Hence, $Q(r,f) = S(r,f)$ and $N_1(r,P) \geq N_1(r,f)$. Hence we have

$$n.T(r,f) < n.N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{P-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{P-c}\right) -$$
$$- \left[N_1(r,f) + N\left(r, \frac{1}{P^1}\right)\right] + S(r,f)$$

Theorem 3. *If P is the homogeneous differential polynomial of degree n and a, b, c are the constants then*

$$\delta(a) + (m+1)[\delta(b,P) + \delta(c,P)] \leq 2(m+1).$$

Proof. Now by definition of deficiency we have

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) < (1 - \delta(a) + \epsilon_1) T(r,f),$$
$$N\left(r, \frac{1}{P-b}\right) < (1 - \delta(b,P) + \epsilon_2) T(r,P),$$
$$N\left(r, \frac{1}{P-c}\right) < (1 - \delta(c,P) + \epsilon_3) T(r,P).$$

Now,

$$m(r,P) < m(r,f) + m(r,P/f) = m(r,f) + S(r,f),$$
$$N(r,P) \leq n(m+1) N(r,f) + S(r,f).$$

Hence,

$$T(r,P) \leq n(m+1) T(r,f) + S(r,f),$$

$$nT(r,f) < n(1 - \delta(a) + \epsilon_1).T(r,f) +$$
$$(1 - \delta(b,P) + \epsilon_2 + 1 - \delta(c,P) + \epsilon_3).n(m+1)T(r,f) + S(r,f).$$

i.e.

$$T(r,f) < \{1+2(m+1) - \delta(a) - m+1)\delta(b,P) - (m+1)\delta(c,P) + \epsilon\} T(r,f) + O(T(r,f)).$$

Hence we have

$$\delta(a) + (m+1)[\delta(b,P) + \delta(c,P)] < 2(m+1).$$

REFERENCES

1. K. L. Hiong — *Sur la limitation de $T(r,f)$ sans intervention des poles*, Bull. Sec. Sciences Math. Paris 80 (1956).
2. W. K. Hayman — *Meromorphic Functions*, Oxford Press, 1964.

Recevied 23.XI.1990

Department of Mathematics
Karnatak University,
Dharwad–580 003, INDIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XXXVII, s. I. a. Matematică, 1991, f. 4

QUELQUES THEOREMES D'INVERSION POUR LES MULTIFONCTIONS

PAR

C. C. CHOU

1. Introduction. Ces derniers années, divers auteurs ont généralisé le théorème classique d'homomorphisme de Lyusternik-Grave [12] pour les multifonctions. En dehors du cas vectoriel, des résultats sont également obtenus pour des multifonctions d'un espace métrique ou quasi-métrique dans un autre ([5],[11]). Dans ces articles, la métrique intervient de façon essentielle. Or le problème d'ouverture d'une multifonction est un problème topologique et il nous semble naturel de chercher des critères d'overture liées plus intrinsèquement à la topologie qu'à l'emploi d'une métrique.C'est dans ce but que nous définissons dans la section suivante les suites convergentes d'ensembles et les suites sommables d'ensembles. Grâce à ces notions, nous obtenons nos pricipaux résultats d'ouverture qui nous permettent en particulier de retrouver le main-théorème de Borwein–Zhuang [5], le théorème de Robinson–Ursescu [15][16].

Dans la section 2, nous considérons d'abord une multifonction d'un espace vectoriel topologique dans un autre et nous démontrons une relation fondamentale énoncée dans le théorème 2.2. Cette relation nous permet de déduire un théorème d'inversion locale quand l'espace d'arrivée est à base dénombrable. Nous montrerons ensuite comment on peut transposer nos résultats dans le cas non vectoriel.

Dans la section 3, nous considérons des multifonctions transformant les ensembles convexes en des ensembles convexes, et un résultat similaire au théorème 2.2 est donné.

Enfin dans la section 4, nous utilisons des multifonctions approximantes, plus particulièrement des approximantes coniques, pour étudier le problème d'ouverture.

2. Les principaux resultats d'ouverture pour une multifonction d'une espace topologique dans un autre. Dans cette section, nous décrirons un cadre général où la méthode itérative de Newton peut être appliquée pour obtenir quelques résultats d'ouverture.

Nous désignons par E, G,.. des espaces topologiques; par $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$,.. des espaces vectoriels topologiques; par $\mathbf{F}$, $\mathbf{F_1}$,.. des espaces de Fréchet; par $\mathcal{N}_{\mathbf{E}}$, $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ ... le filtre de voisinages ouverts de zéro de $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$ etc. Nous disons qu'on espace uniforme (pas forcément séparé) est complet si tout filtre de Cauchy a un point adhérent.

Nous appelons multifonction de E dans G une application f qui à tout $x \in E$ fait correspondre un élément $f(x)$ de l'ensemble des parties de G. Le sous ensemble $F = \cup_{x \in E}\{x\} \times f(x)$ de $E \times G$ s'appelle le graphe de f. Nous supposons dans tout l'article que F est séquentiellement fermé. Nous disons que f est ouvert en $(a,b) \in F$, si l'image par f de tout voisinage de a est un voisinage de b. Nous disons que f est ouvert autour de $(a,b) \in F$, s'il existe un voisinage W de (a,b) tel que f soit ouvert en tout point de $W \cap F$.

