12. Ibragimov, I.A., Linnik, Y.V. — *Independent and stationary sequence of random variables.* Walters, Nordhoff, Groningen, 1971.
13. Mokkadem, A. — *Mixing properties of ARMA processes.* Stochastic Processes and their Appl. 29, 1988, 309-315.
14. Pham, D.T. — *The mixing property of bilinear and generalized random coefficient autoregressive models.* Stochastic Processes Appl. 23, 1986, 301-306.
15. Philipp, W. — *A functional law of the iterated logarithm for empirical distribution functions of weakly dependent random variables.* Ann. Prob. 5, 1977, 319-350.
16. Rahmania, N. — *Remarques sur l'estimateur à noyau de la régression dans le cas α-mélangeant.* Revue de Statistique et Analyse des Données, Vol. 13, n° 3, 1988, p. 65-75.
17. Robinson, P.M. — *Nonparametric estimates for time series.* J. of Time Series Analysis, 4, 1983, 185-201.
18. Rosenblatt, M. — *Markov processes structure and asymptotic behavior.* Springer Verlag, 1971.
19. Roussas, G. — *Nonparametric regression estimation under mixing conditions.* Preprint. 1988.
20. Sarda, P., Vieu, P. — *Empirical distribution function for mixing random variables. Application in nonparametric hazard estimation.* Preprint. 1988.
21. Takahata, H. — *L_∞ bounds for asymptotic normality of weakly dependent summands using Stein's methods.* Ann. of Prob. 9, 1981. 676-683.
22. Truong, Y.K., Stone, C. — *Nonparametric time series prediction: kernel estimates based on local averages.* Preprint. 1988.
23. Truong, Y.K., Stone, C. — *Nonparametric time series prediction: kernel estimates based on local medians.* Preprint. 1988.
24. Volkonskii, V.A., Rozanov, Y.A. — *Some limit theorems for random functions.* Theory Prob. Appl. Vol. 14, 1988, 178-197.
25. Yoshihara, K. — *Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications.* Zeitschrift f.w.u.v.G. 43, 1978, 319-329.

Received 15.V.1991

U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Université des Sciences et Techniques
de Lille Flandres Artois
Laboratoire de Statistique et Probabilités
59655-VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (FRANCE)

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XXXVII, s. I. a. Matematică, 1991, f. 3

NOTE SUR DES POSSIBILITES D'APPROXIMATION DE L'ENTROPIE D'UNE DISTRIBUTION CONTINUE

PAR

ION PURCARU

Soit X une variable aléatoire continue à la distribution probalistique définie par $f(x) \geq 0, \quad x \in D \subseteq R, \quad \int_D f(x)dx = 1$. Supposons que l'entropie Shannon de X ou de $f(x)$ définie par

$$H(X) = -\int_D f(x) \ln f(x) dx = H(f) \tag{1}$$

est connue (voir [1] , [2] , [4]). On sait que, généralment, même pour les distributions probabilistiques classiques, on ne peut pas donner des expressions bien déterminées de l'entropie (1) et par conséquent, d'un cas à l'autre, il faut l'approximer. Ça c'est le but de cette note. On supposera connues les fonctions gamma et beta d'Euler (voir [3] et [5]) utilisées parfois dans ce qui suit.

Proposition 1. *Si*

$$f(x) = \frac{na^m}{2\Gamma(m)} |x|^{mn-1} e^{-a|x|^n}, x \in R, \tag{2}$$

où $a > 0$, $m > 0$, $n > 0$ et $\Gamma(m)$ est la fonction gamma d'Euler, alors

$$H(X) = \frac{m(1-mn)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+m)} + \frac{(1+m\gamma)(mn-1)}{mn} + m + \ln \frac{2}{n} \Gamma(m) a^{\frac{-1}{n}} \tag{3}$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma \approx 0,5772$).

Preuve. Si on introduit (2) en (1), alors par calcul direct on trouve sans difficultés

$$H(X) = \ln \frac{2\Gamma(n)}{na^m} - \frac{n(mn-1)a^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty x^{mn-1} e^{-ax^n} \ln x dx + m. \tag{4}$$

Dénotons par

$$F(a,m,n)=\int_0^\infty x^{mn-1}e^{-ax^n}dx=\frac{\Gamma(m)}{n}a^{-m}. \tag{5}$$

Des expression (5) nous allons obtenir

$$\frac{\partial F}{\partial m}=n\int_0^\infty x^{mn-1}e^{-ax^n}\ln x dx=\frac{1}{n}a^{-m}(\Gamma'(m)-\Gamma(m)\ln a) \tag{6}$$

où $\Gamma'(m)$ est la dérivée de la fonction $\Gamma(m)$ dont la convergence est également assurée pour $m>0$ (voir [5]).

