ANALELE STIINTIFICE ALE UNIVERSITATII "AL.I.CUZA" IASI
Tomul XXXIX, s.I.a, Matematică, 1993, f.3

SUR LES STRUCTURES HADAMARD ET LA GRANDE UNIFICATION DES FORCES FONDAMENTALES*

PAR

GHEORGHE GHEORGHIEV

1.Introduction. Je rappele que une première pénétration théorique dans le monde réel a été réalisée par G a u s s par le plan complexe et, ensuite par H e r m i t e, qui a muni l'espace compelxe de la métrique asymétrique qui porte son nom. Une autre voie de pénétration a été ouverte par H a m i l t o n, par la création des quaternions (1843), suivie par les tesarins (1848) (algèbre bicomplexe) de dimension 4, des octaves (Cayley) de dimension 8 et enfin, de l'algèbre de Clifford 2^α - dimensionnelle.

Les matrices Hadamard, introduites en 1893 et restées inusitées jusqu à présente sauf dans la géométrie, permetront je le crois, d'achever la stratification du monde complexe. Ainsi, on pénétrera, je l'espère, dans la recherche du monde réel par celui hypercomplexe, dans lequel il semble que la métrique asymétrique et la structure Hadamard qui la laisse invariante vont avoir un rôle prépondérent. On entrevoit une nouvelle voie pour aborder, en particulier, le problème du dernier décénie celui de l'unification des forces physiques.

2.Matrices Hadamard, la métrique (hc) et les groupes qui la laisse invariante: Soit $H(h_{\alpha\beta})$ une matrice carée, dont les éléments $h_{\alpha\beta} = \delta(\pm 1)$ verifient la relation:

$$HH^T = H^T H = hI_h \tag{1}$$

où h est sa dimension (son ordre): H^T - la transposée, et I_h la matrice unité.

---

* Conférence soutenue à la Conférence Internationale de Géométrie différentielle, Bucarest, 24-28 août 1992.

De cette définition découle le fait que n'importe quelles 2 lignes (colonnes) sont orthogonales et, par la suite H peut être mise sous la forme normale, c'est - à - dire $h_{0i} = h_{i0} = +1$. De (1), il résulte encore que le produit direct (Kronecker) de deux H- matrices est encore une H - matrice, ayant l'ordre égal au produit de l'ordre des facteurs.

De (1) on tire aussi le fait (inédit jusqu' à présent) que l'ensemble des H - matrices laisse invariant la métrique symétrique g (régulier, de dimension h), aussi bien que la métrique asymétrique $\mathcal{G} = \dot{g} \oplus \hat{g}$, dans laquelle la partie antisymétrique $\hat{g}$ (2 -forme extérieure) peut être soit régulière d'ordre $h = 2k$ soit singulière d'ordre l (mod 4) $= 0$, avec $0 < l < \frac{k}{2}$; on peut appeler encore $\hat{g} \neq 0$ la métrique symplectique.

Soit V_h l'espace vectoriel h -dimensional. Donc, les H -matrices munissant cet espace d'une métrique (a) symétrique, qui contient: $\dot{g}(\hat{g} = 0)$ métrique *pseudo - euclidéenne régulière*, la métrique $\mathcal{G} = \dot{g} \oplus \hat{g}(\hat{g}$ -d'order h = 2k) hermitienne régulière et aussi les cas de singularité de la partie symplectique, signalées plus haut.

Par la suit, nous allons évaluer le groupe de structure $G(V_h)$ qui laisse invariante la métrique $\mathcal{G}$ à savoir:

1. $G(V_h, \dot{g}) = O^i(h)$ le groupe (pseudo) orthogonal ;
2. $G(V_h, \mathcal{G})$ Hermitte $= U^i(\frac{h}{2})$ groupe pseudo - unitaire ;
3. $G(V_h, \mathcal{G}), \hat{g}$ singulière $= U(l) \times O(h - 2l)$.

Dans chaque cas, les groupes indiqués, sont munis, ainsi qu'il s'ensuit de (1), de l'homothétie de coefficient $\sqrt{h}$. Autrement dit, les H -matrices invarient la métrique $\sqrt{h}\mathcal{G}$ de l'espace V_h, qui est le *sous groupe* des homothéties $R \times \mathcal{G}$ et qui est du même ordre que le groupe indiqué plus haut, dans les cas considérés.

