ANALELE STIINTIFICE ALE UNIVERSITATII "AL.I.CUZA" IASI
Tomul XXXIX, s.I.a, Matematica, 1993, f.3.

DE LA GÉOMÉTRIE HYPERCOMPLEXE ET STRUCTURES HADAMARD*

PAR

GHEORGHE GHEORGHIEV

1.Introduction.1.Pendant la 3ème décenie de ce siècle, lorsque j'étais étudiant, le calcul vectoriel répresentai une nouveauté a l'Université. J'ai eu la chance d'avoir comme maitre le professeur Simion Sanielevici, qui enseignait ce cours, pour la première fois, afin d'utiliser cet instrument aussi bien en géométrie différentielle, qui consistait en la théorie de courbes et surfaces dans l'espaces euclidien S_3, que pour tout le cours de Mécanique rationnelle, qu'il publia ultérieurement.

Depuis, j'ai acquis la conviction que le calcul vectoriel est bon à presque tout, mais aussi la nostalgie d'une unification de la géométrie et de la physique.

Ces dernières années, j'ai constaté que ce calcul se laisse étendre à l'espaces des algèbre hypercomplexes à base denombrable, tant pour les questions de topologie linéaire que différentielle. De plus, hormis des difficultés non dépassées encore, on peut transférer cet algorithme à la théorie de variétés différentiable modellées par les algèbres (hc). Ceci est le but principal de l'exposition qui suit.

2.Au congrès international des mathématiciens de 1978 de Helsinki, le physicien R. Penrose a présenté la conférence " La géométrie complexe et le monde réel", dans laquelle les idées hermitiennes, ainsi que les groupes unitaires ont joué un rôle prépondérant. J'ai pu constater ensuite que A.Salam dans ses articles sur la grande unification des forces universelles, parlant du concept de symétrie (H.Weyl) et de la théorie fondamentale de la matière, énumère concrètement une série de groupes unitaires, tel que SU(6), ayant

---

* Conférence soutenue à la Conférence Internationale de Géométrie différentielle , Bucarest, 24 - 28 août 1992.

un rôle remarquable dans l'unification des 3 forces fondamentales; ensuite, il se réfère aussi aux groupes $SU(2)\times$U (1); SU(3); SU (5); SU (8); SU (11); SO (22).

De ces considérations, ainsi que des autres, ressort le fait que maintenant on pose le problème de diversifier la recherche du monde complexe par sa structure (hc) à l'aide des matrices Hadamard d'ordre α (mod 4) = 0. Ces matrices, généralisées déterminent en fait les groupes d'invariance de la métrique (a) symétrique de l'espace (hc).

En ceci consiste le second objectif de cet exposé.

2.Algebres (matrices) (hc) [1]. La théorie des monbres (hc) a été placée par tradition (XIXeme siècle) au cadre des Algèbres linéaires, à base denombrable associatives et binaire associatives (fléxibles).

3.Soit $A(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ une C^* -algebre sur **R** oú **C**, à base denombrable avec unité ε_0, involutive $(*)$, c'est à dire:

$$A = A_0\varepsilon_0 \oplus \bar{A}\bar{\varepsilon}, \quad A^* = A_0\varepsilon_0 \ominus \bar{A}\bar{\varepsilon} \tag{1}$$

de norme (métrique):

$$\langle x, x^*\rangle = \|x\| = g(x)\varepsilon_0, \quad \forall x = x^0\varepsilon_0 + \bar{x}\bar{\varepsilon} \in A \tag{1'}$$

De $A \times A \to A$ pour $\forall x, y \in A$, il résulte la décomposition:

$$xy = \langle x, y\rangle\varepsilon_0 + (x^0\bar{y} + \bar{x}y^0)\bar{\varepsilon} + [\sigma(\bar{x}, \bar{y}) + \alpha[\bar{x}, \bar{y}]]\bar{\varepsilon} \tag{2}$$

où $\sigma(\alpha)$ est opérateur bilinéaire (anti) symétrique agissant sur $\bar{A}$. (2) s'exprime globalement ainsi:

$$A = A^{(+)} \oplus A^{(-)} \tag{2'}$$

(somme topologique directe) où

$$A^{(+)} = g(A, A^*)\varepsilon_0 + \sigma(A, \bar{A})\bar{\varepsilon}; \; A^{(-)} = \alpha[\bar{A}, \bar{A}]\bar{\varepsilon}. \tag{3}$$

il en resulte que $A^{(+)}$ este une algèbre de Jordan (spéciale) dans le cas asociatif, et $A^{(-)}$ est l'algèbre (Banach) Lie du groupe multiplicatif:

$$G(A) = \exp A^{(-)}, \; \xi \to \xi^{-1} = \xi^* \tag{4}$$

$G(A)$ est ouvert dans l'agèbre et la laisse invariante. Si
$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $\forall x, y \in A$, alors $A = A^{(+)}$ - Jordan et si
$\sigma(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, alors A sera algèbre Lie à unité ou admissible.