Par conséquent de (6) l'expression (4) sera

$$H(X)=\ln\frac{2\Gamma(m)}{n}a^{\frac{-1}{n}}+m-\frac{mn-1}{n}\cdot\frac{\Gamma'(m)}{\Gamma(m)}. \tag{7}$$

En considérant la formule de Weierstrass (voir [5])

$$me^{\gamma m}\prod_{k=1}^{\infty}((1+\frac{m}{k})e^{\frac{-m}{k}})\Gamma(m)=1 \tag{8}$$

on déduit sans difficulté la relation

$$\Gamma'(m)=-(\frac{1}{m}+\gamma-m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+m)})\Gamma(m), \tag{9}$$

et par conséquent, de (7) et (9) nous allons obtenir (3) et l'affirmation dela proposition est vérifiée.

Remarque 1. Si dans (2) on prend $m=\frac{1}{2}$, $n=2$ et $a=\frac{1}{2\sigma^2}$, $\sigma>0$, alors on a la distribution normale $N(0,\sigma)$ et $H(X)=\ln\sigma\sqrt{2\pi e}$.

Remarque 2. Si dans (2) on prend $m=n=1$, alors on a la distribution de Laplace et $H(X)=\ln\frac{2e}{a}$.

Analoguement à la proposition 1 on peut formuler et déduire

Proposition 2. Si

$$f(x)=\frac{na^m}{\Gamma(m)}x^{mn-1}e^{-ax^n},\quad x\geq 0 \tag{10}$$

où $a>0$, $m>0$, $n>0$, et $\Gamma(m)$ est la fonction gamma d'Euler alors

$$H(X)=\frac{m(1-mn)}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+m)}+\frac{(1+m\gamma)(mn-1)}{mn}+m+\ln\frac{\Gamma(m)a^{\frac{-1}{n}}}{n}. \tag{11}$$

Remarque 1. Si dans (10) on prend $m=n=1$, alors on a la distribution exponentielle de paramètre a et $H(X)=1-\ln a$.

Remarque 2. Si dans (10) on prend $n=1$, alors on a la distribution gamma généralisée et de (11) on déduit

$$H(X)=m(1-m)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+m)}+\frac{(1+m\gamma)(m-1)}{m}+m+\ln\frac{\Gamma(m)}{a} \tag{12}$$

d'où pour $a=1$ on trouve l'entropie pour la distribution gamma simple.

Remarque 3. Si dans (10) on prend $n=1$, $m=\frac{p}{2}$, $p\in N^*$ et $a=\frac{1}{2\sigma^2}$, $\sigma>0$, alors on a la distribution $\chi_p^2(\sigma)$ et de (11) on déduit que

$$H(X)=\frac{p(2-p)}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+p)}+\frac{(p\gamma+2)(2-p)}{2p}+\frac{p}{2}+\ln 2\sigma^2\Gamma(\frac{p}{2}). \tag{13}$$

Remarque 4. Si dans (10) on prend $m=1$, alors on a la distribution de Weibull et de (11) on déduit que

$$H(X)=1+\frac{n-1}{n}\gamma-\ln na^{\frac{1}{n}}. \tag{14}$$

Proposition 3. Si

$$f(x)=\frac{(m+1)a^p}{2pB(p,q)}|x|^m(1+a|x|^{\frac{m+1}{p}})^{-p-q},\quad x\in R \tag{15}$$

où $a>0$, $m>-1$, $p>0$, $q>0$ et $B(p,q)$ est la fonction beta d'Euler, alors

$$H(X)=\ln\frac{2pB(p,q)}{m+1}a^{\frac{-p}{m+1}}+\frac{mpq}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+p)(k+p+q)}+ \tag{16}$$

$$+\frac{(m+1)pq+p^2}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+q)(k+p+q)}.$$

Preuve. Si on introduit (15) en (1) et si on fait le changement de variable

$$ax^{\frac{m+1}{p}}=t(1-t)^{-1} \tag{17}$$

alors, par calcul direct, on trouve

$$H(X)=\ln\frac{2pB(p,q)}{m+1}a^{\frac{-p}{m+1}}-\frac{mp}{(m+1)B(p,q)}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\ln t dt- \tag{18}$$

$$-\frac{p+(m+1)q}{(m+1)B(p,q)}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\ln(1-t)dt.$$

