Analele ştiinţifice
ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX, s. I a, Matematică, 1984 — 4

Romanian-Japanese Colloquium
on Finsler Geometry, Iaşi,
Romania, 16—25 August, 1984

REMARQUES SUR LA GÉOMÉTRIE DE FINSLER D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

PAR

I. P. POPESCU

Dans ce qui suit nous considérerons des variétés différentiables réelles, C^∞-différentiables, sans bord et fini dimensionelles. On utilise les notations de [1].

1. Le diagramme affine. Dans sa remarquable monographie [1], M. Matsumoto précise que la géométrie de Finsler d'une variété différentiable M se déduit de l'étude d'un système d'espaces fibrés qui sont associés d'une manière naturelle à la variété M. Ces fibrés sont :

$L(M)=(L, M, \pi_L, G)$ — le fibré des repères linéaires,
$T(M)=(T, M, \pi_T, V^n, G)$ — le fibré tangent,
$F(M)=(F, T, \pi_1, G)$ — le fibré de Finsler.

Nous indiquerons ces fibrés par le diagramme de la fig. 1, que nous appelons *le diagramme de Finsler* de la variété M.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
T \arrow[dr, "\pi_T"'] & & L \arrow[dl, "\pi_L"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Fig. 1

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "\pi_A"] & \\
A/G \arrow[dr, "\pi_T"'] & & A/V^n \arrow[dl, "\pi_L"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Fig. 2

Dans [2], nous avons montré qu'on peut associer à la variété M un diagramme plus complet que le diagramme de Finsler, qui contient celui-ci comme un sous-diagramme. C'est le diagramme de la fig. 2, qui se déduit du *fibré principal des repères affines définis* sur M, et nous l'appelons *le diagramme affine* de M. Il contient les fibrés suivants :

$A(M)=(A, M, \pi_A, GA)$ — le fibré des repères affines,
$L(M)=(L=A/V^n, M, \pi_L, G)$ — le fibré des repères linéaires,
$T(M)=(T=A/G, M, \pi_T, V^n, G)$ — le fibré tangent,
$F(M)=(A=F, T=A/G, \pi_1, G)$ — le fibré de Finsler,
$F_0(M)=(A=F, L=A/V^n, \pi_2, V^n)$ — le fibré trivial des repères.

2. Le groupe affine. Nous appelons *groupe affine réel d'ordre n*, noté GA, le groupe *des automorphismes affines* de *l'espace vectoriel réel* V^n.

Si G est le groupe des automorphismes linéaires de V^n, on sait que GA est isomorphe à $V^n \times G$, et l'action de GA à gauche sur V^n est donnée par

$$(1) \qquad {}_{(v,g)}\xi : V^n \to V^n \,|\, {}_{(v,g)}\xi(V) = v + gV, \quad V \in V^n.$$

On déduit d'ici la lois du produit du groupe GA :

$$(2) \qquad (v, g)(w, h) = (v + gw, gh), \quad (v, g)^{-1} = (-g^{-1}v, g^{-1}).$$

Si on note par 0 (zéro) *l'élément nul* du V^n et par e l'élément unité du G, alors nous avons

$$(3) \qquad (v, g) = (v, e)(0, g) = (0, g)(g^{-1}v, e),$$

et, par conséquent, identifiant $V^n \times \{e\}$ avec V^n et $\{0\} \times G$ avec G, nous pouvons écrire $GA = V^n.G$. (produit demi-direct).

Considérant le groupe affine GA comme groupe de Lie et *notant* par GA' *l'algèbre de Lie* des champs vectoriels gauches invariants, on peut écrire $GA' = V^n \oplus G'$, où V^n est l'algèbre de Lie de V^n et G' l'algèbre de Lie de G.

