être construites par la méthode employée dans la démonstration du Théorème 2.1. [4] ou du Théorème 2, donc il y a les relations

$$\begin{cases} \Delta \subseteq D_i,\ \Delta \neq D_i, \\ Z_i(x, y) = Z(x, y),\ (x, y) \in \Delta, \end{cases} \quad \text{pour } \forall i \in I,$$

où I est une famille d'indices.

L'ensemble S est non vide, parceque il existe $Z' \in S$. Nous définirons sur l'ensemble S une relation d'ordre partielle de la manière suivante. Pour quelles que soient deux solutions $Z_i : D_i \to \Omega$, $Z_k : D_k \to \Omega$, $Z_i, Z_k \in S$, nous posons $Z_i \prec Z_k$, $i, k \in I$, si'l y a

$$\begin{cases} D_i \subseteq D_k, \\ Z_i(x, y) = Z_k(x, y),\ (x, y) \in D_i, \end{cases}$$

L'existence d'une solution saturée du problème de Darboux (1)+(2) est équivalente avec l'existence d'un élément maximal de l'ensemble S partiellement ordonné.

Nous choisissons une chaîne quelle que soit $L \subset S$, donc une famille $\{Z_j\}_{j\in J}$, $J \subseteq I$, de solutions du problème de Darboux (1)+(2), $Z_j : D_j \to \Omega$, $\Delta \subseteq D_j$, $\Delta \neq D_j$, $\forall_j \in J$, totalement ordonnée par la relation d'ordre partielle introduite. Il résulte que $\{D_j\}_{j\in J}$ est une chaîne dans l'ensemble $\pi(D)$ des sousensembles de D partiellement ordonné par la relation d'inclusion. Parceque $\pi(D)$ est un ensemble inductif ordonné, la chaîne $\{D_j\}_{j\in J}$ admet le majorant $G = \bigcup_{j\in J} D_j$. Nous avons $G \subseteq D$, $\Delta \subseteq G$, $\Delta \neq G$. Déterminons un majorant de la chaîne L, c'est-à-dire une fonction $Z_{maj} : G \to \Omega$, qui est une solution du problème de Darboux (1)+(2) sur l'ensemble $G \subseteq D$ et pour tout $j \in J$, $Z_j \prec Z_{maj}$. Soit $(x, y) \in G$. Alors, il existe au moins un $j_0 \in J$, tel que $(x, y) \in D_{j_0}$. Définissons

$$Z_{maj}(x, y) = Z_{j0}(x, y), \ (x, y) \in G.$$

Mais $Z_{j_0} : D_{j_0} \to \Omega$ est une solution du problème de Darboux (1)+(2) ; il résulte que Z_{maj} a la même propriété, donc Z_{maj} est une solution du problème de Darboux (1)+(2) sur G et

$$\begin{cases} \forall \ j \in J, \ D_j \subseteq G, \ D_j \neq G, \\ Z_{maj}(x, y) = Z_j(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in D_j, \end{cases}$$

et alors en vertu de la relation d'ordre partielle introduite, $Z_j \prec Z_{maj}$, $\forall_j \in J$.

Il résulte que la chaîne $L \subseteq S$ est majorée, d'où en vertu du théorème de Zorn, l'ensemble S contient un élément maximal, qui est la solution saturée $Z^* : D^* \to \Omega$, où D^* est constitué de Δ et une réunion de rectangles adjacents de Δ, $\Delta \subseteq D^*$, $\Delta \neq D^*$, $D^* \subseteq D$.

Théorème 4. *Supposons les hypothèses* $(H_1)-(H_9)$ *du Théorème 2 satisfaites. Si la solution saturée Z^* est bornée sur D^*, alors $D^* = D$.*

Démonstration. Supposons par reductio ad absurdum que $D^* \subset D$, $D^* \neq D$. Alors, par le procédé de prolongement utilisé dans la démonstration du Théorème 2.1 [4] ou du Théorème 2, nous pouvons prolonger Z^* sur $D_1^* \supset D$, $D_1^* \neq D^*$, ce qui vient en contradiction avec le fait que Z^* est saturée. Donc $D^* = D$.

