(i) $H^a(X, PY)=H^a(X, Y)$, (ii) $K^a(X, PY)=-K^a(X, Y)$,

(iii) $H^a(X, QY)=(q^{-1})^a_b K^b(X, Y)$, (iv) $K^a(X, QY)=q^a_b H^b(X, Y)$,

(v) $H^a(X, vY)=0$, (vi) $K^a(X, hY)=0$,

(vii) $H^a(hX, hY)=H^a(hY, hX)$, (viii) $K^a(vX, vY)=K^a(vY, vX)$,

where $X, Y \in \mathcal{X}(TM^m)$ *and* $\hat{Q}(n_a)=q^a_b \nu_b$.

Definition 3.1. *The Finsler tensor fields* $h^a(X, Y)=H^a(hX, hY)$ *and* $k^a(X, Y)=K^a(vX, vY)$ *will be called the h-and v-second fundamental form, respectively, of the imbedding i.*

We remark that h^a and k^a are symmetrical Finsler tensor fields.

Theorem 3.3 *Let BX be a vector field tangent to* $b(TM^m)$ *and n a vector field normal to* $b(TM^m)$. *Let X' and n' be extensions of BX and n, respectively. Then* $D'_X n'|_{b(TM^m)}$ *does not depend on the extension and denoting this by* $D'_{BX}n$ *we get*

$$D'_{BX}n=-B(A_n(X))+\nabla_{BX}n, \tag{3.3}$$

where A_n *is a tensor field of type* (1.1) *on* TM^m *and* ∇ *is a covariant derivative in the normal bundle. Moreover, we have :*

$$G(A_n(X),Y)=H^a(X, Y)G'(n_a, n)+K^a(X, Y)G'(\nu_a, n),\ X, Y \in \mathcal{X}(TM^m) \tag{3.4}$$

and ∇ *defines a Finsler connection in the normal bundle.*

Summarizing up, we have obtained the following formulae of Gauss-Weingarten type :

$$\begin{cases} D'_{h'BX}BY=B(D_{hX}Y)+H^a(hX, hY)n_a+K^a(hX, vY)\nu_a \\ D'_{h'BX}n=-B(A_n(hX))+\nabla_{h'BX}n \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} D'_{v'BX}BY=B(D_{vX}Y)+H^a(vX, hY)n_a+K^a(vX, vY)\nu_a \\ D'_{v'BX}n=-B(A_n(vX))+\nabla_{v'BX}n \end{cases} \tag{3.6}$$

By virtue of Lemma 3.4 the normal components from the first rows of these formulas depend only by h^a and k^a, respectively.

REFERENCES

1. Anastasiei, M. — *Some tensorial Finsler structure on the tangent bundle.* An. şt. Univ. Iaşi, Supliment, t. XXVII, s. I a, 1981, p. 9—16
2. Anastasiei, M. — *On metrical Finsler connections*, to appear
3. Matsumoto, M. — *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces.* Kyoto Univ., Kyoto, Japan, 1982 (unpublished)
4. Miron, R. — *Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections.* J. Math. Kyoto Univ. 23—2 (1983), 219—224
5. Miron, R. — *A nonstandard theory of hypersurfaces in Finsler spaces*, to appear
6. Miron, R., Bejancu, A. — *Geometry of Finsler subspaces* I, to appear.
7. Popovici, I. and Anastasiei, M. — *Sur les bases de la géométrie finslerienne.* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 290, s.A. p. 807—810

Faculty of Mathematics
University „Al. I. Cuza" Iaşi
6600, Iaşi, R.S. Romania

Analele ştiinţifice
ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX, s. I a, Matematică, 1984 — 4

Romanian-Japanese Colloquium
on Finsler Geometry, Iaşi,
Romania, 16—25 August, 1984

STRUCTURES FINSLER PRESQUE HORSYMPLECTIQUES

PAR

GHEORGHE ATANASIU

Les variétés différentiables douées de structure presque horsymplectiques ont été définies et approfondies par C. M. de Barros [7], V. Oproiu [2], Gh. Atanasiu [1], etc.

La note présente, qui emploie la terminologie de M. Matsumoto [8], aborde le cas Finsler de la structure presque horsymplectique, détermine les connexions Finsler compatibles avec cette structure Finsler et le groupe de transformations entre ces connexions.

La structure Finsler presque horsymplectique appartient à la famille des structures Finsler dégénerées [2]—[5] et elle peut être étudiée comme celles-ci, par recours aux méthodes de R. Miron et M. Hashiguchi, [9], [10], etc.