2.A. Ouverture d'une multifonction d'un espace vectoriel topologique dans un autre.

Definition 2.1. *Une suite de sous ensembles S_n de $\mathbf{G}$ est dite convergente (resp. sommable), si toute sélection x_n de S_n est le terme général d'une suite convergeant vers 0 (resp. d'une série sommable).*

Il est clair qu'une suite sommable S_n d'ensembles est convergente et que tout $W \in \mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ contient $S_m + \ldots + S_{m+j}$ dès que $m \geq m_0$ pour un m_0 convenable. De même, on a $U_m \subseteq W$ à partir d'un certain m si U_m est une suite convergente d'ensembles. D'autre part, si $\mathbf{G}$ est un espace métrisable, il existe une suite sommable d'ensembles formant un système fondamental de voisinage de zéro. Montrons d'abord le résultat fondamental suivant(la forme actuelle de l'énoncé est suggérée par prof. C. Ursescu):

Théorème 2.2. *Soit f une multifonction de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{G}$, son graphe est supposé séquentiellement fermé. Soient S_n une suite sommable d'ensembles de $\mathbf{E}$, U_n une suite convergente d'ensembles de $\mathbf{G}$ et P un sous ensemble de $\mathbf{G}$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in S_1 + \ldots + S_n$, on ait: $(f(x) \cap P) + U_n \subseteq f(x + S_{n+1}) + U_{n+1}$. Alors, on a:*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in S_1 + \ldots + S_n : \quad Q_n \cap (f(x) + U_n) \subseteq f(x + T_n),$$

où

$$Q_n = \{y \in \mathbf{G} | \forall m \geq n, y - U_m \subseteq P\} \text{ et } T_n := \sum_{m=n+1}^{\infty} S_m.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbf{N}$, $x \in S_1 + \ldots + S_n$ et $y \in Q_n \cap (f(x) + U_n)$. Posons $x_n = x$. Il suffit qu'on démontre qu'il existe une suite $x_m \in \mathbf{E}(m \geq n)$ telle que $x_{m+1} \in x_m + S_{m+1}$ et que $y \in f(x_m) + U_m$. Ceci se démontre par recurrence. En effet, pour $m \geq n$, de $y \in f(x_{m+1}) + U_{m+1}$, on déduit $y = y_m + u_m$ pour un certain $y_m \in f(x_m)$ et un certain $u_m \in U_m$.

Donc $y_m = y - u_m \in Q_n - U_m \subseteq P$. Par suite, $y \in (f(x_m) \cap P) + U_m$; et ce dernier ensemble est contenu dans $f(x_m + S_{m+1}) + U_{m+1}$ par hypothèse. Il existe donc $x_{m+1} \in x_m + S_{m+1}$ tel que $y \in f(x_{m+1}) + U_{m+1}$.

Le résultat suivant est souvent utile dans la pratique.

Théorème 2.3. *Soit $V_n \subseteq \mathbf{G}$. Supposons que f, P, S_n, U_n soient définis comme dans le théorème 2.2 et que pour tout $x \in S_1 + \ldots + S_n$, on ait:*

$$(f(x) \cap P) + U_n \subseteq \overline{f(x + S_{n+1}) + V_{n+1}}.$$

Supposons que pour tout n, il existe $U \in \mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ tel que $V_n + U \in U_n$. Alors la conclusion du théorème 2.2 reste valable.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la relation $V_n + U \subseteq U_n$ implique $\overline{(Z + V_n)} \subseteq Z + U_n$ pour tout sous ensemble Z.

Pour illustrer ces résultats, nous allons déduire comme corollaire le théorème d'inversion locale suivant et le théorème bien connu de Banach.

Théorème 2.4. *Soient f, S_n, U_n et P définis dans le théorème 2.2 et vérifiant les mêmes hypothèses. Supposons en outre que $P = P_0 + U$, où $U \in \mathcal{N}_{\mathbf{G}}$, que les S_n contiennent 0, et que les U_n soient ouverts. Alors pour tout $V \in \mathcal{N}_{\mathbf{E}}$, il existe m_0 tel que pour tout $j \in \mathbf{N}$, tout $m \geq m_0$, il existe $W \in \mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ tel que l'on a: $y_m + W \subseteq f(x_m + V)$ pour tout $x_m \in S_m + \ldots + S_{m+j}$, tout $y_m \in P_0 \cap (f(x_m))$. (La multifonction f est uniformément ouverte sur ces (x_m, y_m)).*

Démonstration. Soit $V_0 \in \mathcal{N}_{\mathbf{E}}$ fermé et contenu dans V. Soit $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $S_m + \ldots + S_{m+j} \subseteq V_0$, $U_m - U_{m+j} \subseteq U$, $\forall m \geq m_0$ et $\forall j \in \mathbf{N}$. On en déduit alors pour $m \geq m_o$ et $j \in \mathbf{N}$, les relations:

$$x_m + T_{m+j} \subseteq x_m + V_o \subseteq x_m + V \text{ et } (f(x_m) \cap P_0) + U_{m+j} \subseteq Q_{m+j}.$$

Mais le théorème 2.2 montre qu'on a:

$$Q_{m+j} \cap (f(x_m) + U_{m+j}) \subseteq f(x_m + T_{m+j}).$$

On en déduit donc $(f(x_m) \cap P_0) + U_{m+j} \subseteq f(x_m + V)$. D'où le théorème, avec $W = U_{m+j}$.