Théorème 5. *Soient satisfaites les hypothèses* $(H_1)-(H_9)$ *de Théorème 2 et l'hypothèse*

(H_{10}) *L'application multivoque $F : D \times \Omega \to 2^{\mathbf{R}^n}$ est sous-linéaire, donc il existe deux constantes $k_1 > 0$ et $k_2 \in \mathbf{R}$ avec la propriété*

(21) $\sup \{\| u \| \mid u \in F(x, y, z)\} \leq k_1 \| z \| + k_2$, p.p. $(x, y) \in D$, $z \in \Omega$. *Alors, la solution saturée $Z^* : D \to \Omega$ est bornée sur D.*

Démonstration. La solution saturée Z^* a la forme, (Th. 1.1 [4], ou Th. [3])

$$Z^*(x, y) = \alpha(x, y) + \int_0^x \int_0^y \lambda^*(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \ (x, y) \in D, \tag{22}$$

où $\alpha(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0)$ et λ^* est une sélection mesurable de l'application multivoque Γ^* définie sur D à valeurs compacts non vides de $\mathbf{R}^n$, telle que

$$\lambda^*(x, y) \in \Gamma^*(x, y) \subseteq F(x, y, Z^*(x, y)), \text{ p.p. } (x, y) \in D. \tag{23}$$

De l'hypothèse (H_{10}) il résulte que pour la sélection λ^* nous avons une inégalité de la forme (21), parceque il y a (23), donc

$$\sup \| \lambda^*(x, y) \| \leq k_1 \| Z^*(x, y) \| + k_2, \text{ p.p.} (x, y) \in D. \tag{24}$$

De (22) et (24) on déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} \| Z^*(x, y) \| &\leq \sup \| \alpha(x, y) \| + k_1 \int_0^x \int_0^y \| Z^*(\xi, \eta) \| \, d\xi d\eta + \\ &+ | k_2 | \, xy \leq \sup \| \alpha(x, y) \| + | k_2 | \, ab + k_1 \int_0^x \int_0^y \| Z^*(\xi, \eta) \| \, d\xi d\eta, \\ &(x, y) \in D. \end{aligned} \tag{25}$$

Avec la notation

$$B = \sup \| \alpha(x, y) \| + | k_2 | \, ab, \ (x, y) \in D,$$

l'inégalité (25) devient

$$\| Z^*(x, y) \| \leq B + k_1 \int_0^x \int_0^y \| Z^*(\xi, \eta) \| \, d\xi d\eta, \ (x, y) \in D. \tag{26}$$

On peut appliquer une inégalité de type Gronwall, établie par A. Corduneanu [7] et nous obtenons

$$\| Z^*(x, y) \| \leq B[1 + k_1 \int_0^x \int_0^y \exp \left(\int_s^x \int_t^y k_1 d\xi d\eta \right) ds dt] =$$

$$= B[1 + k_1 \int_0^x \int_0^y \exp (k_1 (x - s)(y - t)) \, ds dt] \leq B[1 + k_1 \int_0^x \int_0^y \exp (k_1 xy) \, ds dt] \leq B[1 +$$

$$+ k_1 \exp (k_1 ab) \, xy] \leq B[1 + k_1 ab \exp (k_1 ab)],$$

pour $(x, y) \in D$, qui montre que la solution saturée Z^* est bornée sur D.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cinquini-Cibrario M., and Cinquini S., — *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Edizioni Cremonese, Roma, 1964.
2. Haimovici A., — *Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966.
3. Teodoru G., — *Le problème de Darboux pour une équation aux dérivées partielles multivoque*, An. Șt. Univ. Iași, T. XXXI, (1985), s. I a, 173–176.
4. Teodoru G., — *Studiul soluțiilor ecuațiilor de forma $\partial^2 z/\partial x \partial y \in F(x, y, z)$*, Teză de doctorat, Universitatea „Al. I. Cuza" Iași, 1984.
5. Carathéodory C., — *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Chelsea Publishing Company, 1948.
6. Natanson I., — *Teoria funcțiilor de variabilă reală*, Editura Tehnică, București, 1957.
7. Corduneanu A., — *A note on the Gronwall inequality in two independent variables*, Journal of Integral Equations, 4 (1982), 271–276.

Reçu le 24.VII. 1985

Chaire de Mathématique
Institut Polytechnique
Jassy, 6600 République Socialiste de Roumanie