Exemples: Dans [1] on détermine, à l'aide des matrices à base dénombrable, des algèbres et groupes Lie (Banach) classiques: $0, Sp, K, U$ et l'on étudie les déformations infinitésimales de la métrique.

Remarque: Lorsque A est binaire associative, alors on a pour $\forall x, y \in A$:

$$(x, y, x) = x(yx) - (xy)x = 0 \tag{5}$$

Dans ce cas, $G(A)$ donné par (4) sera quasigroupe ou loop Banach-Lie qui laisse A invariant. Cette cátegorie d'algebres (hc) contient les extensions infini dimensionnelles des algèbres Jordan, Lie binaires, alternatives, symétrique à gauche etc. Ces algèbras ne peuvent plus s'exprimer par des matrices carrées, qui approximent seulement leur fermeture. Pour cette raison l'expositon qui suit se réfère au cas A -associatif, pouvant s'adapter facilement aux structures flexibles.

4.**Bases canoniques:** Je rappelle que l'application bilinéaire $A\times A \to A$ de l'algebre (A, ε) s'exprime aussi par:

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = C\varepsilon, \tag{6}$$

où C c'est le tenseur [1,2] des constantes de structure de la base ε; autrement dit C est une matrice cubique, soumise aux conditions d'associativité (binaire).

D'habitude , on utilise courrament la table de multiplication de Cayley:

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = M\varepsilon \tag{6'}$$

M étant une matrice carrée.

Utilisant le groupe d'invariance $G(A)$, on peur choisir des bases "canoniques", de facon que la matrice M soit numérique (**Z**). Nous allons considérer des algèbres qui admettent des bases canoniques "régulières" ayant des matrices $K = [k_{ij}], k_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall i, j$, ou "normales": $D = [\delta_{ij}]$. $\delta_{ij} \in \{-1, 1\}$. Dans ce dernier cas, on suppose de plus: $\delta_{0i} = \delta_{i0} = 1, \forall i$; et que sur la diagoanle principale sont les élémets $\pm\varepsilon_0$, ce qui exprime que la métrique est régulière, etant mise sur la forme canonique pseudo - euclidienne. Par exemple, les algèbres Clifford orthogonales admettent des basses canoniques normales, sont donc normales.

Je mentionne que la table de multiplication Cayley indique les algèbres associatives et celles qui approximent par l'inclusion, les algèbres binaires associatives. Ainsi, s'explique le fait que, dans tous les livres, la table de multiplication Cayley de l'algèbre des octaves est en fait celle du groupe

orthogonal $O(8)$. Apparaît ainsi un type d'approximation de la flexibilité (analoque de la nonholonomie) par l'inclusion.

5.Redoublement (hc). Soit (A, ε, C) une algébre (hc). Nous allons considérer des algèbres lineaires (d'ordre 2), doubles et duales, ayant unités e_0 donnée par $e_0^2 = x \in \{-1, 0, 1\}$. Ce redoublement de l'algebre A par e_0 peut être concu de 2 possibilités: conservante ($\delta = +1$) et diminuante ($\delta = -1$) en ce qui concerne les propriétés de A. Ainsi, on obtient 6 nouvelles algèbres $\mathcal{A}_\sigma(\sigma = 1, ..., 6)$ dont 3 conservantes et 3 diminuantes. Les tables de multiplication (Cayley) respectives s'obtiennent par le schéma suivant:

	ε	ε'
ε	$\varepsilon\varepsilon = C\varepsilon$	$\varepsilon\varepsilon' = C\varepsilon'$
ε'	$\varepsilon'\varepsilon = \varepsilon_0'\delta C\bar{\varepsilon}'$	$\varepsilon'\varepsilon' = x\varepsilon_0 x\delta C\bar{\varepsilon}$

où ε est la base de $\mathcal{A}, \varepsilon' = e_0\varepsilon = \varepsilon e_0$ et $(\varepsilon, \varepsilon')$ constituient la base de l'algebre redoubles $\mathcal{A}$. Ainsi, la structure (hc) des algèbres (hc) $\mathcal{A}_\sigma$ est complètement déterminée par $C, \varepsilon_0(e_0^2 = x)$ et de $\delta = \pm 1$. Il est évident que, au cas des algèbres régulières ou normées, on remplace C par K ou D.