La portée d'une telle étude est prouvée par la note [6].

1. Une structure Finsler presque horsymplectique sur une C^∞-variété M est donnée par un champ de tenseurs Finsler du type (0, 2), $a_{ij}(x, y)$ (y étant l'élément de support au point x), antisymétrique $[a_{ij}(x, y)=-a_{ji}(x, y)]$ et s champs de co-vecteurs Finsler $\eta^\alpha_k(x, y)$ de manière que

$$\text{rang}\ \| a_{ij}(x, y) \| = \dim M - s = 2p,\ \text{dét} \begin{Vmatrix} 0 & -\overset{\alpha}{\eta}_i \\ \overset{\alpha}{\eta}_j & a_{ij} \end{Vmatrix} \neq 0, \tag{1.1}$$

$(\alpha=2p+1, \ldots, \dim M\ ;\ i, j=1, 2, \ldots, \dim M)$.

De (1.1.) il résulte que la matrice $\begin{Vmatrix} 0 & -\overset{\alpha}{\eta}_i \\ \overset{\alpha}{\eta}_j & a_{ij} \end{Vmatrix}$ admet une inverse, notamment $\begin{Vmatrix} 0 & \underset{\beta}{\xi^i} \\ -\underset{\beta}{\xi^j} & a^{ij} \end{Vmatrix}$.

On note

$$l^i_j=\underset{\alpha}{\overset{\alpha}{\eta}_j}\xi^i,\quad m^i_j=\delta^i_j-\underset{\alpha}{\overset{\alpha}{\eta}_j}\xi^i \text{ (on somme selon } \alpha). \tag{1.2}$$

On constate que

$$l^i_j l^k_i=l^k_j,\ l^i_j m^k_i=0,\ m^i_j l^k_i=0,\ m^i_j m^k_i=m^k_j,\ m^i_j+l^i_j=\delta^i_j,$$

c'est à dire $l(x, y)$ et $m(x, y)$ donnés par (1.3) sont des projecteurs supplémentaires.

On attache à une structure Finsler presque horsymplectique les champs de tenseurs Finsler du type, (2.2) suivants

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \underset{1}{\Phi}{}^{kh}_{ij}=\dfrac{1}{2}(\delta^k_i\delta^h_j-\delta^k_i l^h_j-l^k_i\delta^h_j+3l^k_i l^h_j+a_{ij}a^{kh}), \\ \underset{2}{\Phi}{}^{kh}_{ij}=\dfrac{1}{2}(\delta^k_i\delta^h_j+\delta^k_i l^h_j+l^k_i\delta^h_j-3l^k_i l^h_j-a_{ij}a^{kh}). \end{cases}$$

Si par le produit de ces champs, par exemple $\underset{1}{\Phi}\,.\,\underset{2}{\Phi}$, on entend le champ de tenseurs Finsler du type (2.2) à composantes $(\underset{1}{\Phi}\,.\,\underset{2}{\Phi})^{kh}_{ij}=\underset{1}{\Phi}{}^{lh}_{ir}\underset{2}{\Phi}{}^{kr}_{lj}$, et par la contraction d'un champ de tenseurs Finsler du type (1.2), K^k_{ij}, avec l'un des champs (1.3) on comprend le champ de tenseurs Finsler du type (1.2), à composantes $(\underset{1}{\Phi}K)^h_{ij}=\underset{1}{\Phi}{}^{lh}_{ir}K^r_{lj}$, alors on peut démontrer le

Théorème 1. *Les champs de tenseurs Finsler* (1.3) *sont des projecteurs supplémentaires sur l'ensemble des champs de tenseurs Finsler du type* (1.2).

Corollaire 1. *L'équation tensorielle* $\underset{2}{\Phi}\,.\,X=0$ *dans le champ de tenseurs Finsler X du type* (1.2) *inconnu a une solution non-triviale et sa solution générale est* $X=\underset{1}{\Phi}\,.\,Y$ *où Y est un champ de tenseurs Finsler du type* (1.2) *arbitraire.*

Un résultat analogue résulte pour l'équation $\underset{1}{\Phi}\,.\,X=0$.

