where all $c(\alpha, \beta)$ are nonnegative.

Corollary 2.2. *Suppose that in* (28) *the hypotheses* (a), (b), (c) *of Theorem 2 and* (iii) *of Corollary* 1.2 *are fulfiled. Suppose also that the sequences* $\{f(m,n)\}$ *and*

$$\{g_c(m, n)\} = \{g(m, n) \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} h(\alpha, \beta)\} \tag{38}$$

are bounded. Then $\{u(m, n)\}$ *is also bounded.*

Proof. With M defined by (18), using (30), (36) and (38), we have

$$u(m, n) \leqslant M f(m, n) \exp(M g_c(m, n)), \tag{39}$$

which implies that u is bounded.

The established inequalities may be applied to obtain bounds for the solution of the system

$$u(m, n) = f(m, n) + g(m, n) \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} h(\alpha, \beta) u(\alpha, \beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} a(m-1-\alpha, n-1-\beta) u(\alpha, \beta). \tag{40}$$

If we denote $|u(m, n)| = U(m, n)$, $|f(m, n)| = F(m, n)$ etc. then we obtain from (40)

$$U(m, n) \leqslant F(m, n) + G(m, n) \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} H(\alpha, \beta) U(\alpha, \beta) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} A(m-1-\alpha, n-1-\beta) U(\alpha, \beta), \tag{41}$$

and we can study the behaviour of the sequence $\{|u(m, n)|\}$. If denote by u_i $(i=1, 2)$ the solutions of (40) corresponding to the free terms f_i $(i=1, 2)$, we obtain bounds for $|u_1 - u_2| = V$, writting

$$V(m, n) \leqslant K + G(m, n) \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} H(\alpha, \beta) V(\alpha, \beta) + \sum_{\beta=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} A(m-1-\alpha, n-1-\beta) V(\alpha, \beta) \tag{42}$$

$K > 0$ being a constant such that $|f_1(m, n) - f_2(m, n)| \leqslant K$ for all $m, n \geqslant 0$.

Remark 3. In the majorations here obtained appear the nonnegative coefficients $r(m, n)$ given by (10) and (11). Of course, it is difficult to write down the expansion (10), but at least in the case when a is „sufficiently small", more precisely when the hypothesis (iii) of the Corollary 1.2 is fulfiled, we obtain a good information on the behaviour of the sequence $\{u(m, n)\}$ without making use of the concret values $r(m, n)$ (see the Corollary 2.2).

REFERENCES

1. Corduneanu, A. — *A discrete integral inequality of the convolution type*, Bul. Inst. Polit. Iaşi (*to apperar*).
2. Singare, S.M. and Pachpatte, B.G. — *On some fundamental discrete inequalities of the Wendroff type*, An. şt. Univ. Iaşi, 26 (1980), 85—94.
3. Beesack, P.R. — *Lower bounds from discrete inequalities of Gollwitzer-Langenhop type*, An. şt. Univ. Iaşi, 30 (1984), 25—30.
4. Agarwal, R.P. and Thandapani E. — *On nonlinear discrete inequalities of Gronwall type*, An. şt. Univ. Iaşi, 27 (1981), 139—144.
5. Thandapani E. and Agarwal R.P. — *Some new discrete inequalities in two independent variables*, An. şt. Univ. Iaşi, 27 (1981), 269—278.
6. Agarwal R.P. — *Sharp estimates for the Wendroff discrete inequalities in n independent variables*, An. şt. Univ. Iaşi, 30 (1984), 65—68.

Received 21 II 1986

Institutul Politehnic
6600—Iaşi, România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXII, s. I a, Matematică, 1986, f. 3

QUELQUES METHODES POUR LE CONTROLE OPTIMAL DE PROBLEMES COMPORTANT DES CONTRAINTES SUR L'ETAT

PAR

J. F. BONNANS et E. CASAS

I. Introduction. Nous illustrons quelques méthodes pour l'analyse de problèmes de contrôle comportant des contraintes sur l'état, en étudiant un système parabolique soumis à une contrainte locale sur l'état final. Si on impose à l'état d'être essentiellement borné, la méthode des espaces adaptés permet d'exprimer les conditions d'optimalité. Si on impose seulement la positivité de l'état final, un problème auxiliaire permet d'obtenir certaines conditions d'optimalité. Dans les deux cas, les conditions d'optimalité permettent de déduire un résultat de régularité sur le contrôle optimal. Si l'équation d'état est non linéaire, les conditions d'optimalité sont en général obtenues sous une forme non qualifiée. Dans un cas particulier, nous montrons que le problème est qualifié.