Example [2]: Les algèbres Clifford (hc) considérées dans la conférence antérieure qui s'obtiennent par le redoublement itéré de algèbre **C** par $e_0 = i = \sqrt{-1}$; si le redoublement est toujours diminuant, $\delta = -1$, allors on obtient les algèbres C l i f f o r d orthogonales (1876); si les redoublements sont toujours conservantes ($\delta = +1$) on a les algèbres Clifford symplectiques (1977); et s'ils sont mélangés, alors on obtient toutes les algèbres Clifford orthosymplectiques, qu'on peut appeler, toutes ensemble, algèbres Clifford - Hadamard d'ordre $h = 2^\alpha, 1 \leq \alpha < \infty$. Il est claire que les groupes indiqués invarient les espaces V_{2^α} correspondantes.

Remarque: Les espaces vectoriels V_h sont munis de la topologie linéaire conforme à la metrique $\mathcal{G}$ qui s'encadre dans la structure (hs) et ainsi, on peut utiliser les éléments d'analyse (hc), adequates aux agèbres Hadamard; nous utilisons ici les opérateurs $D, D^*, \Delta_p = DD^* = D^*D$ et tout le calcul vectoriel (hc), avec les particularisations respectives [1,2,3].

3.Variétés (hc) Einstein - Hadamard: connexion canonique. [1,2,3] Soit M une variété paracompacte, $C^\omega-$ différentiable , $h = 2k$ dimensionnelle, modellée par l'espace vectoriel $V_h.T(M)$ et $\mathcal{T}_2(M)$ sont respectivement: le fibré tangent et le fibré des formes bilinéares ; l'object de structure sur $\mathcal{G} \in \mathcal{T}_2(M)$ est la métrique (a) symétrique du même type que celle du modèle V_h (Sec.2) . Ainsi, le groupe de structure G(M) sera analogue (Sec.2). Par la suite, nous allons considérer $(M, \mathcal{G})$, avec $\mathcal{G}$ régulier, $\dot{g}$ -pseudo- euclidéen h -dimensionel et $\hat{g} - 2$ forme différentielle, 2k - dimensionnelle. Dans (Tensor 1988),nous avons montré que sur M il existe une seule connexion canonique d'opérateur covariant ∇, donée par la "lemma Ricci généralisse" (J.R. Vanstone 1964), qui vérifie $\nabla\mathcal{G} = 0$, donc $\nabla\dot{g} = 0$ et $\nabla\hat{g} = 0$ et qui a la courbure Ricci symétrique. Au cas du $d\hat{g} = 0$ est differentielle exacte, la structure sur M sera Kählerienne; alors ∇ est une connexion Levi - Civita, ayant, en plus du courbure Ricci symétrique et torsion nulle. Dans ce cas, nous allons considérer la métrique asymétrique $\mathcal{G}$, qui vérifie en plus: $R = \sqrt{h}\dot{g}$, où R désigne la courbure Ricci de la connexion ∇. Nous dirons que $(M, \mathcal{G})$ est une variété Einstein - Hadamard (asymétrique) puisque, si $\hat{g} = 0$, on obtient la variété Einstein. (A. Besse, 1987).

4. Nous nous réferons maintenant aux **déformations infitésimales,** relatives aux champs vectoriels $\bar{v}, \bar{w}, ..$; on utilisera, en dehors de l'opérateur ∇_v et la dérivée Lie $\mathcal{L}_{\bar{v}}$; je rappelle la relation entre eux, á savoir:

$$(\mathcal{L}_{\bar{v}}\nabla)_{\bar{w}} = [\mathcal{L}_{\bar{v}}, \nabla_{\bar{w}}] - \nabla_{[\bar{v},\bar{w}]} \tag{2}$$

d'où il découle:

$$(\mathcal{L}_{\bar{v}} div) = [\mathcal{L}_v, div.] - div\bar{v}(div). \tag{2'}$$

Si l'on étudie la deformation de la métrique $\mathcal{G}$ nous avons la relation

$$(\mathcal{L}_{\bar{v}}\nabla)_w\mathcal{G} = \nabla_{\bar{w}}(\mathcal{L}_{\bar{v}}, \mathcal{G}); \ (\mathcal{L}_{\bar{v}} div)\mathcal{G} = -(\Delta_p\bar{v} + \nabla div\bar{v}). \tag{3}$$

Si l'on a $d\hat{g} = 0$ (Kähler), alors $\hat{g} = dw_{\bar{u}}$; et le pfaffien $\omega_{\bar{u}}$ s'écrit ainsi : $i_{\bar{u}}\dot{g} = x(\dot{g} \otimes \bar{u})$.