Exercices:

1. Soit $A = \mathbf{C}$; les redoublements conduisent à 6 nouvelles algèbres d'ordre 4 considérées dans [1].

2. Soit $A = \mathbf{C}$; par des redoublements itérées par **C** et toujours diminuantes on obtient les algèbras de Clifford orthogonales (1876); si l'itération est toujous conservante, on obtient les algèbres de Clifford symplectiques (A. C r u m e y r o l l e, 1977). Si l'on considère des itérations mixtes, toutes conduisent à 2^{p-1} algèbres d'ordre 2^p qu'on peut appeller algèbres Clifford (hc). Toutes les algèbres Clifford (hc) sont évidement associatives, normées, dont les matrices D sont des matrices H a d a m a r d (1893) d'ordre $h = 2^p, p = 1, ...$ désignées dans ce qui suit par H.

Remarque. Si l'on considère des variétés différentiables M modellés par $\mathcal{A}$, les redoublements (hc) équipent le fibré tangent TM à 6 nouvelles structures, dont 3 conservatives et 3 diminuantes.

3.Éléments d'analyse (hc). Les opérateurs différentielles (hc) étendent convénablement la **dérivée aréolaire** au cas complexe (D. P o m p e i u 1912, Iaşi), l'opérateur différentiel 4-dimensionnel de P.A.M. D i r a c (1928), la dérivée volumétrique des fontions quaternioniq (Gr. M o i s i l, 1931) et, enfin, l'opérateur P o m p e i u - M o i s i l (1979), appliqué sur des algèbres à division.

On peut indiquer trois définitions *indépendantes* pour ces opérateurs utilisant toujours le tenseur de structure C de l'algebre (hc) sur laquelle on

définit la fonction (le champ vectoriel (hc)), et en utilisant: a) la dérivée Fréchet (et sur la variété différentiable la dérivée covariante); b) adaptant au cas (hc) l'integrale de type Cauchy, appliquée par Moisil au fonctions Clifford, sous des conditions aux quelle on peut utiliser les formules stockiennes ; c) par l'utilisation des formules (1), au cas a) on arrive à leur interpretation *cinématique*. Cette dernière voie conduit à un calcul vectoriel (hc).

On considerere la C^ω - application

$$u : \Omega \subset A \to A, u \to u(x) = u^0(x)\varepsilon_0 + \bar{u}(x)\bar{\varepsilon}, \ x \in \Omega.$$

ou $\Omega \subset A$ est ouvert de l'espace vectoriel topologique A; les composantes $u^0(x), \bar{u}(x)$ sont des fonctions analytiques d'argument (x^0, x). On désigne par $\{u(x)\}_{x\in\Omega} = \mathcal{X}(\vee)$ l'ensemble des fonctions vectorielles (hc).

6. On considère l'operateur différentiel

$$D : \mathcal{X}(\Omega) \to \mathcal{X}(\Omega);$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x^0}\varepsilon_0 + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{\varepsilon} \quad \text{et} \quad D^* \frac{\partial}{\partial x^0}\varepsilon_0 - \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{\varepsilon}$$

L'applicant aux champs $u(x)$, on obtient

$$Du = \langle C\frac{du}{dx}\rangle\varepsilon, D^*u = \langle C^*\frac{du}{dx}\rangle\varepsilon, \tag{8}$$

où $\frac{du}{dx}$ est la dérivée Fréchet, definie par la matrice $[\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}]$.

L'opérateur Laplace (hc) défini naturellement par $\Delta_p = DD^* = D^*D$, appliqué à $u(x)$,sera:

$$\Delta_p = (C^*C\frac{d^2u}{dx^2})\varepsilon \tag{9}$$

Au cas où A est une algèbre régulière ou normée, utilisant le produit Cayley. les expression $Du, D^*u, \Delta_p u$ de (8), (9) reçoivent la forme canonique (expression intrinsèque) en ce sens, que leurs expressions par les dérivées partielles seront, évidement, lineaires, à coefficients entiers. Leur annulation

$$Du = 0, \quad \Delta_p u = 0 \tag{10}$$

conduit à des fonctions (hc) holomorphes, respectivement à des fonctions (hc) harmoniques. Il est évident qu'une fonction (hc) holomorphe est en même temps (hc) harmonique. Des informations plus précise sur l'existence

et la généralité des solutions de chaqune de ces problèmes se trouvent dans [1].

7.**Des formules intégrales:** Dans ce qui suit, on suppose que A est associative, de dimension finie, munie de la métrique régulière g et l'on considère $\Sigma \subset \Omega \subset A$, domaine simplement connexe, fermé, dont la frontière est munie d'un champ régulier de normales.

A l'aide de l'opérateur $*$, appliqué aux formes différentielles extérieurs, on peut écrire la suite d'applications:

$$u \xrightarrow{g} \omega_u \xrightarrow{*} *\omega_u \xrightarrow{C_d} Cd(*\omega_u) = DudV \tag{11}$$

où $gu = \omega_u, *\omega_u = gud\sigma, d\sigma = \Sigma_{\alpha=0}^{n}\varepsilon_\alpha dx^0 \wedge ... \wedge d\hat{x}^\alpha \wedge ... \wedge dx^n$ est la forme de surface et $dV = (det\ g)^{1/2}dx^0 \wedge ... \wedge dx^n$ est la forme de volume associées à la métrique.