Sachant que

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \qquad p>0, \quad q>0 \tag{19}$$

on observe que

(20)
$$H(X)=\ln\frac{2pB(p,q)}{m+1}a^{\frac{-p}{m+1}}-\frac{mp}{(m+1)B(p,q)}\frac{\partial B(p,q)}{\partial p}-\frac{p+(m+1)q}{(m+1)B(p,q)}\frac{\partial B(p,q)}{\partial q}$$

où $\frac{\partial B}{\partial p}$ et $\frac{\partial B}{\partial q}$ sont les dérivée partielles de la fonction $B(p,q)$ par rapport à p et à q. Puisque (voir [5])

$$B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) \tag{21}$$

à la suite de la relation (9) on peut écrire que

$$\frac{\partial B(p,q)}{\partial p}=-qB(p,q)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+p)(k+p+q)} \tag{22}$$

$$\frac{\partial B(p,q)}{\partial q}=-pB(p,q)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+q)(k+p+q)}$$

et par conséquent en introduisant (22) en (20) on trouve la relation (16) et l'affirmation de la proposition est vérifiée.

Remarque. Si dans (15) on prend $m=0$, $a=\frac{1}{n}$, $n\in N^*$, $p=\frac{1}{2}$ et $q=\frac{n}{2}$, alors on a la distribution Student $S(n)$, et de (16) on déduit que

$$H(X)=\ln\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})+(n+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+n)(2k+n+1)} \tag{23}$$

d'où, en particulière, pour $n=1$, on a la distribution de Cauchy pour laquelle on déduit que $H(X)=\ln 4\pi$.

Analoquement à la proposition 3 on peut formuler et déduire

Proposition 4. *Si*

$$f(x)=\frac{(m+1)a^p}{pB(p,q)}x^m(1+ax^{\frac{m+1}{p}})^{-(p+q)}, \quad x\geq 0 \tag{24}$$

où $a>0$, $m>-1$, $p>0$, $q>0$ et $B(p,q)$ est la fonction beta d'Euler, alors

$$H(X)=\ln\frac{pB(p,q)}{m+1}a^{-\frac{m+1}{p}}+\frac{mpq}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+p)(k+p+q)}+$$

$$+\frac{(m+1)pq+p^2}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+q)(k+p+q)}. \tag{25}$$

Remarque 1. Si dans (24) on prend $m=0$ et $p=q=1$, alors on a la distribution rationnelle et de (25) on déduit que $H(X)=\ln\frac{e^2}{a}$.

Remarque 2. Si dans (24) on prend $p=1$, alors on a la distribution de Burr de paramètre a et de (25) on déduit que

$$H(X)=\frac{mq}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+q+1)}+\frac{(m+1)q+1}{(m+1)(q+1)}-\ln q(m+1)a^{m+1} \tag{26}$$

d'où pour $a=1$ on trouve l'entropie de la distribution Burr simple.

Remarque 3. Si dans (24) on prend $m=\frac{n_1}{2}-1$, $p=\frac{n_1}{2}$, $q=\frac{n_2}{2}$ et $a=\frac{n_1}{n_2}$, $n_1\in N^*$, $n_2\in N^*$, alors on a la distribution de Snedecor $S(n_1,n_2)$ et de (25) on déduit que

$$H(X)=\ln\frac{n_2}{n_1}B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})+2n_2(n_1-2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+n_1)(2k+n_1+n_2)}+ \tag{27}$$

$$+n_1(n_2+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+n_2)(2k+n_1+n_2)}.$$

On peut formuler et déduire également

Proposition 5. *Si*

$$f(x)=\frac{na^p}{B(p,q)}x^{np-1}(1-ax^n)^{q-1}, \quad x\in[0,a^{-\frac{1}{n}}] \tag{28}$$

où $a>0$, $n>0$, $p>0$, $q>0$ et $B(p,q)$ est la fonction beta d'Euler, alors

$$H(X)=\ln\frac{B(p,q)}{n}a^{-\frac{1}{n}}+\frac{(np+1)q}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+q)(k+p+q)}. \tag{29}$$

Remarque. Si dans (28) on prend $a=n=1$, alors on a la distribution beta et de (29) on déduit que

(30)
$$H(X)=\ln B(p,q)+q(p-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+p)(k+p+q)}+p(q-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+q)(k+p+q)}.$$

Par calcul direct on peut déduire également

Proposition 6. *Si*

$$f(x) = \frac{ab^p}{pB(p,q)} e^{ax}(1 + be^{\frac{a}{p}x})^{-(p+q)}, \qquad x \in R \tag{31}$$

où $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, $q > 0$ *et* $B(p,q)$ *est la fonction beta d'Euler, alors*

$$H(X) = \ln \frac{pB(p,q)}{a} + pq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+p+q}{(k+p)(k+q)(k+p+q)}. \tag{32}$$