II. Position du problème. Soit un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière Ω régulière. Soit $T > 0$; notons $Q = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. Considérons le système :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = u \text{ p.p. dans } Q, \\ &\frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ &y(\cdot, 0) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour u donné dans $L^2(Q)$, nous savons que (1) admet une solution unique y_u dans

$$H^{2,1}(Q) = \{y \in H^1(Q) ;\ y \in L^2(0, T, H^2(\Omega))\}.$$

Soit z_d dans $L^2(\Omega)$ et $N > 0$. Le problème est

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \min J(u) = \dfrac{N}{2} \displaystyle\int_Q u^2 dx dt + \dfrac{1}{2} \int_\Omega (y_u(x, T) - z_d(x))^2 dx, \\ u \geqslant 0 \text{ p.p. sur } Q,\ y_u(\cdot, T) \in K_Y, \end{cases}$$

où K_Y est défini par l'une des deux relations suivantes :

$$\text{(H1)} \quad K_Y = \{y \in H^{2,1}(Q) ;\ |y(x, T)| \leqslant 1, \text{ p.p. } x \in \Omega\},$$

(H2) $$K_Y = \{y \in H^{2,1}(Q)\ ;\ y(x,\ T) \geq 1,\ \text{p.p. } x \in \Omega\}\ .$$

Certains des résultats exposés ici s'étendent pour des contraintes sur le contrôle plus générales (voir [3, 4]). Nous nous restreignons au cas des contraintes de positivité sur le contrôle qui permettent une exposition simple et complète des résultats.
L'existence d'une solution au problème (P) se démontre de façon classique, d'où le :

Théorème 1. *Sous les hypothèses* (H*1*) *ou* (H*2*), *le problème* (*P*) *possède une solution unique* $\bar{u}$.

III. Rappel d'un resultat abstrait d'existence de multiplicateurs. Soit le problème abstrait d'optimisation

$$(\hat{\mathrm{P}}) \qquad \begin{cases} \min\ I(u), \\ u \in K_V,\ Lu \in K_W, \end{cases}$$

où $I(.)$ est convexe, G-différentiable d'un espace de Banach V dans $\mathbf{R}$, $L \in \mathcal{L}(V,\ W)$ où W est un autre espace de Banach et K_V (resp. K_W) est un convexe fermé de V (resp. W). Des résultats généraux de l'analyse convexe [7] on déduit le

Théorème 2. *Soit* $\hat{u}$ *une solution de* $(\hat{P})$. *Sous l'hypothèse de qualification suivante :*

$$\exists u_0 \in K_V\ ;\quad Lu_0 \in \overset{\circ}{K}_W,$$

on a

$$I'(\hat{u}) + L^* \partial I_{K_W}(L\hat{u}) + \partial I_{K_V}(\hat{u}) \ni 0.$$

IV. Condition d'optimalité sous l'hypothèse (H*1*). Nous cherchons à appliquer le théorème 2. L'hypothèse de qualification ne peut s'appliquer avec le cadre naturel $V = L^2(Q)$, $W = H^1(\Omega)$ puisque le convexe K_Y défini par (H*1*) est d'intérieur vide dans $H^1(\Omega)$. Nous choisissons les espaces adaptés $V = U$, $W = Z$ avec

$$U = \{u \in L^2(Q)\ ;\ y_u(.\ ,\ T) \in L^\infty(\Omega)\}\ ,$$

$$Z = L^\infty(\Omega).$$

L'hypothèse de qualification est trivialement vérifiée avec $u_0 \equiv 0$, d'où le

Théorème 3. *Sous l'hypothèse* (H*1*), *il existe* $\bar{u} \in L^\infty(\Omega)$ *et* $\bar{p} \in U$ *tels que*

$$<\bar{u},\ z - \bar{y}(.\ ,\ T)> \leq 0,\quad \forall z \in L^\infty(\Omega),\ \|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1,$$

(2) $$<\bar{p},\ v> = <\bar{u},\ y_v(.\ ,\ T)> + \int_\Omega (\bar{y}(x,\ T) - z_d(x))\ y_v(x,\ T)\ dx, \qquad \forall v \in U,$$

$$N \int_Q \bar{u}(v - \bar{u})\ dxdt + <\bar{p},\ v - \bar{u}> \geq 0, \qquad \forall v \in U,\quad v \geq 0.$$

Remarque 1. La méthode des espaces adaptés a été introduite par J. L. Lions [9]. Elle est utilisée de façon systématique pour l'étude de problèmes avec des contraintes sur l'état dans J. F. Bonnans, E. Casas [3].