Un champ vectoriel gauche invariant $(V, A) \in GA'$ est de la forme

$$(V, A) = V^a E_a + A^a_b E^b_a,$$

où $(E_a = g^b_a \partial/\partial v^b,\ E^b_a = g^c_a \partial/\partial g^c_b)$ est la base de l'algèbre de Lie GA', déduite de la base naturelle $(\partial/\partial v^a,\ \partial/\partial g^a_b)_{(o,e)}$.

L'opération crochet du GA' sera

$$(4) \qquad [(V, A), (W, B)] = (AW - BV,\ [A, B]),$$

où $[A, B]$ est l'opération crochet du G'. En identifiant $V^n + \{0\}$ avec V^n et $\{0\} + G'$ avec G' on peut écrire

$$(5) \qquad [V, W] = 0, \quad [A, W] = -[W, A] = AW, \quad [A, B] = AB - BA,$$

où $A \in G'$ est consideré comme opérateur linéaire de V^n.

Si

$$(6) \qquad \mathcal{J}_{(v,g)} : GA \to GA \,|\, \mathcal{J}_{(v,g)}(w, h) = (v, g)(w, h)(v, g^{-1})$$

est l'automorphisme intérieur de GA correspondant de l'élément $(v, g) \in GA$, alors *l'opérateur adjoint* associé sera

$$(6') \qquad ad(v, g)(V, A) = (gV - gAg^{-1}v,\ gAg^{-1})$$

et par conséquent

$$(6'') \qquad ad(v, g)^{-1}(V, A) = (g^{-1}(V + Av),\ g^{-1}Ag).$$

3. Les translations à droite et les champs fondamentaux. L'action du groupe affine GA sur le fibré principal $A(M)$ est définie par la relation

$$(7) \qquad \tau : A \times GA \to A \,|\, \tau(u, (v, g)) = (y + zv, zg),$$

où $u = (y, z) \in A$ et $(v, g) \in GA$. On écrit

$$(7') \qquad (y, z)(v, g) = (y + zv, zg).$$

Si (x^i, y^i, z^i_a) sont les coordonnées de u dans une carte locale de A, déduite d'une manière naturelle d'une carte locale de M et (v^a, g^a_b) les coordonnées de (v, g) dans la carte naturelle de GA, alors on peut écrire

$$(8) \qquad \bar{x}^i = x^i, \quad \bar{y}^i = y^i + z^i_a v^a, \quad \bar{z}^i_a = z^i_b g^b_a,$$

où $(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{z}^i_a)$ sont les coordonnées de $\tau(u, (v, g))$.

Pour $(v, g) \in GA$ fixé, on obtient la *translation à droite* de $A(M)$

$$(8') \qquad \tau_{(v,g)}(u) = (y + zv, zg).$$

Remarque 1. Pour un élément $(0, g) \in GA$ nous avons

$$(9) \qquad \tau_{(o,g)}(u) = (y, zg).$$

Donc, une translation à droite sur $A(M)$ pour un élément $(0, g)$, peut être identifiée avec la translation à droite β_g, avec $g \in G$, sur le fibré de Finsler $F(M)$.

Remarque 2. Pour un élément $(v, e) \in GA$ nous avons

$$(10) \qquad \tau_{(v,e)}(u) = (y + zv, z).$$

Donc, une translation à droite sur $A(M)$ pour un élément (v, e) peut être identifiée avec la translation à droite pour $v \in V$ sur le fibré trivial $F_0(M)$. Une telle translation est une transformation S_v de F considérée en [1], *Proposition* 7.2.

En identifiant $\tau_{(o,g)}$ avec β_g et $\tau_{(v,e)}$ avec S_v on obtient

$$(11) \qquad \tau_{(v,g)} = \beta_g \circ S_v = S_{g^{-1}v} \circ \beta_g.$$

Remarque 3. Chaque translation à droite de $A(M)$ peut être décomposée en deux transformations ; une translation à droite sur le fibré $F(M)$ et une translation à droite sur $F_0(M)$. La règle de commutation de ces deux transformations est donnée par (11).

