SUMAR

pag.

T. BÎRSAN — Uniformisation des structures topologiques à bases locales dénombrables 201

E. POPA — Morphisms of H-cones and specific order 207

V. OBĂDEANU — Some remarks on M-connections 213

C. URSESCU — Tangency and openness of multifunctions in Banach spaces . 221

D. K. SEN — On generalized p-orthogonal projections on Banach spaces . 227

L. I. NICOLAESCU — Existence and regularity for a coupled system of linear pa equations 239

S. ANIȚA — Filippov solutions for variational inequalities 247

A. HAIMOVICI — On a two species ecological system, with diffusion depending ages 257

P. TALPALARU — Equivalence of multivalued integro-differential systems 275

M. CAPURSI — On pseudo-Kaehlerian Finsler spaces 287

Colectivul de redacție:

Prof. V. Barbu, prof. Gh. Gheorghiev, prof. A. Haimovici, prof. D. Ieșan, prof. C. Ignat, conf. T. Jucan, prof. R. Miron, conf. T. Precupanu, lector C. Croitoru, lector V. Popescu, lector C. Zălinescu

Redactor responsabil — prof. A. Haimovici

Secretari de redacție — lector C. Zălinescu, lector C. Croitoru, lector V. Popescu

Tehnoredactor — V. Dumistrăcel

UNIFORMISAT DES STRUCTURES TOPOLOGIQUES A BASES LOCALES DENOMBRABLES

PAR

T. BÎRSAN

1. W. J. Pervin a montré dans [6] que les axiomes d'un espace quasi-uniforme s'obtiennent en „uniformisant" celles des voisinages d'un espace topologique. Le procédé d'uniformisation consiste dans le changement de places entre deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ voisins dans l'énoncé des axiomes. Ce procédé est tout à fait naturel. Il est souvent utilisé en Analyse ; par exemple [6], lorsqu'il s'agit de la convergence et la convergence uniforme d'une suite de fonctions : $(f_n)_n$ converge vers f sur l'ensemble E si

$$(*) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in E)(\underline{\exists k \in N})(\forall n \in N)[n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon],$$

et, d'autre part, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur E si

$$(**) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in N)(\forall x \in E)(\forall n \in N)[n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon].$$

On voit bien que (**) est obtenu de (*) en interchangeant les places des quantificateurs soulignés.

Supposons qu'un espace est muni d'une topologie ayant des bases locales *dénombrables* dans tous ses points. En utilisant le procédé d'uniformisation de W.J. Pervin dans ce cas, on s'attend à obtenir un espace quasi-métrique. Le but de cette Note est de mettre au point cette question.

Le language utilisé ci-dessous est celui des g-fonction. Il à été introduit par R.W. Heath [2] et développé par R.E. Hodel [3] et d'autres. Grace à lui on a pu présenter sous une forme unitaire beaucoup d'espaces qui ont paru dans le cadre de la théorie de la métrisation des espaces topologiques et même découvrir de nouveaux types d'espaces.

Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle *g-fonction* sur X une fonction $g : N \times X \to \tau$ qui satisfait aux conditions suivantes :

$$(1) \qquad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, x), \text{ quel que soit } x \in X,$$

$$(2) \qquad g(n, x) \supset g(n+1, x), \text{ pour tous } x \in X \text{ et } n \in N.$$

Une g-fonction sur X est compatible avec τ si la suite $\{g(n, x)\}_n$ est une base locale de x, pour tout $x \in X$. Évidemment, les espaces topologiques (X, τ) à bases locales dénombrables sont ceux qui admettent une g-fonction compatible avec τ. Formulons les conditions suivantes :

(A) $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(n, x))[g(n, y) \subset g(n, x)]$,

(B) $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(n+1, x))[g(n+1, y) \subset g(n, x)]$,

(C) $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\exists m_{nx} \in N)(\forall y \in g(m, x))[g(m, y) \subset g(n, x)]$,

où les indices mettent en évidence que m dépend de n et x. Rappelons que (X, τ) est *quasi-pseudo-métrisable* (*quasi-pseudo-ultramétrisable*) s'il existe une fonction $d : X \times X \to R_+$ telle que 1° $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$ et 2° $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in X$ (2° $d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z))$ pour tous $x, y, z \in X$, respectivement) et la topologie induite par d coïncide avec τ. Il est bien connu qu'un espace topologique (X, τ) est q-p-métrisable (q-p-ultramétrisable) si, et seulement si, il y a une g-fonction sur X compatible avec τ et satisfaisant à la condition (B) ((A), respectivement). De même, l'espace (X, τ) est un *γ-espace* s'il existe une g-fonction sur X compatible avec τ et satisfaisant à la condition (C).