2. Une connexion Finsler $F\Gamma=(N, F, C)$ est considérée *connexion Finsler presque horsymplectique* ou *compatible* avec la structure Finsler presque horsymplectique $(a_{ij}(x, y), \overset{\alpha}{\eta}_i(x, y))$ si

$$(2.1)\qquad a_{ij|k}=0,\ a_{ij|k}=0,\ l^h_i m^i_{j|k}=0,\ l^h_i m^i_{j|k}=0,$$

où $|$ et $|$ marquent les h- et v-dérivées covariantes par rapport à $F\Gamma$.

Proposition 1. *Les conditions* (2.1) *entraînent*

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &l^h_i l^i_{j|k}=0,\ l^h_i l^i_j|_k=0,\ l^h_{j|k}=0,\ l^h_j|_k=0 \\ &m^h_{j|k}=0,\ m^h_j|_k=0,\ a^{ij}{}_{|k}=0,\ a^{ij}|_k=0. \end{aligned}$$

Proposition 2. *Pour toute structure Finsler presque horsymplectique les champs de tenseurs Finsler* (1.3) *sont h- et v-covariants constants, c'est à dire*

$$(2.3)\qquad \underset{1}{\Phi}{}^{hr}_{ij|k}=0,\quad \underset{1}{\Phi}{}^{hr}_{ij}|_k=0,\quad \underset{2}{\Phi}{}^{hr}_{ij|k}=0,\quad \underset{2}{\Phi}{}^{kh}_{ij}|_k=0.$$

On note par R^h_{ijk}, P^h_{ijk}, S^h_{ijk}, les tenseurs de courbure d'une connexion Finsler quelconque $F\Gamma$.

Théorème 2. *Les champs de tenseurs de courbure* R^h_{ijk}, P^h_{ijk}, S^h_{ijk} *d'une connexion Finsler presque horsymplectique ont la propriété que les champs de tenseurs Finsler* $\underset{2}{\Phi}{}^{ch}_{ib}R^b_{cjk}$, $\underset{2}{\Phi}{}^{ch}_{ib}P^b_{cjk}$, $\underset{2}{\Phi}{}^{ch}_{ib}S^b_{cjk}$ *avec leurs h-et v- dérivées covariantes de n'importe quel ordre, s'annulent.*

L'existence des connexions Finsler presque horsymplectiques est prouvée par le

Théorème 3. *Il existe des connexions Finsler compatibles avec une structure Finsler presque horsymplectique ; l'une d'entre elles est donnée par*

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \overset{*}{N}{}^h_j=\overset{\circ}{N}{}^h_j,\ \overset{*}{F}{}^h_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^h_{jk}+\dfrac{1}{2}(a^{ih}a_{ij}\overset{\circ}{|}_k+3l^{hi}l^{\circ}_{j|k}-l^{h\circ}_{j|k}) \\ \overset{*}{C}{}^h_{jk}=C^h_{jk}+\dfrac{1}{2}(a^{ih}a_{ij}\overset{\circ}{|}_k+3l^h_i l^i_j\overset{\circ}{|}_k-l^h_j\overset{\circ}{|}_k). \end{cases}$$

où $F\overset{*}{\Gamma}=(\overset{*}{N}, \overset{*}{F}, \overset{*}{C})$ est une connexion Finsler fixée, $\overset{\circ}{|}$ et $\overset{\circ}{|}$ notant les h- et v-derivées covariantes par rapport à $F\overset{*}{\Gamma}$.

En effet, par calcul direct on montre que (2.4) satisfait aux conditions (2.1) :

$$a_{ij|k}=0,\ a_{ij}\overset{\circ}{|}_k=0,\ l^h_i m^i_{j|k}=0,\ l^h_i m^i_j\overset{\circ}{|}_k=0.$$

3. L'ensemble des connexions Finsler compatibles avec une structure Finsler presque horsymplectique est également d'un intérêt particulier. Ce faisant on cherche les connexions Finsler $F\Gamma=(N, F, C)$ qui remplissent les conditions (2.1), sous la forme, [9] :

$$N^h_j=\overset{*}{N}{}^h_j-X^h_j,\ F^h_{jk}=\overset{*}{F}{}^h_{jk}+\overset{*}{C}{}^h_{jr}X^r_k+B^h_{jk},\ C^h_{jk}=\overset{*}{C}{}^h_{jk}+D^h_{jk}.$$