Remarque. Si dans (31) on prend $a = n_1$, $b = \frac{n_1}{n_2}$, $p = \frac{n_1}{2}$, $q = \frac{n_2}{2}$, avec $n_1 \in N^*$, et $n_2 \in N^*$, alors on a la distribution de *R. A. Fisher* et de (32) on déduit que

$$H(X) = \ln \frac{1}{2} B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}) + n_1 n_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k + n_1 + n_2}{(2k+n_1)(2k+n_2)(2k+n_1+n_2)}. \tag{33}$$

On peut constater sans diffculté que l'entropie $H(X)$ n'est pas invariable par rapport à des transformations de la variable X.

REFERENCES

1. Guiaşu, S. — *Applications de la théorie de l'information*, Maison d'Ed. de l'Acad. R.S.R., Bucarest (1968).
2. Guiaşu, S. — *Information theory with applications.* McGraw-Hill, New York (1977).
3. Iosifescu, M., Mihoc, Gh., Ciucu, G. — *Théorie des probabilités et statistiques mathématique.* Maison d'Ed. Technique, Bucarest (1966).
4. Purcaru, I. — *Information et corrélation.* Maison d'Ed. Sci. et Encyclopedique, Bucarest (1988).
5. Theodorescu, N., Olariu, V. — *Equation de la physique mathématique.* Maison d'Ed. Did. et Pedagogique, Bucarest (1970).

Received 31.V.1990

Académie d'Etudes Economiques
Department de Mathématiques
Bucarest

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XXXVII, s. I. a. Matematică, 1991, f. 3

RECENZII

R.FREUD (Editor): *Grosse Augenblicke aus der Geschichte der Mathematik* (traducere din limba maghiară în limba germană: Éva Vas). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990; 263 p.; ISBN 963-05-5640-5.

Cartea editată de Róbert Freud conţine un număr de articole consacrate prezentării unor momente importante din istoria matematicii, scrise de matematicienii maghiari şi publicate în 1981. Excelenta traducere în limba germană familiarizează cititorul cu următoarele subiecte: 1. Ce ştiau deja vechii greci (János Surányi); 2. Sunt rezolvabile ecuaţiile? (Róbert Freud); 3. Cum a apărut analiza matematică? (Akos Császár); 4. "Din nimic, eu am găsit o lume nouă". Ce este geometria Bolyai-Lobatschewski? (György Bizám); 5. Numere ideale şi teorema lui Ferman (Edit Gyarmati); 6. Cum vedea Hilbert bazele matematicii? (Akos Császár); 7. O viaţă deosebită, Ramanujan (Pál Turán); 8. În imperiul întîmplării nu mai este nimic întîmplător (István Vincze). Cartea are indice de nume şi de tematică.

Mirela Ştefănescu

J.MOISAN, M. PAGES, N. TOSEL: *Algèbre. Exercices avec solutions*, Collection Classes Préparatoires, Série Mathématiques, spécialis - mathématiques supérieures-1-er cycle universitaire, Eyrolles, Paris, 1991; X + 164 p.

Acest volum face parte dintr-o colecţie de exerciţii de matematică rezolvate, cu scopul de a pregăti probele scrise şi orale de la concursurile ştiinţifice ce urmează a fi date de elevii claselor de matematică superioare şi matematici speciale din Franţa.

Exerciţiile sunt cu grade de dificultate variabilă, redactate astfel încât să permită o apropiere progresivă de temele de algebră din programă, anume: aritmetică şi numărabilitate, structuri algebrice (grup, inel, corp), numere complexe, polinoame şi fracţii raţionale.

Mirela Ştefănescu

KAZIMIERZ GOEBEL & W. A. KIRK: *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 28, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 1990, ISBN 0-521-38289-0.

By "Metric Fixed Point Theory" the authors understand that part of the Fixed Point Theory which is essentially developed by using geometrical conditions of metric nature on the underlying space and (or) on the corresponding maps. So the book collects a great number of results and methods referring to : nonexpansive mappings, ultrafilters, ultrapowers and ultranets, many of which discovered in the last 25 years. It also contains a " metric point of view" on several problems which are not of purely metric nature and, in this respect, we mention here: the fixed point theorems of Brouwer, Schauder and Caristi. The book includes also a lot of carefully chosen examples, open problems and suggestions for further study.