En particulier, si l'on considère $\omega = D^*u$, alors $d(*\omega_u) = \Delta_p udv$.

Puisque la domaine Σ satisfait aux hypothèse pour appliquer les formules Stockiennes, on arrive à:

$$\int_{\partial\Sigma} gu\ d\sigma = \int_{\Sigma}(Du)dV, \quad \int_{\partial\Sigma} gD^*ud\sigma = \int_{\Sigma}\Delta_p u\ dV. \tag{12}$$

Enfin, sous l'hypothèse que le domaine $\Sigma \to x \in \Omega$ est restreint à x et en passant à la limite, on obtient la définition integrale:

$$Du(x) = \lim_{\Sigma\to x}\left(\frac{\int_{\partial\Sigma} gud\tau}{\int_{\Sigma} dV}\right), \Delta_p u = \lim_{\Sigma\to x}\left(\frac{\int_{\partial\Sigma} gD^*udV}{\int_{\Sigma} dV}\right) \tag{13}$$

En particulier, si:

$$\int_{\partial\Sigma} gu\ d\sigma = 0, \quad ou \quad \int_{\partial\Sigma}(gD^*u)d\sigma = 0, \tag{14}$$

on obtient les conditions d'holomorphie (hc), respectivement de harmonicité (hc).

8. **Des considérations cinématiques.** Dans ce but, nous allons considérer que l'argument $x^0 = t$ mesure le temps, et la champ $\bar{u}(x)\bar{\varepsilon} = u(x)\varepsilon - u^0(x)\varepsilon_0$ représente la vitesse du mouvement nonstationaire dans le milieu continu Ω. Nous allons utiliser les formules (2), (2'), qui nous conduisent aux formules suivantes, qui expriment le sens cinématique des dérivées (hc):

$$D^{(*)}u = [u^*_{,o(\mp)}\mathrm{div}(\bar{u})]\varepsilon_0 + [\bar{u}_{,o}(\pm)\bar{\nabla}u^o(\pm)\sigma(\bar{u})(\pm)\alpha(\bar{u})]\bar{\varepsilon} \neq uD^{(*)}. \tag{14'}$$

$$\begin{aligned} D_p u(u\Delta_p) = \{u^o_{,o,o} + \mathrm{div}\ \bar{\nabla}u^o + \mathrm{div}\ \sigma(\bar{u})\}\varepsilon_0 + \\ + \{\bar{u}_{,o,o} + \bar{\nabla}\mathrm{div}\ \bar{u} - \alpha^2(\bar{u}) - \sigma^2(\bar{u}) \pm [\alpha,\sigma]\bar{u}\}\bar{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{15}$$

ou $\sigma(\alpha)$ est la micro déformation symétrique (rotation antisymetrique) de la vitesse non-stationnaire et tenant compte que A est (binaire) associative on aura $(D, u, D) = 0$, ce qui conduit, après des calculs, à :

$$\mathrm{div}\ \alpha(\bar{u}) = 0, \ [\bar{v}, \alpha]\bar{u} = \alpha(\bar{\nabla}u^o). \tag{16}$$

Au cas de l'espace euclidien S_3, l'espace des quaternions représente celui des mouvements non-stationnaires de S_3 on aura $\sigma = 0, \alpha(\bar{u}) = rot\ \bar{u}$, tandis que les formule (16) se reduisent à

$$\mathrm{div}\ rot(\bar{u}) = 0, \quad rot(\bar{\nabla}u^o) = 0.$$

Tenant compte du fait que ∇ div u -rot^2 $\bar{u} = \bar{\Delta}\bar{u}$, (15) devient $\Delta_p u = \Delta u$.

Ainsi, pour le cas des mouvements non-stationnaires dans S_3 euclidean $\Delta_p = \Delta^0 + \Delta$, $\bar{u}$ etant la vitesse non-stationnaire et $u^o = \rho(x,t)$ la densité.

Revenant à l'equation de Laplace (hc) dont les solutions fournissent les champs (hc) harmoniques, ou autrement *anharmoniques,* pour des raisons de classification intrinsèque des algèbres (hc).

Nous pouvons distinguer 5 cas, ainsi que suit:

a) $[\sigma, \alpha] \neq 0$ solution $u(x)$ fonction anharmonique;

b) $[\sigma, \alpha] = 0$ solution $u(x)$ fonction semi - harmonique;

c) $\alpha = 0$ solution $u(x)$ fonction quasi - harmonique ;

d) $\sigma = 0$ solution $u(x)$ fonction presque harmonique;

e) $\sigma = 0$ et $\bar{\nabla}$ div $\bar{u} - \alpha^2(\bar{u}) = \bar{\Delta}\bar{u}$ solution $u(x)$ fonction harmonique.