On trouve dans les inconnues B^h_{jk}, D^h_{jk} le système d'équations

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &B^h_{jk}-l^h_i B^i_{jk}-a_{ji}a^{rh}B^i_{rk}=0,\ l^h_i B^i_{jk}-l^r_j l^h_i B^i_{rk}=0 \\ &D^h_{jk}-l^h_i D^i_{jk}-a_{ji}a^{rh}D^i_{rk}=0,\ l^h_i D^i_{jk}-l^r_j l^h_i D^i_{rk}=0. \end{aligned}$$

Le système (3.1) est équivalent à

$$(3.2)\qquad \underset{2}{\Phi}\,.\,B=0,\quad \underset{2}{\Phi}\,.\,D=0.$$

Le corollaire 1 nous permet de formuler le

Théorème 4. *L'ensemble de toutes les connexions Finsler compatibles avec une structure Finsler presque horsymplectique est donné par les formules :*

$$(3.3)\qquad \begin{cases} N^h_j=\overset{\circ}{N}{}^h_j-X^h_j \\ F^h_{jk}=\overset{\circ}{F}{}^h_{jk}+\dfrac{1}{2}\{a^{ih}[a_{ij}\overset{\circ}{|}_k+(a_{ij}\overset{\circ}{|}_r)X^r_k]+3l^h_i[l^i_j\overset{\circ}{|}_k+ \\ \qquad +(l^i_j\overset{\circ}{|}_r)X^r_k]-[l^h_j\overset{\circ}{|}_k+(l^h_j\overset{\circ}{|}_r)X^r_k]+\underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Y^r_{ik} \\ C^h_{jk}=\overset{\circ}{C}{}^h_{jk}+\dfrac{1}{2}\{a^{ih}a_{ij}\overset{\circ}{|}_k+3l^h_i l^i_j\overset{\circ}{|}_k-l^h_j\overset{\circ}{|}_k\}+\underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Z^r_{ik}, \end{cases}$$

où $F\overset{\circ}{\Gamma}=(\overset{\circ}{N}, \overset{\circ}{F}, \overset{\circ}{C})$ *est une connexion Finsler fixée sur M,* $\overset{\circ}{|}$, $\overset{\circ}{|}$ *notent les h- et v-dérivées covariantes par rapport à* $F\overset{\circ}{\Gamma}$, *et* X^h_j, Y^h_{jk}, Z^h_{jk} *sont des champs de tenseurs arbitraires.*

Remarque. La connexion Finsler presque horsymplectique (2.6) s'obtient de (3.3) par $X=0$, $Y=0$, $Z=0$.

Si on note par $F\Gamma(N)$ les connexions Finsler qui possèdent une même connexion non-linéaire N, alors on a le

Théorème 5. *L'ensemble de toutes les connexions Finsler $F\Gamma(N)$ compatibles avec une structure Finsler presque horsymplectique est donné par*

$$N^h_j=\overset{*}{N}{}^h_j,\quad F^h_{jk}=\overset{*}{F}{}^h_{jk}+\underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Y^r_{ik},\quad C^h_{jk}=\overset{*}{C}{}^h_{jk}+\underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Z^r_{ik} \tag{3.4}$$

où $F\overset{*}{\Gamma}=(\overset{*}{N},\overset{*}{F},\overset{*}{C})$ est la connexion Finsler presque horsymplectique donnée par (2.6) et Y^h_{jk}, Z^h_{jk} sont des champs de tenseurs Finsler arbitraires.

Théorème 6. *Les transformations entre les connexions Finsler presque horsymplectiques qui possèdent une même connexion non-linéaire N, $F\Gamma(N)\to\to F\overline{\Gamma}(N)$ sont données par*

$$\overline{N}^h_j=N^h_j,\quad \overline{F}^h_{jk}=F^h_{jk}+\underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Y^r_{ik},\quad \overline{C}^h_{jk}=C^h_{jk}+\underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Z^r_{ik}, \tag{3.5}$$

où Y^h_{jk}, Z^h_{jk} sont des champs de tenseurs Finsler arbitraires.