2. Nous allons voir que ces types d'espaces et quelques autres (à notre avis inconnus jusqu'ici) peuvent être obtenus en uniformisant „l'axiome triangulaire" des systèmes de voisinages. Considérons pour cet axiome les formes suivantes :

I $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(n, x))(\exists l_{nxy} = l \in N)[g(l, y) \subset g(n, x)]$,

II $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\exists m_{nx} \in N)(\forall y \in g(m, x))(\exists l_{nxy} = l \in N)[g(l, y) \subset g(n, x)]$

(la forme I correspond aux systèmes de voisinages ouverts).

En partant de I et en utilisant d'une manière formelle le procédé d'uniformisation, on obtient :

I_1 $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\exists l_{nx} \in N)(\forall y \in g(n, x))[g(l, y) \subset g(n, x)]$.

Des considérations de symétrie par rapport à I_1 nous conduisent à écrire :

I_2 $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\exists m_{nx} \in N)(\forall y \in g(m, x))[g(n, y) \subset g(n, x)]$.

Par uniformisation, on obtient de I_1 et I_2 encore

I_3 $(\forall n \in N)(\exists l_n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(n, x))[g(l, y) \subset g(n, x)]$,

I_4 $(\forall n \in N)(\exists m_n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(m, x))[g(n, y) \subset g(n, x)]$.

Nous allons démontrer que I_3 et I_4 caractérisent les espaces q-p-ultramétrisables.

Proposition 1. *Les conditions suivantes :*

(i) I_3

(ii) $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(n, x))[g(n+1, y) \subset g(n, x)]$,

(iii) (A),

sont équivalentes.

Démonstration. Évidement, (iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i).

(*i*)$\Rightarrow$(*ii*). Soit g une g-fonction sur X compatible avec τ et satisfaisant à I_3. Soit la suite croissante $(l^k)_k$ définie, grâce à la condition I_3, par $l^0 = 1$, $l^{k+1} = l_{lk}$, $k \in N$. Introduissons la g-fonction g' par $g'(k, x) = g(l^k, x)$, $k \in N$. Il est visible que $\{g'(k, x)\}_k$ est une base locale de x. D'autre part, g' vérifie la condition (ii), car, $\forall k \in N$, $\forall x \in X$, $\forall y \in g'(k, x) = g(l^k, x)$, et tenant compte de I_3, on a :

$$g'(k+1, y) = g(l^{k+1}, y) = g(l_{lk}, y) \subset g(l^k, x) = g'(k, x).$$

(*ii*)$\Rightarrow$(*iii*). Soit g compatible avec τ et satisfaisant à (ii). Définissons $g' : N \times N \to \tau$ par

$$g'(k, x) = \{y \,;\, \text{il y a } \{x = a_0, a_1, \ldots, a_{i+1} = y\} \text{ tel une } a_{r+1} \in g(k, a_r), 0 \leqslant r \leqslant i\}.$$

Pour vérifier (A), soient $y \in g'(k, x)$ et $z \in g'(k, y)$. Alors, il y a $\{x = a_0, a_1, \ldots, a_{i+1} = y\} \subset X$ et $\{y = b_0, b_1, \ldots, b_{j+1} = z\} \subset X$ de sorte que $a_{r+1} \in g(k, a_r)(0 \leqslant r \leqslant i)$ et $b_{s+1} \in g(k, b_s)$ $(0 \leqslant s \leqslant j)$. Par conséquent, on peut utiliser le système $\{x = a_0, \ldots, a_i, y = b_0, \ldots, b_{j+1} = z\}$ pour constater que $z \in g'(k, x)$. Du fait que g' satisfait à (A), il résulte que $g'(k, x)$ est ouvert pour tous $k \in N$ et $x \in X$.

Il reste à voir que la g-fonction g' est compatible avec τ. Ceci suit immédiatement de

$$g(k+1, x) \subset g'(k+1, x) \subset g(k, x), \quad k \in N, \quad x \in X.$$

La première inclusion est évidente. Soit maintenant $y \in g'(k+1, x)$. Il existe, donc, l'ensemble $\{x = a_0, \ldots, a_i, a_{i+1} = y\} \subset X$ tel que $a_{r+1} \in g(k+1, x)$, $0 \leqslant r \leqslant i$. En vertu de l'hypothèse (ii), on a