Exemple. Si A est algèbre Clifford (1876), elle est algèbre Lie avec unité: $\sigma = 0$, dim $A = 2^\alpha, \Delta_p = \Delta$ (Moisil 1931); nous avons le cas d'harmonicité. Si A est algebre de Clifford symplectique (A. Crymeyrolle 1976), $A^{(-)} = 0, \alpha = 0, \Delta_p \neq \Delta$; on a le cas c) $\Delta_p u = 0$ fournira des fonctions quasi - harmoniques.

On en déduit, en particulier, que notres algèbres Clifford (hc), ou autrement dit, orthosymplectiques, pouvont être classifiées non seulement suivant dim $A = 2^\alpha$ mais aussi suivant leur appartenance à l'une des 5 classes (an) - harmoniques. Mais le sens de cette classification est beaucoup plus général et profond.

9. On reprend le problème du redoublement (hc) $A \to \mathcal{A}$. L'argument dans $\mathcal{A}$ sera designé par $\xi(x, x')$ par $\eta(\xi) = (u(\xi), u'(\xi))$ la fonction (hc) $\in \mathcal{A}$.

La dérivée Fréchet se décompose de la manière suivante:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dx'} \\ \frac{du'}{dx} & \frac{du'}{dx'} \end{pmatrix}$$

Alors la dérivée (hc) dans $\mathcal{A} : \mathcal{D} = (D, D')$ appliques à η sera

$$D\eta = (K\frac{d\eta}{d\xi})E = (C\frac{du}{dx})\varepsilon + (C\frac{du}{dx'})\varepsilon' + \delta\frac{du'}{dx}\varepsilon' + \delta x(\frac{du'}{dx'})\varepsilon'$$

donc, en definitive, on obtient la formule de transition:

$$D\eta = C[\frac{du}{dx} + \delta x\frac{du'}{dx}]\varepsilon + C[\frac{du}{dx'} + \delta\frac{du'}{dx'}]\varepsilon', \tag{16}$$

où K est le tensor de structure de la base E de l'algebre $\mathcal{A}$. Au cas de redoublement seulement par **C** alors $x = -1$ et $\delta = \pm 1$ fournissent les redoublement conservantes, respectivement diminuants.

10. **Sur les modèles plausibles.** Partant du comportament des trous noirs (des étoiles comprimées au maximum) le physicien A.D. Sakharov a émis en 1988 la thèse de "l'univers global ", composé de celui "réel" et d'un autre, symétrique à celui - ci, nommé par lui des "ombres". A cette occasion il élargit les postulats de Einstein considerant le temps non plus unidimensionnel, mais en admettant qu'il a des dimensions paires. L'hypothèse dit l'auteur, pourret être confirmée par des observations et mésurés de l'absorbtion de l'énergie des "trous noirs".

Partant du fait que l'univers réel , y compris la temps, est 4 -dimensionnel, euclidien (en physique classique) ou lorenzien (en physique relativiste) et en admettant que l'hypothese englobe aussi l'antisymetrie, je crois qu'on peut accepter comme modèles ceux obtenus par des redoublements diminiants et conservantes. Il s'agit de l'espace Q des quaternions (physique classique) et τ des algèbres "bicomplexes" (ou tétranions). Je rappelle que, par redoublement on obtient des algebres 8 -dimensionnelles des octaves O et $Q(C)$, aussi bien que ceux des ω - octonions et des $\tau(C)$ ou des algèbres 4-complexes. [1]

Dans chaque de ces 4 modèles plausibles de "l'univers global", le nouveau postulat sur le temps est vérifié, et dans les récherches analytiques différentielles , on applique la formule (16).

4.Elements de géométrie différentielle (hc). Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème annoncé en esquissasant quelques un de ses aspects. Nous commencons par:

11. *Variétés (hc):* Nous nous limitons au cas d'une variété M C^ω– - différentiable, modellée par l'algebre (hc) A. Nous renoncons à l'étude du cas général de modèle $A^p(p > 1)$, parce que nous avons démontré, premièrement, que nous nous limitons alors au cas associatif; ensuit, si A n'est plus commutative, il faut renoncer à l'ussage de la méthode des formes differentielles extérieurs sur M [1].

Au cas considéré on peut munir la variété M des atlas (hc): *holomorphes* ou *harmonique* suivant que la transition dans ses cartes locales incidentes est assurée par des fonctions solutions des équations $Du = 0$ soit $\Delta_p u = 0$ definies sur $\Omega \subset A$.