Les transformations (3.5) et le produit d'applications en tant que loi de composition, forment un groupe abélien $\mathcal{G}$. Ce groupe est isomorphe avec le groupe additif des couples de champs de tenseurs Finsler $(\underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Y^r_{ik},\ \underset{1}{\Phi}{}^{ih}_{jr}Z^r_{ik})$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Atanasiu, Gh. — *Couples de connexions compatibles a des structures conform presque horsymplectiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 1975, 1291—1294
2. Atanasiu, Gh. — *Connexions de Finsler générales presque cosymplectiques*, C.R. Acad. Sc. Paris, 290, série A, 1980, 969—972
3. Atanasiu, Gh., and Klepp, Fr. — *Almost contact Finsler connections*, Bul. Şt. şi tehn. Inst. Pol. Timişoara, f.1., 1981, 26, (40), 45—51
4. Atanasiu, Gh., Sinha, B. B., Singh, S. K. — *Almost contact metrical Finsler structures and connections*, Proc. Nat. Sem. on Finsler spaces, vol. III, Univ. of Braşov, febr. 1984 (sous presse)
5. Atanasiu, Gh. and Stoica, E. — *Degenerate almost complex Finsler structures*, Proc. Nat. Sem. on Finsler Spaces, vol. III, Univ. of Braşov, febr. 1984 (sous presse)
6. Atanasiu, Gh., Hashiguchi, M. and Miron, R. — *Supergeneralized Finsler spaces*, Romanian — Japanese Coll. on Finsler Geometry, Iaşi—Braşov—Bucureşti, 15—25 august 1984
7. Barros, C. M. de — *Variétés horsymplectiques*, C.R. Acad. Sc. Paris, 1964, 259, 1291—1294
8. Matsumoto, M. — *Foundations of Finsler Geometry and special Finsler spaces*, Kyoto Univ., Kyoto, 1982
9. Miron, R. — *On transformation groups of Finsler connections*, Tensor, N.S., 35, 1981, 235—240
10. Miron, R. and Hashiguchi, M. — *Metrical Finsler connections*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. 12, 1979, 21—35
11. Obata, M. — *Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure*, Jap. Journ. Math., 26, 1956, 43—77
12. Oproiu, V. — *Almost horsymplectique and conformal almost horsymplectic connexions*, Revue Roum. Math. Pures et Appl. 1969, 14, 1585—1607

Chaire de Géométrie
Faculté de Mathématiques
Université de Braşov
2200 Braşov, Roumanie

Analele ştiinţifice
ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX, s. I a, Matematică, 1984 — 4

Romanian - Japanese Colloquium
on Finsler Geometry, Iaşi,
Romania, 16—25 August, 1984

ON GENERAL PATH SPACES

BY

MASAKI FUKUI

Z. I. Szabo showed that a Finsler space is of scalar curvature if and only if the Weyl's projective curvature tensor $W_i{}^h{}_{jk}$ vanishes. And the present author and T. Yamada found a tensor $V_i{}^h{}_{jk}$ characterizing a Finsler space of constant curvature [3, 4]. These tensors can be defined in a so-called general path space, because they are both constructed by the h-curvature tensor $H_i{}^h{}_{jk}$ independently of a metric tensor.

The general path spaces were treated by J. Douglas, L. Berwald and so on [1, 2]. In this lecture we shall be concerned with such spaces. We shall define special general path spaces by means of the above mentioned tensors and investigate the relations between those spaces. The theory of general path spaces seems to be important to the projective theory of Finsler spaces.

§1. General Path Spaces. Let M^n be an n-dimensional differentiable manifold and (x^i, y^i) be a usual coordinate system of the tangent bundle. Assuming that for each local coordinate system there exist n functions $G^i(x, y)$ positively homogeneous of degree two in y^i, then M^n is called a general path space if the functions G^i satisfy the transformation law

$$2\overline{G}^i(\overline{x},\overline{y})=2G^m(x,y)\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^m}-\frac{\partial^2\overline{x}^i}{\partial x^j\partial x^k}y^jy^k, \tag{1.1}$$

under a coordinate transformation $\overline{x}^i=\overline{x}^i(x)$.

Now, differentiating G^i partially with respect to y^i, we get

$$G^i_j=\partial G^i/\partial y^j,\quad G^i_{jk}=\partial G^i_j/\partial y^k. \tag{1.2}$$

It is easily shown from (1.1) that the G^i_{jk} satisfy the transformation law of the connection coefficients under a coordinate transformation. We can define the Berwald connection in a general path space M^n by means of the quantities G^i_j and G^i_{jk}. For example, the covariant derivatives of a contravariant vector X^i are given by

$$X^i_{;j}=\partial X^i/\partial x^j-G^m_j(\partial X^i/\partial y^m)+G^i_{jm}X^m,\quad X^i_{.j}=\partial X^i/\partial y^j. \tag{1.3}$$

If a curve $x^i=x^i(t)$ satisfies a system of differential equations

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0 \tag{1.4}$$