Un *champ vectoriel fondamental* du fibré $A(M)$, déduit d'un champ vectoriel gauche invariant $(V, A) \in GA'$, sera

$$(12) \qquad Z(V, A) = V^a Z(E_a) + A^a_b Z(E^b_a)$$

où

$$(13) \qquad Z(E_a) = z^i_a \frac{\partial}{\partial g^i}, \quad Z(E^b_a) = z^i_a \frac{\partial}{\partial z^i_b}.$$

Par rapport à l'action de GA sur $A(M)$ nous avons

$$(14) \qquad \tau'_{(v,g)} Z(V, A) = Z(ad(v, g)^{-1}(V, A)) = Z(g^{-1}(V + Av), g^{-1}Ag).$$

Si on fait l'identification $(V, O) = V$, $(O, A) = A$, on obtient :

Remarque 4. Les champs vectoriels $Z(A)$ avec $A \in G'$ sont des champs vectoriels fondamentaux sur le fibré de Finsler $F(M)$. Par rapport à une transformation S_v de l'espace F nous avons

$$(15) \qquad S'_v Z(A) = Z(Av, A) = A^a_b z^i_a \left(v^b \frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial z^i_b} \right).$$

Les champs vectoriels $Z(V)$ avec $V \in V^n$, sont des champs vectoriels fondamentaux sur le fibré trivial $F_0(M)$. Par rapport à des transformations β_g et S_v de l'espace F nous avons

(16) $$\beta_g' Z(V) = Z(g^{-1}V), \quad S_v' Z(V) = Z(V).$$

Un champ fondamental $Z(V)$ est un champ fondamental *induit* $Y(v)$, considéré en [1], *Definition* 7.3.

4. Sections globales. *Remarque* 5. L'isomorphisme

(17) $$I : F \to L \times V^n | I(u) = (z, z^{-1}y)$$

considéré en [1]. *Proposition* 6.1. est une conséquence de la proposition suivante :

L'application

(18) $$\sigma_L^0 : L \to F | \sigma_L^0(z) = (0, z)$$

est une *section globale* de fibré trivial $F_o(M)$. L'espace total F est par conséquent trivial et difféomorph avec la variété produit $L \times V^n$.

Remarque 6. Le groupe affine GA du fibré principal $A(M)$ est réductible au groupe lineaire G.

Cette afirmation est le résultat des propositions :

a) Le fibré tangent $T(M)$ est un *fibré associé* du fibré $A(M)$.

b) La section nulle

(19) $$\sigma_T^0 : x \in M \to \sigma_T^0(x) = 0 \in M_x$$

est une *section globale* du fibré tangent $T(M)$.

Pour chaque $x \in M$, un rèpère affine $u = (y, z) \in \pi_A^{-1}(x)$, détermine un isomorphisme

${}_u\bar{\alpha} : V^n \to M_x | {}_u\bar{\alpha}(v) = y + zv$, son inverse étant ${}_u\bar{\alpha}^{-1} : M_x \to V_n | {}_u\bar{\alpha}^{-1}(X) = z^{-1}(X - y)$, $X \in M_x$. Nous avons défini ainsi l'application $\bar{\alpha} : F \times V^n \to T | \bar{\alpha}(u, v) = y + zv$, d'où on déduit $\bar{\alpha}_v : A \to T | \bar{\alpha}_v(u) = y + zv$ et par conséquent $\bar{\alpha}_v = \pi_1 \circ S_v$.

Remarque 7. L'application

$$\sigma^o = (\sigma_T^o, \sigma_T^o) ; \quad L(M) \to T(M)$$

représente un plongement de fibré $L(M)$ dans le fibré de Finsler $F(M)$. L'image $\sigma^o(L(M))$ est un *sous-fibré fermé* de $F(M)$ et son complémentaire $F(M) - \sigma^o(L(M))$ est un *sous-fibré ouvert* de $F(M)$.