Théorème de Banach. *Toute application linéaire bijective f de graphe fermé de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{F_1}$, est un homeomorphisme.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que f et f^{-1} transforment les ensembles ouverts en des ensembles ouverts. Soit $W \in \mathcal{N}_{\mathbf{F}}$, montrons que $f(W)$ est un voisinage de zéro. Par le théorème de Baire, on sait que $\overline{f(S)}$ est un voisinage de zéro, pour tout $S \in \mathcal{N}_{\mathbf{F}}$. Soit $S_n \in \mathcal{N}_{\mathbf{F}}$ une suite sommable telle que $S_1 + \ldots + S_n + \ldots \subseteq W$ et soit $V_n \in \mathcal{N}_{\mathbf{F}_1}$ une suite convergente. Alors posons $U_n = V_n \cap \overline{f(S_{n+1})}$ on a :

$f(x) + U_n \subseteq \overline{f(x + S_{n+1})}$ pour tout $x \in \mathbf{F}$.

A fortiori, $f(x) + U_n \subseteq f(x + S_{n+1}) + U_{n+1}$, pour tout $x \in \mathbf{F}$.

Il ne reste qu'à appliquer le théorème 2.4. De la même manière , on voit que f^{-1} transforme les voisinages de zéro de $\mathbf{F}_1$ en voisinage de zéro de $\mathbf{F}$

2.B. Ouverture d'une multifonction d'un espace topologique dans un autre. Nous allons maintenant transcrire nos résultats au cadre géneral des espaces topologiques. Tout $\sum \in E \times E$ étant identifié au graphe d'une multifonction, $\sum(x)$ est l'ensemble des $x' \in E$ tels que $(x, x') \in \sum$ et $\sum(A)$ la réunion de $\sum(x)$ où $x \in A$. L'inverse de $\sum$ est noté $\sum^-$, i.e. $\sum^- = \{(x,y) | (y,x) \in \sum\}$. Nous

appelons relation tout $S \subseteq E \times E$ tel que $S(x) \neq \emptyset$ et $S^-(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in E$. Nous appelons "entourage" tout $S \subseteq E \times E$ tel que $S(x)$ est un voisinage de x et cela pour tout $x \in E$ (les guillemets pour dire qu'il n' a pas forcément le sens habituel du mot, nous écrirons entourage quand il s'agit des entourages d'une structure uniforme). Enfin, pour des relations $S_1, \ldots, S_n$ et $x \in E$, nous notons par $S_n \ldots S_1(x)$ l'ensemble des $x' \in E$ tels qu'il existe une chaine $x_j \in E$ vérifiant $x_1 \in S_1(x), x_2 \in S_2(x_1), \ldots, x' \in S_n(x_{n-1})$.

Nous supposons dans la suite que nos espaces topologiques possèdent un système fondamental de voisinage fermé. Nous désignons par $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) une famille d' "entourages" S tels que pour tout $x \in E$, la famille de ces $S(x)$ (resp. $S(S(x))$) forme un système fondamental de voisinage fermé de x.

Definition 2.5. *Soit E un espace topologique.*

1. *Nous disons qu'une suite de relations S_n est sommable, si toute chaine $x_n \in E$ telle que $x_{n+1} \in S_n(x_n)$ est convergente. Nous disons qu'une suite est "$\mathcal{R}_i$ - uniformément" sommable ($i = 1, 2$), si elle est sommable et si pour tout $S \in \mathcal{R}_i$, il existe m tel que pour tout $n \geq m$, tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $x \in E$, on a:*

$$S_{n+j} \ldots S_n(x) \subseteq S(x).$$

2. *Nous disons qu'une suite de relations U_n est convergente, si pour tout $x \in E$, toute sélection $x_n \in U_n^-(x)$ converge vers x.*
Nous disons qu'une suite est "$\mathcal{R}_i$ - uniformément" convergente, si pour tout $S \in \mathcal{R}_i$, il existe m telle que pour tout $n \geq m$, on a $U_n^- \subseteq S$ et $U_n \subseteq S$.

Remarquons que si S_n est suite de relations $\mathcal{R}_2$ - uniformément sommable,une chaine $a'_j \in S_j(a'_{j-1})$ est évidemment convergente; si a désigne une limite de cette suite, alors toute sélection $a_j \in S_j(a'_{j-1})$ converge également vers a. Ce résultat nous sera utile pour la proposition 2.9. C'est par analogie avec le cas vectoriel traité que nous utilisons les mots sommable et convergente. En effet, si S_n est une suite sommable (resp. convergente) d'ensembles d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$, la suite de relations $\overline{S}_n := \cup_{x \in \mathbf{E}}\{x\} \times (S_n + x)$ est sommable (resp. convergente) au sens de la definition 2.5. Notons qu'une suite "uniformément" sommable de relations est convergente, mais une suite sommable de relations peut ne pas être convergente. En effet, considérons dans $\mathbf{R}$ la suite de relations suivante qui est sommable mais non convergente, $S_n = (\{0\} \times [1, 2]) \cup (\cup_{x \in \mathbf{R}}(x, x))$.