Le résultat précédent permet de déduire un résultat de régularité pour le contrôle optimal. Pour ε dans $]0,\ T[$, posons

$$Q_\varepsilon = \Omega \times]0,\ T - \varepsilon[.$$

Théorème 4. *Sous l'hypothèse* (H*1*), *la restriction* $\bar{u}_{|Q_\varepsilon}$ *de* $\bar{u}$ *à* Q_ε *est dans* $C(\bar{Q}_\varepsilon) \cap H^1(Q_\varepsilon)$.

La démonstration s'obtient par une série de lemmes. Soit

$$Y = \{y \in H^{2,1}(Q)\ ;\ \frac{\partial y}{\partial n} \equiv 0\ ;\ y(.\ ,\ 0) \equiv 0\ ;\ y(.\ ,\ T) \in L^\infty(\Omega)\}.$$

On montre alors le

Lemme 1. *L'équation* (2) *équivaut à*

$$<\bar{p},\ \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y> = <\bar{u},\ y(.\ ,\ T)> + \int_\Omega (\bar{y}(x,\ T) - z_d(x))\ y(x,\ T)\ dx,$$

$$\forall y \in Y.$$

Les résultats de régularité sur l'équation de la chaleur avec second membre dans $L^p(Q)$ (cf. par exemple [10]) impliquent le

Lemme 2. *Si* $u \in L^\beta(Q)$ *avec* $\beta > (n+2)/2$, y_u *est dans* $W^{2,1;\beta}(Q)$ *et* $y_u(.\ ,\ T)$ *est dans* $C(\bar{\Omega})$.

On en déduit que $L^\beta(Q) \subset V$ pour $\beta > (n+2)/2$, l'inclusion étant continue. Soit β' vérifiant $1/\beta' + 1/\beta = 1$.

Lemme 3. *Soit* p_0 *la restriction de* $\bar{p}$ *à* $L^\beta(Q)$, $\beta > (n+2)/2$ *(donc* $p_0 \in L^{\beta'}(Q)$*). Alors* p_0 *est indépendant de* β *et*

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} - \Delta p_0 \equiv 0 \text{ dans } Q,$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial n} \equiv 0 \text{ sur } \Sigma,$$

$$\int_Q (N\bar{u} + p_0)(v - \bar{u})\ dxdt \geq 0,\quad \forall v \geq 0,\quad v - \bar{u} \in L^{\beta'}(Q).$$

On en déduit alors les relations de complémentarité entre $\bar{u}$ et $(N\bar{u} + p_0)$, d'où

$$\bar{u} = \max(0,\ -(1/N)\ p_0)\ \text{p.p. sur } Q.$$

Puisque p_0 vérifie l'équation de la chaleur rétrograde sur Q, $p_{0|Q_\varepsilon}$ est dans $C^\infty(\bar{Q}_\varepsilon)$. D'où la continuité de $\bar{u}$. Par ailleurs, la partie positive d'un élément de $H^1(Q_\varepsilon)$ est dans $H^1(Q_\varepsilon)$ (voir exemple [13]).

V. Conditions d'optimalité sous l'hypothèse (H*2*). Le contrôle $\bar{u}$ n'a maintenant plus de raison d'être dans l'espace U défini précédemment et il semble ne pas exister d'espaces fonctionnels adaptés au problème. Cependant, considérons le *problème auxiliaire* :

$$(\mathrm{P}_A) \qquad \begin{cases} \min\ J(\bar{u} + v),\quad v \in U, \\ v \geq -\bar{u} \text{ dans } Q,\ y_v(.\ ,\ T) \geq -y_{\bar{u}}(.\ ,\ T). \end{cases}$$

Le problème (P_A) admet la solution $v \equiv 0$, et l'hypothèse de qualification est vérifiée avec $v \equiv 1$. D'où le

Théorème 5. *Sous l'hypothèse* (H2), *il existe* $\bar{\mu} \in L^\infty(\Omega)'$, $p \in U'$ *tels que*

$$<\bar{\mu}, z-\bar{y}(.\,,T)> \leq 0, \quad \forall z \geq 0,\ z-\bar{y}(.\,,T) \in L^\infty(\Omega),$$

$$<\bar{\ }, \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y> = <\bar{\mu}, y(.\,,T)> + \int_\Omega (\bar{y}(x,T)-z_d(x))\, y(x,T)\, dx \ \forall y \in Y,$$

$$N\int_Q \bar{u}(v-\bar{u}) + <p, v-\bar{u}> \geq 0, \quad \forall v \geq 0, \quad v-\bar{u} \in U.$$

Comme précédemment, ces conditions permettent de déduire le

Théorème 6. *Sous l'hypothèse* (H2), *la restriction de* $\bar{u}$ *à* Q_τ *est dans* $C(Q_\tau) \cap H^1(Q_\tau)$.