Les atlasses (hc) harmoniques, inutilisées jusqu' à présent ont leurs origines dans les coordonées harmonique, introduites par les physiciens depuis longtemps. Je rappelle que le groupe de structure que laisse M invariant sera dans le cas considéré aussi $G(A)$ ce qui permet une définition intrinseque de la connexion liée au modèle (hc) A. Ainsi, on arrive à ce que M soit une π -variété au cas où A est un C^* -algébre (Banach); ou bien, conformément à l'usage au cas de dimension finie, M sera une variété *parallélisable* (E. C a r t a n).

Lorsque A est l'algèbre Clifford (hc), la variété M sera munie d'une métrique (a)symmétrique, à savoir $\mathcal{G} = \dot{g} \oplus \hat{g}$ ou la partie symetrique $\dot{g}$ est la métrique (pseudo)riemanniene, et $\hat{g}$ est 2- forme symplectique, toutes deux (non)dégénérées et le groupe $G(M)$ sera généralement (pseudo)unitaire, auquel s'ajoute un facteur de homothétie dim A ainsi qu'il résultera du Sec.5.

Remarque. Pour dépasser le cadre des π - variétés, on pourrait utiliser des rèperes canoniques non holonomes (dans le cas riemannien, par exemple, orthogonaux - voir [1]), ce qui imposerait l'usage des cartes locales fermées à frontière, munie des champs des normales, se qui garantirait l'utilisation des formules intégrales dans la définition des opérateurs (hc) (Sec.3) D, Δ_p sur M. De cette facon, l'opérateur covariant ∇ remplace la dérivées Fréchet dans la définition de ceux - ci sur M.

Cas particuliers Les π - variétes englobent les groupes Lie (Banach) aussi bien les variétés Vrânceanu à coéfficients de connexion des constantes des algèbres (hc).

12.*Prolongement (hc):* Nous essayons d'etendre le redoublement (hc) au fibrés vectoriels et ensuite à ceux différentiables. Dans ce but, nous considérons un espace vectoriel bigradué: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ dans lequel les indices conservent la parité, c'est à dire à $(\bar{0}, \bar{0}); (\bar{1}, \bar{1}) \to \bar{1}$, et à $(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, 0) \to \bar{1}$. On suppose ensuit que $\mathcal{A}$ est une algèbre bigradué, alors son produit $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se décomposera ainsi dans:

a) $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \to \mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre egale à A;
b) $\mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}} \to \mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une (sous) algébre dans A;
c) $\mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}} \to \mathcal{A}_{\bar{1}}$ est A - module à gauche;
d) $\mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \to \mathcal{A}_{\bar{1}}$ est A - module à droite;

Ainsi , $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre (hc), $\mathcal{A}_0 = A = A_0\varepsilon_0 + \bar{A}\bar{\varepsilon}$ de base ε; on suppose que $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ est espace vectoriel de dimension finie, de base $\varepsilon_{\bar{1}}$.

En definitive, $\mathcal{A} = A_0\varepsilon_0 + \bar{A}\bar{E}$ où $E_o = \varepsilon_0, \bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_1)$ est une C^* - algèbre bigraduée (avec unité, involutive, admetant des bases denombrables

E) et son produit sera $E \times E = KE$ où le tenseur $K[1,2]$ contient C de la base ε de la $\mathcal{A}_{\bar{0}} = A$ Au cas où c) et d) commutent ($\delta = +1$) c'est à dire sont symétriques; ou bien c) et d) anticommutent ($\delta = -1$) c'est à dire sont antisymetriques, nous dirons que $\mathcal{A}$ est une algèbre *semi-gradué* étant le prolongement (hc) $\mathcal{A}_{\bar{0}} = A$. Géometriquement $\mathcal{A}$ apparait comme un fibré gradué de base $\mathcal{A}_0$ de fibre $\mathcal{A}_1$ muni de 2 structures: *conservate* ($\delta = +1$) et *diminuante* ($\delta = -1$).

Examples: Si $\mathcal{A}_0 = A$ est algèbre Lie, elle vérifie le condition de Jacobi $J(A, A, A) = 0$; alors la condition b) impose d'avoir aussi: $J(\mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}) = 0$ et $\delta = -1$. $\mathcal{A}$ étant l'algebre (hc) nous aurons la decomposition $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(+)} \oplus \mathcal{A}^{(-)}$ où

$$\mathcal{A}^{(+)} = \mathcal{G}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}^*)\varepsilon_0 + \{\sigma(A, \bar{A}) + \sigma(\mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{A}_1)\}\bar{\varepsilon} +$$
$$(\delta = +1)\sigma(\bar{A}, \mathcal{A}_{\bar{1}})\varepsilon_{\bar{1}}$$
$$\mathcal{A}^{(-)} = [\alpha(\bar{A}, \bar{A}) + \alpha(\mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{A}_1)]\bar{\varepsilon} + (\delta = -1)\alpha(\bar{A}, \mathcal{A}_{\bar{1}})\varepsilon_{\bar{1}}$$

exp $[\mathcal{A}^{(-)}]$ - groupe (Banach) Lie (binaire).