Théorème 2.6. *Soit f une multifonction de E dans G de graphe séquentiellement fermé. Soient S_n une suite sommable de relations dans E,U_n une suite convergente de relations dans G, P un sous ensemble de G et enfin $a \in E$. Supposons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in S_n \ldots S_1(a)$, on ait:*

$$U_n(f(x) \cap P) \subseteq U_{n+1}(f(S_{n+1}(x))).$$

Alors on a:

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in S_n \ldots S_1(a), \quad U_n(f(x))) \cap Q_n \subseteq f(T_n(x)),$$

où $T_n(x)$ est l'ensemble des valeurs limites des suites $y_j \in G$ vérifiant $y_1 \in S_{n+1}(x), \ldots y_j \in S_{n+j}(y_{j-1})$, et où $Q_n = \{y \in G | \forall m \geq n, U_m(y) \subseteq P\}$.

Démonstration. Il suffit de calquer la démonstration du théorème 2.2.

Lemme. *Soit $P_0 \in G$. Soit $U_n \in G$ une suite de relations. Posons $P_m := \cup_{n \geq m}(U_n(P_0))$ et soit $P \supseteq \cup_{n \geq m}(U_n^-(P_m))$. Alors, pour tout $n \geq m$, on a: $U_n(P_0) \subseteq Q_n$, où $Q_n = \{y \in G | \forall j \geq n,\ U_j^-(y) \subseteq P\}$.*

Démonstration. Evidente.

Ce lemme nous permet de mieux interpréter le théorème 2.6. En effet, si P et P_0 sont liés comme dans le lemme, on peut remplacer la conclusion du théorème par:

$$\forall x \in S_n \ldots S_1(a),\ \forall n \geq m, \quad U_n(f(x) \cap P_0) \subseteq f(T_n(x)).$$

C'est bien un résultat d'ouverture si U_n est un "entourage". Ainsi, nous avons obtenu le

Théorème 2.7. *Soit $S_n \in E$ une suite "$\mathcal{R}_1$-uniformément" sommable de relations et pour chaque n, nous supposons que S_n contient la diagonale. Soit $U_n \in G$ une suite "$\mathcal{R}_1$-uniformément" convergente de relations qui soient aussi des "entourages". Soient $a \in E$, $m \in \mathbf{N}$, P et P_0 deux sous ensembles de G tels que $P \supseteq \bigcup_{j,n \geq m}(U_j^-(U_n(P_0)))$. Supposons qu'on ait: pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in S_n \ldots S_1(a)$,*

$$U_n(f(x) \cap P) \subseteq U_{n+1}(f(S_{n+1}(x))).$$

Alors f est ouvert en (a, b) où $b \in f(a) \cap P_0$. De façon précise, si $S \in \mathcal{R}_1$ et si m_0 est tel que $S_{n+j} \ldots S_n(x) \subseteq S(x)$ pour tout $x \in E$, tout $j \in \mathbf{N}$, tout $n \geq m_0$, alors pour tout $x \in S_{n+j} \ldots S_n(a)$ où $n = Sup\ (m, m_0)$, tout $y \in f(x) \cap P_0$, on a:

$$U_{n+j}(y) \subseteq f(S(x)).$$

Dans un espace pseudo-métrique , (sa topologie est définie par un écart) nous notons par $B(x; t)$ la boule ouverte de rayon t centré en x, et par $B(A; t)$ la réunion des boules $B(a; t)$ où $a \in A$.

Corollaire 2.8. *Soient E et G deux espaces pseudo-métriques, E complet, et f une multifonction de E dans G de graphe F fermé. Soit $(x_0, y_0) \in F$. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert $U \times V$ de (x_0, y_0), une série réelle convergente de terme général $s_n > 0$, une suite réelle strictement décroissante u_n tendant vers zéro tels que pour tout $(x, y) \in F \cap (U \times V)$, on ait :*

$$B(y; u_n) \subseteq B(f(B(x; s_{n+1})); u_{n+1}).$$

Alors la multifonction f est ouverte autour de (x_0, y_0).

Démonstration. Posons

$$S_n = \{(x, x') \in E \times E | d(x, x') < s_n\},\ U_n = \{(y, y') \in G \times G | d(y, y') < u_n\}.$$

Pour les structures uniformes de E et G, ces suites sont respectivement uniformément sommable et uniformément convergente.