Remarque 2. Sous l'hypothèse (H1), nous obtenons des conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes. Les conditions d'optimalité obtenues sous l'hypothèse (H2) sont seulement nécessaires.

VI. Le cas d'une équation d'état non linéaire. On note maintenant y_u la solution unique dans $H^{2,1}(Q)$ de

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + y^3 = u \text{ p.p. dans } Q,$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} \equiv 0 \text{ sur } \Omega,$$

$$y(.\,,0) \equiv 0,$$

où u est toujours dans $L^2(Q)$. Sous l'hypothèse (H1) ou (H2), le problème (P) a toujours une solution unique $\bar{u}$. Soit le problème abstrait :

$$(P_B) \qquad \begin{cases} \min I(u), \\ u \in K_V,\ L(u) \in K_W, \end{cases}$$

où V, W sont deux espaces de Banach, I est strictement différentiable, L est continue et strictement dérivable de V dans W. Utilisant un résultat de F. H. Clarke, on démontre dans [3] le

Théorème 7. *Soit* $\hat{u}$ *une solution de* (P_B). *Si* $\mathring{K}_W \neq \emptyset$, *il existe* $\alpha \geq 0$ *tel que*

$$\alpha I'(\hat{u}) + \frac{\partial L}{\partial u}(\hat{u})^* \partial I_{K_W}(L(\hat{u})) + \partial I_{K_V}(\hat{u}) \ni 0.$$

Si de plus il existe $u_0 \in K_V$ tel que $L(\hat{u}) + (\partial L/\partial u)(u_0 - \bar{u}) \in \mathring{K}_W$, la conclusion est obtenue avec $\alpha > 0$ (on peut prendre alors $\alpha = 1$).

En utilisant la méthode du problème auxiliaire on obtient le

Théorème 8. *Supposons* (H2) *vérifiée. Soit* $\bar{u}$ *la solution de* (P), *où* y_u *est la solution de* (3). *Alors il existe* $\bar{\mu} \in L^\infty(\Omega)$, $\bar{\ } \in V'$, $\bar{q} \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$, $\alpha \geq 0$ *tels que*

$$<\bar{\mu}, z-\bar{y}(.\,;T)> \leq 0, \quad \forall z \geq 0,\ z-\bar{y}(.\,,T) \in L^\infty(\Omega),$$

$$<\bar{\ }, \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + y^3> = <\bar{\mu}, y(.\,,T)>, \quad \forall y \in Y,$$

$$\frac{\partial \bar{\ }}{\partial t} - \Delta \bar{q} + 3\bar{y}^2 \bar{q} \equiv 0 \text{ dans } Q,$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial n} \equiv 0 \text{ sur } \Sigma,\ \bar{q}(.\,,T) = \bar{y}(.\,,T) - z_d \text{ dans } \Omega,$$

$$\alpha \int_Q (N\bar{u} + \bar{q})(v-\bar{u})\, dx\, dt + <\bar{q}, v-\bar{u}> \geq 0, \quad \forall v \geq 0,\ v-\bar{u} \in U.$$

D'autres résultats de ce type sont donnés dans [3] pour des systèmes de type elliptique ou hyperbolique mais il est en général difficile de vérifier la condition de qualification du théorème 7. Dans ce cas particulier, néanmoins, on obtient le

Théorème 9. *La conclusion du théorème 8 est obtenue avec* $\alpha = 1$.

Démonstration. La fonction $y(x,t) = t$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 1 \text{ sur } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} \equiv 0,\ y(.\,,0) \equiv 0, \\ y(.\,,0) \equiv 0, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + 3\bar{y}^2 y = 1 + 3\bar{y}^2 t$$

Soit $u_0 = \bar{u} + (1 + 3\bar{y}^2 t)$. Alors $u_0 \geq 0$. Soit $L(u) = y_u(.\,,T)$. Alors

$$L(\bar{u}) + \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{u})(u_0 - \bar{u}) = \bar{y}(.\,,T) + T.$$

L'hypothèse de qualification est donc vérifiée par u_0.