$$a_{r+1} \in g(k+1, x),\ 0 \leqslant r \leqslant i \Rightarrow a_1 \in g(k, x),\ a_2 \in g(k+1, a_1), \ldots, a_{r+1} \in g(k+1, a_r), 2 \leqslant r \leqslant i$$

$$\Rightarrow a_2 \in g(k, x),\ a_{r+1} \in g(k+1, a_r),\ 2 \leqslant r \leqslant i$$

$$\Rightarrow a_2 \in g(k, x),\ a_3 \in g(k+1, a_2),\ a_{r+1} \in g(k+1, a_r),\ 3 \leqslant r \leqslant i$$

$$\Rightarrow a_3 \in g(k, x),\ a_{r+1} \in g(k+1, a_r),\ 3 \leqslant r \leqslant i \Rightarrow \ldots \Rightarrow y \in g(k, x).$$

La démonstration est achevée.

D'une façon analogue, on démontre la

Proposition 2. *Les conditions suivantes :*

(i) I_4,

(ii) $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(n+1, x))[g(n, y) \subset g(n, x)]$,

(iii) (A),

sont équivalentes.

En revenant à „l'axiome triangulaire" sous la forme II et en appliquant de nouveau le procédé d'uniformisation, on obtient :

II_1 $(\forall n \in N)(\forall x \in X)(\exists m_{nx} \in N)(\exists l_{nx} \in N)(\forall y \in g(m, x))[g(l, y) \subset g(n, x)]$,

II_2 $(\forall n \in N)(\exists m_n \in N)(\forall x \in X)(\exists l_{nx} \in N)(\forall y \in g(m, x))[g(l, y) \subset g(n, x)]$,

II_3 $(\forall n \in N)(\exists l_n \in N)(\forall x \in X)(\exists m_{nx} \in N)(\forall y \in g(m, x))[g(l, y) \subset g(n, x)]$,

II_4 $(\forall n \in N)(\exists m_n \in N)(\exists l_n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(m, x))[g(l, y) \subset g(n, x)]$.

Les propositions suivantes donnent une expression plus simple aux conditions ainsi obtenue et montre que deux d'entre elles caractérisent des structures bien connues.

Proposition 3. *Les conditions* (II_1) *et* (C) *sont équivalentes.*

Démonstration. En partant de (II_1) et en choisissant $m'_{nx} = \max(m_{nx}, l_{nx})$, on aboutit à (C). L'implication inverse est évidente.

Proposition 4. *Les conditions suivantes :*

(i) II_1,

(ii) $(\forall n \in N)(\exists m_n \in N)(\forall x \in X)(\forall y \in g(m, x))[g(m, y) \subset g(n, x)]$,

(iii) (B),

sont équivalentes.

Démonstration. Il est évident que (iii)⇒(ii)⇒(i). Le fait que (ii)⇒(iii) se démontre comme l'implication (i)⇒(ii) de la Prop. 1.

Proposition 5. *On a équivalence entre les conditions suivantes :*

(i) II_2,

(ii) $\gamma' : (\forall n \in N)(\forall x \in X)(\exists l_{nx} \in N)(\forall y \in g(n+1, x))\ [g(l, y) \subset g(n, x)]$.

Démonstration. Il est immédiat que (ii)⇒(i). Réciproquement, supposons que la g-fonction g satisfasse à la condition (i). Alors, on peut définir la suite croissante de nombres naturels $(m^k)_k$ par $m^0 = 1$, $m^{k+1} = m_{m^k}$, $k \in N$, et la g-fonction g' par $g'(k, x) = g(m^k, x)$, $k \in N$. On voit sans peine que $\{g'(k, x)\}_k$ est une base locale de x. Soit maintenant $k \in N$, $x \in X$, $l'_{kx} = \min\{i ; l_{m^k x} \leq m^i\}$, et $y \in g'(k+1, x)$. En vertu de II_2, $y \in g'(k+1, x) = g(m^{k+1}, x) = g(m_{m^k}, x)$ entraîne l'inclusion $g(l_{m^k x}, y) \subset g(m^k, x)$. Par conséquent, et grâce à la définition de l'_{kx}, on a

$$g'(l'_{kx}, y) = g(m^{l'_{kx}}, y) \subset g(l_{m^k x}, y) \subset g(m^k, x) = g'(k, x).$$