On peut supposer que $B(x_0;r) \subseteq U$ où $r = \sum_{n\geq 1} s_n$ et que $P = B(y_0;3u_0) \subseteq$ $\subseteq V$ en remplaçant éventuellement les suites s_n et u_n par leur reste convenable. Posons $P_0 = B(y_0;u_0)$, on a bien $U_j^{-} U_n(P_0) \subseteq P$ pour tous les entiers naturels j et n. Pour tout $(x,y) \in F \cap (B(x_0;r) \times B(y_0;u_0))$, en appliquant le théorème, on obtient :

$$B(y;u_n) \subseteq f(B(x;r_n)) \text{ où } r_n = \sum_{j=n}^{\infty} s_j.$$

Nous allons montrer que ceci contient un résultat de Borwein–Zhuang [5]. Ces auteurs introduisent une fonction $\delta: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continue strictement croissante avec $\delta(0) = 0$ et une fonction $\alpha: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telles que $\overline{\lim}_{t\to 0}(\delta^{-1}(\alpha(t)))/t < 1$. Ils montrent

Théorème de Borwein–Zhuang. *Soit f une multifonction d'un espace métrique E dans un espace métrique G de graphe F complet. Soit $(x_0,y_0) \in F$. Soit enfin $U \times V$ un voisinage de (x_0,y_0) tel que:*

$$\forall (x,y) \in (U \times V) \cap F, \text{ on a : } B(y;\delta(t)) \subseteq \overline{B(f(B(x;t));\alpha(t))}.$$

Alors il existe un voisinage U_0 de x_0, un voisinage V_0 de y_0 et une constante $K > 0$, tel que:

$$\forall (x,z) \in (f^{-1}(V_0) \cap U_0) \times V_0, \text{ on a : } \delta(Kd(x,f^{-1}(z))) \leq d(z,f(x)).$$

En particulier, f est ouvert autour de (x_0,y_0).

Démonstration. Comme le graphe de F est complet , on peut supposer que E est complet en le remplaçant au besoin par son complété $\hat{E}$, et définit $f(x) := \phi$ pour $x \in \hat{E}$ et $x \notin E$. D'après la condition portée sur la limite sup. de α et δ, il existe $c < 1$ et $t_0 > 0$ tels que $\forall t \in (0,t_0]$, on a : $\delta^{-1}(\alpha(t)) < ct$. Par suite : $\alpha(t) < \delta(ct)$. Posons $s_{n+1} = c^n t_0$, $u_n = \delta(c^n t_0)$ et choisissons t_0 assez petit pour que $B(y_0;3\delta(t_0)) \subseteq V$ et que $B(x_0;(1-c)^{-1}t_0) \subseteq U$. On a alors :

$$B(y;u_n) \subseteq \overline{B(f(B(x;c^n t_0);\alpha(c^n t_0))} \subseteq B(f(B(x;s_{n+1});u_{n+1}).$$

pour tout $(x,y) \in F \cap (U \times V)$. On est bien dans les conditions d'application du corollaire 2.8. la multifonction est ouverte. De façon précise, dans la fin de la démonstration de ce corollaire, nous avons obtenu la relation:

$$B(y;u_n) \subseteq f(B(x;r_n)) \text{ pour tout } (x,y) \in F \cap (B(x_0;(1-c)^{-1}t_0) \times B(y_0;\delta(t_0))).$$

Cette relation nous montre que la conclusion de théorème est vérifiée pour $K = c^2(1-c)$, $U_0 = B(x_0;K^{-1}t_0)$ et $V_0 = B(y_0;3^{-1}\delta(t_0))$. En effet, soit $(x,z) \in (f^{-1}(V_0) \cap U_0) \times V_0$ et soit $\overline{y} \in f(x) \cap V_0$. On a:

$$\gamma = d(z,f(x)) \leq d(z,\overline{y}) < \frac{2}{a}\delta(t_0) = \frac{2}{a}u_0.$$

La suite u_n étant strictement décroissante, on trouve n tel que

$$u_{n+1} \leq \gamma < u_n.$$

On trouve par suite $y \in f(x)$ tel que

$$u_{n+1} \leq \gamma + \varepsilon = d(z,y) < \inf\,(u_n, \frac{2}{a}u_0).$$

La dernière inégalité et $z \in V_0$ impliquent $y \in B(y_0,u_0)$. D'après notre corollaire,on a :

$$z \in B(y;u_n) \subseteq f(B(x;r_n)).$$

Donc

$$d(x,f^{-1}(z)) < r_n = t_0 c^{n+1} K^{-1} = \frac{1}{K}\delta^{-1}(u_{n+1}) \leq \frac{1}{K}\delta^{-1}(d(z,f(x)).$$

Remarque. On ne peut pas remplacer limsup par lim inf dans l'énoncé de la condition vérifiée par les fonctions α et δ. Voici un contre exemple. Soient a_n, α_n et δ_n des suites de réels tendant vers zéro telles que $\delta_{n+1} < a_n < \alpha_n < \delta_n$. Soient $E = \{0\}$ et $G = \{0, a_1, a_2, \ldots\}$, munis de la topologie métrique induite par celle de $\mathbf{R}$. La fonction $f: E \to G$ définie par $f(0) = \{0\}$ n'est évidemment pas ouverte en $(0,0)$. Observons cependant que pour tout n, on a :

$$\{0, a_1, \ldots a_n\} = B(0;\delta_n) \subseteq B(f(B(0,t_n));\alpha_n) = \{0, a_1, \ldots a_n\}$$