Considérons maintenant la variété M, modélé de A et le fibré $E \xrightarrow{\pi} M$ de fibre $\mathcal{F} = \mathcal{A}_{\bar{1}}$; E sera la variété modélée par $\mathcal{A}$ de groupe de structure $\mathcal{G}(\mathcal{A})$. Nous disons que E(M) est une prolongement (hc) de la base M; étant conservante ($\delta = 1$) ou diminuante ($\delta = -1$).

Le procès de prolongement (hc) peut se continuer seulement avec des conservantes (de type Vessiot - Ehresmann) ; ou, seulement avec des diminuantes (de type E. C a r t a n) et , enfin, mixtes (des deux types).

5.Sur les G-structures Hadamard. Une premiere pénétration dans le monde réel a été accomplie par Gauss (1831) par la création du plan complexe ensuite par Hamilton (1843) par l'espace des quaternions et par Hermite (dans les années du XIXeme siècle), ce qui contitue une premiére stratification du monde complexe. À ce but, on a utilisé la métrique biliné - aire Hermite - Kähler et le groupe unitaire qui la laisse invariante.

13. Les matrices de Hadamard (1893), bien conues tant par les algébristes, ayant des applications notables en combinatorique, analyse numérique, que en mathématique appliquées, n'ont pas trouvé pourtant jusqu' à présent, leur place en géométrie et dans la stratification ultérieurs du monde complexe. Dans l'enciclopédie mathématique, par exemple on affirme que les H-matrices sont de dim n (mod 4) = 0, hypothèse qui n'a été ni confirmée., ni infirmée jusque àux années 1970. Or, la définition groupale des H -matrices rend cette hypothèse caduque. Je rappelle que, dans $\mathbf{C}^n$ la structure Hermite invarie la métrique bilinéaire $\mathcal{G} = \dot{g} \oplus \hat{g}$ où g étant symétrique, et $\hat{g}$ antisymétrique (la deux forme extérieur) et la groupe de

structure est celui unitaire $U(\frac{n}{2})$ défini par des matrices U qui vérifient les conditions $UU^* = U^*U = I, U^{-1} = U^*$, det $U \in \mathbf{C}$ de module 1.

Les H -matrices (Hadamard) en vérifient seulement une partie de ces conditions, à savoir

$$HH^* = H^*H = mI_m (m = 2n), \text{ou } H^* = \bar{H}^T \tag{17}$$

et mod det $H \leq m^{m/2}$ si $H(h_{ij}), h_{ij} = \pm 1$. Par conséquent, en dehors de $1, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ dim $H = 0(mod\ 4)Q, O, \ldots$

Les algèbres Clifford (hc) (cf.Sec.2) constituient un exemple des matrices Hadamard de dim 2^α, les quelles au cas des redoublements strict diminuantes, conservent a) $\dot{g}$ ($\hat{g} = 0$) (Clifford orthogonales): tandis qu'au cas de redoublements strict, conservant; b) $\hat{g}(\dot{g} = 0)$ (Clifford symplectiques) et mixtes dans toutes modalites possibles; c) $\dot{g} \neq 0$ et $\hat{g}$ singuliere.

14. *Definition.* Une matrice $H(p, h)$ sera Hadamard généralisée (A.T. Butson, 1962), où h = dim H et p est le degré de l'équation binome $x^p = 1$ et vérifie (17).

Exemples.

1) H(2,h) sont les matrices Hadamard réelles; elles se prettent à être computérisée , telles que $h_{ij} = \pm 1$, et d'être mises sous la forme normée et les lignes (collones) soient orthogonales, et tandis que h_{ij} afectés à unité ε_0 indiquent la métrique $\dot{g}$ sous forme canonigue: $H(2, 2^\alpha)$ sont les matrices Clifford - Hadamard.

2) H (4,h) des matrices Hadamard complexes; leur forme normalisée sera $h_{ij} = (\pm 1, \pm i), i = \sqrt{-1}$. On montre que H (p,h) avec p nombre premier couvrent la classe H (p,h) des matrices Hadamard généralisées.