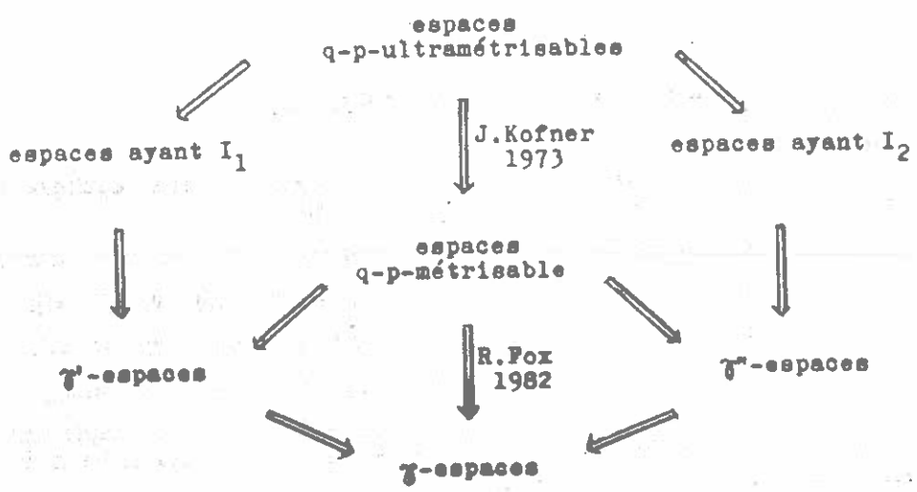
Donc, la g-fonction g' vérifie la condition (ii), ce qu'il fallait démontrer.

Par une voie similaire on établit la

Proposition 6. *On a équivalence entre les conditions suivantes :*

(i) II_3,

(ii) $\gamma'' : (\forall n \in N)(\forall x \in X)(\exists m_{nx} \in N)(\forall y \in g(m, x))[g(n+1, y) \subset g(n, x)]$.



On appelle *γ'-espace* (*γ''-espace*) un espace topologique (X, τ) muni d'une g-fonction satisfaisant à la condition γ' (γ'', respectivement) ci-dessus. On peut conclure que le procédé d'uniformisation utilisé nous conduit à sept types d'espaces qui sont figurés ci-dessous.

Les implications indiquées dans ce schéma découlent aussitôt des définitions et les propositions précédentes. On peut poser la question de savoir si elles sont réversibles. Il est connu que les implications qui se trouvent sur la verticale moyenne ne le sont pas. En effet, J. Kofner [4] a donné en 1973 un exemple d'espace q-p-métrisable qui n'est pas q-p-ultramétrisable. De plus, le même auteur [5, Question 1] considère ouvert le problème de trouver un autre exemple d'espace (ou bien une classe d'espaces) qui soit situé entre les espaces q-p-ultramétrisables et ceux q-p-métrisables. Il est possible que les espaces ayant la propriété I_1 ou I_2 donnent une réponse à cette question.

D'autre, R. Fox [1] a donné en 1982 un exemple de γ-espace qui n'est pas q-p-métrisable. Par suite, il a résolu d'une fa on négative la *conjecture du γ-espace* — voir si un γ-espace est q-p-métrisable — qui a été l'objet de préoccupations de beaucoup de mathématiciens pendant dix ans. Naturellement, on pose maintenant la question suivante : un γ'-espace (ou γ''-espace) est-il q-p-métrisable ? L'exemple de R. Fox peut être utile pour élucider le rapport entre les γ'- ou γ''-espaces est les γ-espaces ou ceux q-p-métrisables.

Remarque. La condition (2) de la définition d'une g-fonction facilite les calcules, mais elle ne joue pas un rôle essentiel. En effet, si $g : N \times N \to \tau$ vérifie seulement la condition (1), alors $g' : N \times N \to \tau$ définie par $g'(n, x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} g(n, x)$ vérifie les deux conditions (1) et (2) et, en outre, elle conserve n'importe quelle propriété I ou II satisfaite par g.

BIBLIOGRAPHIE

1. Fox, R. — *Solution of the γ-space problem*, Proc. Amer. Math. Soc., 85 (1982), 606–608.
2. Heath, R. W. — *Arc-wise connectedness in semi-metric spaces*, Pacific J. Math., 12 (1962), 1301–1319.
3. Hodel, R. E. — *Spaces defined by sequences of open covers which guarantee that certain sequences have cluster points*, Duke Math. J., 39 (1972), 253–263.
4. Kofner, J. — *On Δ-metrizable spaces*, Math. Notes, 13 (1973), 168–171.
5. Kofner, J. — *On quasi-metrizability*, Top. Proc., 5 (1980), 111–138.
6. Pervin, W. J. — *Uniformization of neighborhood axioms*, Math. Ann., 147 (1962), 313–315.

Reçu le 12.III.1987

Institut Polytechnique de Jassy
Département de Mathématiques
6600 — Iaşi, Roumanie