et tout $t_n > 0$. Cette dernière relation nous permet de construire des fonctions α et δ vérifiant à la fois $\underline{\lim}_{t\to 0}\delta^{-1}(\alpha(t))/t < 1$ et $B(0;\delta(t)) \subseteq B(f(B(0;t));\alpha(t))$. En effet , prenons $c \in]0,1[$, et posons $t_n = c^n$, $m_n = (t_{n+1}+t_n)/2$; la fonction linéaire par morceaux α dont le graphe passe par les points (t_{n+1},α_{n+1}) , (m_n,α_n) , et (t_n,α_n) pour tout n et la fonction linéaire par morceaux δ dont le graphe passe par les points (t_{n+1},δ_{n+1}), (m_n,α_n) et (t_n,δ_n) pour tout n, répondent à la question. J'ignore par contre si la condition "$\underline{\lim}_{t\to 0}\delta^{-1}(\alpha(t))/t < 1$" est suffisante dans le cas où E et G sont des Banach.

En calquant une démonstration donnée par Kelley ([10],page 202), nous allons montrer

Proposition 2.9. *Soit f une multifonction d'un espace toplogique E dans un espace uniforme G. Nous supposons que le graphe F de f est fermé. Soit S_n une suite "$\mathcal{R}_2$-uniformément" sommable d'ensembles de E,telle que pour chaque n,il existe un entourage V tel que pour tout $(x,y) \in F$, on ait:*

$$V(y) \subseteq \overline{f(S_n(x))}.$$

Alors on a:

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbf{N}, \forall j \in \mathbf{N}, \overline{f(S_n(x))} \subseteq f(T_{n+j}(S_n(x))).$$

En particulier, f est une multifonction uniformément ouverte, i.e. $\forall S \in \mathcal{R}_2, \exists$ un entourage V tel que $\forall(x,y) \in F$, $V(y) \subseteq f(S(x))$.

Démonstration. Soit A un sous ensemble de A.Montrons d'abord que pour tout n et tout $b \in \overline{f(A)}$, il existe $a \in A$ tel que $b \in \overline{f(S_n(a))}$. En effet, soit V l'entourage (qu'on peut supposer symétrique) associé à S_n. On a $b \in V(f(A))$. Il existe donc $(a,y) \in (A \times G) \cap F$ vérifiant $b \in V(y)$. Or par hypothèse, on a $V(y) \subseteq \overline{f(S_n(a))}$. D'où le résultat. Posons $A = S_n(x)$ le résultat préliminaire montre qu'il existe $a'_j \in S_n(x)$, tel que $b \in \overline{f(S_{n+1}(a'_j))}$; et de façon recurrente, on obtient une suite a'_{j+m} vérifiant $a'_{j+m} \in S_{n+j+m-1}(a'_{j+m-1})$, et $b \in \overline{f(S_{n+j+m}(a'_{j+m}))}$. La suite (a'_j) converge alors vers un certain a, parce que S_n est sommable. Pour le couple (i,U), comme $U(b) \cap f(S_{n+i}(a'_i)) \neq \phi$, il existe bien $a_{iU} \in S_{n+i}(a'_i)$ et $b_{iU} \in (U(b)) \cap (f(a_i))$. La suite généralisée (a_{iU}, b_{iU}) converge alors vers (a,b) suivant l'ensemble ordonné des (i,U) dont l'ordre est défini par $(i,U) \leq (i',U')$ si et seulement si $i \leq i'$ et $U \supseteq U'$. Nous avons donc prouvé:

$$\forall x \in E, \forall n, \forall j, \overline{f(S_n(x))} \subseteq f(T_{n+j}(S_n(x)).$$

Pour la dernière partie du théorème, étant donnè $S \in \mathcal{R}_2$, soit n tel que $S_{n+j} \ldots S_n(x) \subseteq S(x)$ pour tout $x \in E$. Comme $S(x)$ est fermé, on a $T_n(x) \subseteq S(x)$. Donc, si V est l'entourage correspondant à n, on a bien

$$V(y) \subseteq f(S(x)).$$

3. Cas d'une multifonction quasi–convexe. Soient a et b deux points d'un espace vectoriel réel, on appelle segment a,b et on le note [a,b], l'ensemble $\bigcup_{t\in[0,1]}\{ta + (1-t)b\}$.

Étant donnés deux sous ensembles C et D, il est souvent nécessaire de savoir si la relation d'inclusion $C \subseteq D$ a lieu. A ce propos, il est intéressant de considérer le problème suivant: soient C, D, et U trois sous ensembles tels que $C \subseteq D + \epsilon U$ pour tout $\epsilon > 0$, (C est " approximativement" contenu dans D à l'aide de U) que peut-on dire de C et D ? Le théorème suivant traite ce sujet moyennant une notion de convexité.

Definition 3.1. *Nous disons qu'une multifonction f de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{G}$ est quasi - convexe si l'image par f de tout convexe est convexe.*

Une multifonction de graphe convexe est quasi-convexe; toute fonction continue à valeur réelle est aussi quasi-convexe.