On aura alors, en définitive:

$$i_{\bar{v}}d\omega_{\bar{u}} + d\dot{g}(\bar{v}, \bar{u}) = i_{\bar{u}}\mathcal{L}_{\bar{v}}\dot{g} + i_{[\bar{v},\bar{u}]}\dot{g}. \tag{4}$$

En particulier, si $\bar{v} = \bar{u}$ on arrive à la formule remarquable:

$$i_{\bar{u}}g + d\|u\|^2 = i_{\bar{u}}(\mathcal{L}_{\bar{u}}\dot{g}). \tag{5}$$

qui établit la relation entre les parties symétrique et antisymétrique de la métrique $\mathcal{G}$.

Example. Dans la cas de quaternions (octaves) pures qui forment S_3 (resp. S_7) euclidéen de base e_1, e_2, e_3 (resp. $e_1, ...e_7$) il existe le produit vectoriel , qui au cas différentiel conduit au roteur. Alors (5) conduit à la formule:

$$(5') \qquad (\bar{v}, \nabla)\bar{v} = rot\bar{v} \wedge \bar{v} + \frac{1}{2}\nabla\bar{v}^2 (\text{Helmholtz})$$

ayant un rôle remarquable, surtout dans la dynamique des fluides.

5. Je crois que les formules (4), (5) pourront être utilisées pour déchiphrer les relations entre les forces fondamentales de la physique, dans lequelles le rôle fondamental appartient aujourd'hui à la métrique asymétrique et aux groupes qui la laissant invarinate. Cette assertion s'appuie sur les 2 considérations suivantes:

1. Toute algèbre (hc) A (non commutative), à base dénombrable $(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$, peut être munie d'une norme (métrique) asymétrique et donc l'application bilinéaire $A \times A \to A$ s'exprime encore ainsi : $\varepsilon\varepsilon = C\varepsilon$ par le tenseur $C_{[1,2]}$ des constantes de structure. $C\varepsilon = C^o\varepsilon_0 + \bar{C}\bar{\varepsilon} : C^0 = C^o_{\alpha\beta} = C^0_{(\alpha\beta)} + C^0_{[\alpha\beta]}$ mais $C^0_{\alpha\beta}$ définit $\dot{g}$ sur A, tandis que $C^0_{[ij]}$ le $\hat{g}$ de A lesquelle, en général sont indépendantes et on a: $g \oplus \hat{g} = \mathcal{G}$ la métrique asymétrique pour tout (A, ε) noncommutatif.

Si l'on considerère C^ω -differentiable $(M, \mathcal{G})$ modellée par A, la condition Kähler $dg = 0$ établit, grosso modo, les relations des conditions (4,5).

2. Du livre de A.Salam sur la "Grande unification", on constate que, jusqu' à présent c'est - à - dire dans l'unification de 3 forces foudamentales en une seule "electro - nucléaire" , un rôle de base a joué la métrique Hermite - Kähler sur la variété espace - temps et les groupes orthogonaux et unitaires qui l'invariant, dans les étapes de l'unification qui se sont succédées.

Conclusion. En ce qui concerne "la grande unification" je suis parvenu qu-on doit admettre comme hypothèse de travail (Gedankenypothese), comme il était d'habitude en physique au debut du siècle, la suivante l'existence d'une relation naturelle (intrinsèque), exprimée par les formules (4,5) entre l'attraction universelle, representée par métrique d'Einstein Hadamard de ci dessous, et, la force electro - nucléaire par la structure symplectique $(\hat{g}, d\hat{g} = 0)$. J'aimerais qu'un interprétation compéténte de la part de physiciens, de ces formules, adéquat au cas, pourrait les aider et, peut-être, leur épargner des efforts improductifs.

En fin, je le dis moi aussi: "Dixi et animam levavi", ce qui veut dire: j'ai dit ainsi ai soulagé mom âme.

BIBLIOGRAPHIE

1. G h e o r g h i e v, Gh. - *Applications of hypercomplex analysis to the differential geometry*, Analele St. Univ. Iasi, Mat., 38 (1992).
2. G h e o r g h i e v, Gh. - *De la géométrie hypercomplexe et structures Hadamard*, (sous presse).
3. V r a n c e a n u, Gh., R o s c a, R. - *Introduction in relativity and pseudo - Riemannian geometry*, Editura Acad. Române, Bucuresti, 1976.

Received:23.III.1993

Department of Mathematics
University "Al.I.Cuza" Iasi
B-dul Copou, 11
6600, Iasi
ROMANIA