Ces sous-fibrés jouent un rôle important dans la géométrie de Finsler de la variété M, qui constitue un problème d'une étude future.

BIBLIOGRAPHIE

1. Matsumoto, M. — *Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces*. Kyoto University, Kyoto, 1982

2. Popescu, I. P. — *Remarques sur les connexions de Finsler*. The Proceedings of the National Seminar on Finsler Spaces. Braşov, Febr. 1980, Tip. Universităţii din Timişoara, 1981

Université de Timişoara
Chaire de mathématique
R. S. Romania

Analele ştiinţifice
ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX, s. I a, Matematică, 1984 — 4

Romanian-Japanese Colloquium
on Finsler Geometry, Iaşi,
Romania, 16—25 August, 1984

THE GROUP OF TRANSFORMATIONS OF FINSLER CONNECTIONS SPECIAL CASES

BY

M. S. RADIVOIOVICI

§0. Introduction. Let M be an n-dimensional differentiable manifold, and (E, π, M) a vector bundle over M with fibre dimension m. Denote by $\mathscr{X}(E)$ the algebra of vector fields over E, by $\mathscr{X}^*(E)$ the algebra of covector fields on E and by $\Lambda_1^1(E)$ the algebra of the linear mappings of $\mathscr{X}(E)$ on $\mathscr{X}(E)$. Further we shall consider any metric tensor field on E as a section G in $L(TE, T^*E)$, $G : \mathscr{X}^*(E)$ and $G^{-1} : \mathscr{X}^*(E) \to \mathscr{X}(E)$ be the inverse of G such that $G^{-1}(G(X)) = X$ for all ω and X in $\mathscr{X}^*(E)$ respectively in $\mathscr{X}(E)$. In the following sections we give an invariant form to the properties of the Finsler geometric objects, to make possible a global view upon how useful the method of Finsler geometry can be in the study of the geometry of a vector bundle endowed with remarkable geometric structures.

§1. The group of transformations of Finsler connections. Let N be a nonlinear connection and ∇ a Finsler connection on (E, π, M). A transformation of Finsler connection $(N, \nabla) \to (\bar{N}, \bar{\nabla})$ is given by

(1.1) $$\bar{N} = N - A, \quad \bar{\nabla}_X^H = \nabla_X^H - D_X^H + \nabla_{A(X)}^V, \quad \bar{\nabla}_X^V = \nabla_X^V - D_X^V.$$

Where A is a Finsler tensor field of type $\binom{0\,1}{1\,0}$ and

$$D : \mathscr{X}(E) \to \Lambda_1^1(E), \quad X \to D_X$$

such that

$$(D_{X^H} Y^H)^V = 0 ; \quad (D_{X^V} Y^V)^H = 0. \quad (D_{X^V} Y^H)^V = 0 ; \quad (D_{X^H} Y^V)^H = 0.$$

If we denote that $D_X^H = D_{X^H}$, $D_X^V = D_{X^V}$ we get simmilar propertis for D_X as for ∇_X. If we denote by $D^H, D^H : \mathscr{X}(E) \to \Lambda_1^1(E)$ and by $D^V : \mathscr{X}(E) \to \Lambda_1^1(E)$ it is possible to rewrite the above conditions : the vertical and horizontal distributions are parallel with respect to D_X^H and D_X^V for any X in $\mathscr{X}(E)$.

Theorem 1.2. *The set of all transformation of Finsler connections of type* (1.1) *and the composition of mappings has a group structure. The group acts effectively and transitively on the set of Finsler connections.*

Further we give the transformation laws for the torsion and curvature tensor fields when $A = 0$.

$$\begin{cases} \bar{T}(X, Y) = T(X, Y) - (D_X Y - D_Y X), \\ \bar{R}(X, Y) = R(X, Y) - (\bar{\nabla}_X D)_Y + (\bar{\nabla}_Y D)_X + D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X - D_{T(X,Y)} \end{cases}$$