Théorème 3.2. *Soient C_n une suite convergente d'ensembles d'un espace vectoriel localement convexe $\mathbf{E}$, U_n une suite convergente d'ensembles de $\mathbf{G}$ et $P \subseteq \mathbf{G}$. Soit f une multifonction quasi-convexe de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{G}$ de graphe F séquentiellement fermé. Supposons que $(0,0) \in F$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $\epsilon > 0$, on ait:*

$$U_n \subseteq f(C_{n+1}) + \epsilon U_{n+1}.$$

Soit C un convexe complet contenant tous les C_n et 0, et tel que:

$$P \subseteq f(C) + \epsilon U_1, \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

Alors on a:

$$P \subseteq Af(C), \text{ pour tout } A > 1.$$

Démonstration. Soit $y \in A^{-1}P$, il faut montrer que $y \in f(C)$. Choisissons $p_j \in]1,2[$ tel que $\prod_{j\geq 1} p_j = A$. Soit q_j le conjugué de p_j, c'est à dire $p_j^{-1} + q_j^{-1} = 1$ ($p_0 = q_0 = 1$). Posons $\lambda_j = p_j q_j^{-1}$. On vérifie que $\lambda_j < 1$. Les hypothèses impliquent que les relations suivantes sont vérifiées:

$$P \subseteq f(C) + \lambda_1 U_1,$$
$$\lambda_1 U_1 \subseteq \lambda_1 f(C_1) + \lambda_1\lambda_2 U_2,$$
$$\ldots$$
$$\lambda_1 \ldots \lambda_n U_n \subseteq \lambda_1 \ldots \lambda_n f(C_n) + \lambda_1 \ldots \lambda_{n+1} U_{n+1}.$$
$$\ldots$$

On trouve donc $\overline{x}_0 \in C$, $\overline{y}_0 \in f(\overline{x}_0) \ldots \overline{x}_n \in C_n$ et $\overline{y}_n \in f(\overline{x}_n)$ tels que:

$$Ay \in (\overline{y}_0 + \lambda_1\overline{y}_1 + \ldots + \lambda_1 \ldots \lambda_n \overline{y}_n) + \lambda_1 \ldots \lambda_{n+1} U_{n+1}.$$

Posons $\overline{Y}_n = A^{-1}(\overline{y}_0 + \lambda_1\overline{y}_1 + \ldots + \lambda_1 \ldots \lambda_n \overline{y}_n)$. La suite $\overline{Y}_n$ converge évidemment vers y. Il en est de même de la suite $Y_n = A(p_0 \ldots p_n)^{-1}\overline{Y}_n$. Nous allons montrer qu'il existe une suite convergente $(X_n) \subset C$ telle que $Y_n \in f(X_n)$. La limite x de la suite vérifie alors $y \in f(x)$. Posons $w_n = \left((q_0 \ldots q_{n-1})^{-1}\right)\overline{y}_n$ et $y_n = \left((p_0 \ldots p_{n-1})A^{-1}\lambda_n\right) w_n$.

Observons que les scalaires entre parenthèses sont inférieurs à un. Comme $(0,0) \in F$ et f est quasi–convexe, on peut trouver

$$v_n \in [0, \overline{x}_n] \quad \text{tel que } w_n \in f(v_n), \text{ et}$$
$$x_n \in [0, v_n] \quad \text{tel que } y_n \in f(x_n).$$

On par définition de y_n, on a $\overline{Y}_n = y_0 + \ldots + y_n$. D'autrepart, on peut écrire: $Y_1 = A(p_0p_1)^{-1}(y_0 + y_1) = p_1^{-1}Y_0 + q_1^{-1}w_1$. Mais $Y_0 = p_0^{-1}\overline{y}_0$, il existe donc $X_0 \in [0, \overline{x}_0]$ tel que $Y_0 \in f(X_0)$. Toujours à cause de la quasi-convexité de f, on trouve $X_1 \in [X_0, v_1]$ tel que $Y_1 \in f(X_1)$.

De proche en proche, en écrivant

$$Y_n = A(p_0 \ldots p_n)^{-1}(y_0 + \ldots + y_n) = p_n^{-1}Y_{n-1} + q_n^{-1}w_n,$$

et en appliquant la quasi–convexité de f, on trouve $X_n \in [X_{n-1}, v_n]$ tel que $Y_n \in f(X_n)$. Il nous reste à montrer que la suite X_n est convergente. Puisque C est complet, il suffit de montrer que les X_n forment une suite de Cauchy. Cela résulte du lemme suivant:

Lemme. *Soit S_n une suite convergente d' ensembles de* $\mathbf{E}$. *Pour toute suite de couples (a_n, b_n) vérifiant $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ et $a_n + b_n = 1$, et pour toute sélection $v_n \in S_n$, la suite recurrente $X_1 = v_1, \ldots, X_n = a_n X_{n-1} + b_n v_n$ est une suite de Cauchy.*