BIBLIOGRAPHIE

1. Adams, R. A. — *Sobolev spaces*, Academic Press, New Yori, 1975.
2. Barbu, V. and Precupanu T. — *Convexity and optimization in Banach spaces*, Sijkoff Noordoff, & Pub. House of Romanian Academy, 1978.
3. Bonnans, J. F. Casas E. — *Contrôle de systèmes non linéaires comportant des contraintes distribuées sur l'état*, Rapport INRIA n° 300, 1984.
4. Bonnans, J. F. and Casas, E. — *On the choice of the function spaces for some state-constained control problems*, (*à paraître*).
5. Casas, E. — *Quelques problèmes de contrôle avec des contraintes sur l'état*, C.R.A.S. Paris 296 (1983), 509–512.
6. Casas, E. — *Control of an elliptic problem with pointwise state constraints*, Soumis au SIAM J. of Cont. Opt., 1984.

7. Ekeland, I. et Temam, R. — *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1974.
8. Lions, J. L. — *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968.
9. Lions, J. L. — *Function spaces and optimal control of distributed systems*, Cours à l'Université Fédérale de Rio de Janeiro, 1980.
10. Lions, J. L. — *Contrôle de systèmes distribués singuliers*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
11. Lions, J. L. Magenes, E. — *Problèmes aux limites non homogènes et applications* Dunod, Paris, 1968.
12. Mackenroth, U. — *Convex parabolic boundary control problems with pointwise state contraints*, J. Math. An. Appl., 87 (1982), 256–277.
13. Stampacchia, G. — *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 15 (1965), 185–258.

Reçu le 10.X.1985

INRIA,
Rocquencourt, BP.105
78153 Le Chesnay
France

Dep. Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias
35005 Santander
Espagne

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXII, s. I a, Matematică, 1986, f. 3

MAXIMUM PRINCIPLE FOR CONTROL PROBLEMS GOVERNED BY A CLASS OF FINITE DIMENSIONAL VARIATIONAL INEQUALITIES

BY

CĂTĂLINA DAVIDEANU

Optimal control problems governed by parabolic and elliptic variational inequalities have been studied in [1]. Here we shall study with the same method some specific cases not covered by the results established there.

This paper is concerned with necessary optimality conditions (maximum principle) for control problems governed by finite dimensional inequalities. Problems of this type appear by the discretization of parabolic variational inequalities (see Example 2.2 below) and in the modelisation of a large class of physical problems.

1. **Necessary optimality conditions**. In this section, we consider the control problem of the following type:

Problem (P_K): Minimize

$$\int_0^T [g(t, y(t)) + h(u(t))]\,dt + \varphi_0(y(T)), \quad 0 < T < \infty, \tag{1.1}$$

over the set of all functions $y \in W^{1,2}([0, T]; R^n)$, $u \in L^2(0, T; R^m)$ subject to:

$$y'(t) + Fy(t) + \partial I_K(y(t)) \ni Bu(t) + f(t) \quad \text{a.e. } t \in]0, T[\tag{1.2}$$

$$y(0) = y_0 \tag{1.3}$$

where $K = \{z \in R^n;\ 0 \leq z_i \leq a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Using the definition of the operator ∂I_K, the relations (1.2) and (1.3) can be equivalently written as:

$$y_i'(t) + (Fy(t))_i = (Bu(t))_i + f_i(t), \quad \text{a.e. } \{t;\ 0 < y_i(t) < a_i\}, \tag{1.4}$$

$$y_i'(t) + (Fy(t))_i \geq (Bu(t))_i + f_i(t), \quad \text{a.e. } \{t;\ y_i(t) = 0\}, \tag{1.5}$$

$$y_i'(t) + (Fy(t))_i \leq (Bu(t))_i + f_i(t), \quad \text{a.e. } \{t;\ y_i(t) = a_i\}, \tag{1.6}$$

$$0 \leq y_i(t) \leq a_i \quad \text{a.e. } t \in]0, T[, \tag{1.7}$$

$$y_i(0) = y_{0,i} \in K, \tag{1.8}$$

where $i = 1, 2, \ldots, n$.

Further on, we shall assume that:

(a) $F: R^n \to R^n$ is a local Lipschitzian function and