Je rappelle que la solution de l'équation de Pythagora: $x^2 + y^2 = z^2$ a été trouvée par Diophant (III - IV aprés J.C.) étant donée par

$$x = q^2 - p^2,$$
$$y = 2pq,$$
$$z = q^2 + p^2, \ (\forall p, q \in Z).$$

Si $h = 2^\alpha = q$, alors la solution sera

$$x = 2^{2\alpha} - p^2,$$
$$y = 2^{2\alpha} + p^2,$$
$$z = 2^{\alpha+1}p,$$

p premier, $\alpha > 0$. De cette manière à chaque algèbre Clifford - Hadamard on associe p premier ,la terme pythagorique, qui se prètte à définir l'échiquier

généralisé. Pour $p = 1$ et $\alpha > 1$ on obtient: $\alpha = 1$ (3,4,5), $\alpha = 2$ (8, 15, 17) etc. ; ces ternes étant découvertes encore par Babyloniens.

Il serait intéressant de reflechir sur les relations entre les espaces de dimension indiquée dans une terne et l'autre et leur sens en Mathématiques (la premiere) et Physique (tous les deux) utilisant dans ce but les prolongements (hc).

Récapitulant, on peut dire: les espaces munis de la métrique (a) symétrique sont complétement caractérisés par les structures Hermite - Hadamard
(généralisées). Je mentionne à cette occasion que si l'orthogonalité trouve ses origines à Phytagora, le phénomène symplectique à été découvert par Hamilton (1822), lorsqu'il avait 17 ans, et le groups symplectique par Abel (1831). Il semble que les G -structure Hadamard sont inédites et promises à un bel avenir.

N.B. Compte tendu du besoin d'étudier l'ensemble de solutions de certains équations differentilles, liées à la problematique des structures Hadamard, on peut étendre la notion de matrice, groupe, variété, Hadamard dans les espaces dénombrables, en prenant pour dim Hilb (R) = I; par exemple, quaternionnes hilberttiennes seront dim Q (Hilb) = IV etc.

Remarque. [2] L'échiquier Dirac - Trautman est lié aux algèbres Clifford (orthogonales) en ce qui concerne la périodicité de 8. Cette périodicite s'étend telle quelle au matrices Hadamard généralisées des algèbres Clifford (hc) relatives à la métrique asymétrique puisque le produit direct (Kronecker) de deux matrices Hadamard est aussi une matrice Hadamard egal au produit des ordres de facteurs [2] c'est à dire:

$$Cl_{g_1+g_2}(V_1 \oplus V_2) = Cl_{g_1}V_1 \oplus Cl_{g_2}V_2$$

à la difference que au cas spinoriel on a $g = \dot{g}$ tandis que au cas Hadamard (hc) $g = \dot{g} \oplus g = \mathcal{G}$.

On en déduit la conclusion:

La géométrie spinorielle est contenu dans la géométrie (hc) Hadamard et que l'opérateur Dirac s'encadre dans l'opérateur (hc) du (Sec.3).

15.*En conclusion.* Je voudrais rappeller un aphorisme du à Grigore Moisil sur le rôle du Problémes: "Nul problémes n'a de frontières, chaque solution en a plusieurs". Il en résulte que les travaux mathématiqué s'apprécient d'aprés les problémes et les idées contenues et après et en moindre mesure, d'après le nombre des lemmes, théorèmes et conséquence. De cette exposition se détachent au moins deux problèmes majeurs:

a) Le principe de *l'asymétrie* (qui comprendre celui de la symétrie de H. Weyl 1950) basé sur la métrique (a)symétrique - ses groupes d'invariances sont déterminées par les matrices d'Hadamard généralisées. Le cas où sa

partie antisymétrique (symplectique) est un différentielle exacte relations avec les théories relativistes d'unification.

b) Le principe de l' (an)harmonicité, l'étude des 5 classes de (an)harmonicité et d'édifier des théories spectrales, suivant la modéle du livre de M. Craioveanu et M. Puta (1988).

N.B. En suivant le modèle du livre de C. Udrişte (Linii de câmp, 1988) on peut étudier les lignes de champ (hc).

c) Le principe *variationnel* (hc): appliqué à l'énergie - impuls $\|u\|, \|Du\|, \|\Delta_p u\|$. A utiliser le prolongement (hc) conservant. A adapter le théoreme Noether suivant le modèle du livre de R. Miron et A. Anastasiei (1987).

d) A établir des relations entre la géométrie (hc) flexible, la géomeétrie non commutative (Alain Connes) et la supergéométrie (I. Manin).

BIBLIOGRAPHIE

1. Gheorghiev, Gh. – *Applications of hypercomplex analysis to the differential geometry*, Analele Stiintifice Univ. Iasi, Mat., 38 (1992).
2. Trautman, A. – *L'echiquer Spinoriel*, Bull. Acad. Belgique Classes Sci., 6-9 (1990), p.187-194.

Received:23.III.1993

Department of Mathematics
Univ."Al.I.Cuza" Iaşi
B-dul Copou 11, 6600 Iaşi
ROMANIA