Démonstration. On a: $X_{m+j} - X_m = (a_{m+1} \ldots a_{m+j} - 1)X_m + R(m; j)$, où $R(m; j) := (b_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+j})v_{m+1} + (b_{m+2} a_{m+a} \ldots a_{m+j})v_{m+j} + \ldots + b_{m+j} v_{m+j}$. Par suite: $X_{m+j} - X_{m+i} = (a_{m+1} \ldots a_{m+j} - a_{m+1} \ldots a_{m+i})X_m + R(m; j) - R(m; i)$. La suite d'ensembles S_n est convergente par hypothèse. En conséquence, pour toute semi-norme $|\cdot|$ de $\mathbf{E}$, on a d'une part:

$$M = \mathrm{Sup}_{n, v \in S_n}(|v|) < \infty; \qquad \text{par suite } |X_n| \leq M.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m tel que on a $|v| \leq \varepsilon$ pour tout $v \in S_n$ où $n \geq m$. Ce qui implique que $|R(n; j)| \leq \varepsilon$. Par ailleurs, remarquons que de la définition des X_n, il en résulte que si $a_j = 0$, les X_{j+n} ne dependent pas des $v_1, \ldots, v_j$. En particulier s'il existe $n \geq m$ tel que $a_n = 0$, on aura $|X_{n+j}| \leq \varepsilon$ pour tout $j > 0$. La suite X_n est donc une suite de Cauchy. Examinons maintenant le cas où les $a_n \neq 0$. La suite $a_1 \ldots a_n$ étant décroissante est convergente. Il exite m_0 tel que pour tout $n \geq m$, on a:

$$|a_n \ldots a_{n+j} - a_n \ldots a_{n+i}| < \varepsilon/M \text{ où } M = \mathrm{Sup}_{m, v \in S_m}|v|.$$

On en déduit que $|X_i - X_j| \leq 2\varepsilon$ pour tour $i > m + m_0$ et $j > m + m_0$.

Théorème 3.3. *Soit f une multifonction de graphe séquentiellement fermé d'un espace vectoriel localement convexe complet* $\mathbf{E}$ *dans un espace vectoriel métrisable* $\mathbf{G}$. *S'il existe une suite convergente d'ensembles C_n de* $\mathbf{E}$ *telle que $\overline{f(C_n)}$ soit un voisinage de zéro pour tout n et si $(0,0) \in F$, alors f est ouvert en $(0,0)$.*

Démonstration. Soit U_n une suite fondammentale de voisinage de zéro de $\mathbf{G}$ telle que $U_n \subseteq \overline{f(C_{n+1})}$. On a alors $U_n \subseteq f(C_{n+1}) + \varepsilon U_{n+1}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, pour $V \in \mathcal{N}_{\mathbf{E}}$ donné, soit C un voisinage de zéro convexe fermé contenu dans V. La suite C_n étant convergente, on trouve m tel que $C_n \subseteq C$ dès que $n > m$. Le théoreme 3.2 montre que $U_n \subseteq \mathrm{Af}\,(C)$ pour $A > 1$ et $n > m$.

Nous avons le

Corollaire 3.4. *Soit f une multifonction quasi-convexe de graphe fermé d' un Fréchet* $\mathbf{F}$ *dans un espace vectoriel métrisable* $\mathbf{G}$. *Soit $(a, b) \in F$ tel que $\overline{f(a + W)}$ soit un voisinage de b, pour tout $W \in \mathcal{N}_{\mathbf{F}}$. Alors f est ouvert en (a, b).*

Démonstration. L' espace $\mathbf{F}$ étant un Fréchet, il existe une suite convergente d' ensembles $C_n \in \mathcal{N}_{\mathbf{F}}$. Considérons alors la multifonction $f_1 : x \to f(a + x) - b$. Elle vérifie les hypothèses du théorème 3.3, elle est donc ouverte en $(0,0)$.

On peut retrouver un resultat de Robinson-Ursescu.

Théorème de Robinson-Ursescu. *[15],[16]. Soit f une multifonction de graphe convexe fermé d' un espace de Fréchet* $\mathbf{F}$ *dans un autre* $\mathbf{F}_1$. *Si b est un point de l' intérieur algébrique de $f(\mathbf{F})$, f est ouvert en tout $(a, b) \in \mathbf{F}$.*

Démonstration. Pour tout $(a, b) \in F$, considérons de nouveau la multifonction f_1 qui a pour graphe le convexe $F_1 = F - (a, b)$. De la convexité de F_1 et $(0,0) \in F_1$, on déduit que

$$p^{-1}0 + q^{-1}f(w) \subseteq f(p^{-1}0 + q^{-1}w),$$

pour tout w et tout $p > 0$, $q > 0$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Donc $f_1(qx) \subseteq qf_1(x)$ pour tout x et $q \geq 1$. Par conséquence, pour tout convexe $W \in \mathcal{N}_{\mathbf{F}}$, on a $f_1(\mathbf{F}) = f_1(\bigcup_{q \in \mathbf{N}} qW) \subseteq \bigcup_{q \in \mathbf{N}} qf_1(W)$. Comme o est dans l' intérieur algébrique de $f_1(\mathbf{F})$ est non vide, une application du théorème de Baire prouve que $\overline{f_1(W)}$ est un voisinage de zéro, f_1 est donc ouvert en $(0,0)$ d' après le corollaire 3.4.

4. Notions d' approximation. Nous allons étudier maintenanat dans quelle mesure une multifonction proche d' une autre multifonction qui est ouverte peut être elle-même ouverte. Soient f et g deux multifonctions de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{G}$. Soit $(x, y) \in F$.

Definition 4.1. *Soient $S \subseteq \mathbf{E}$ et $V \subseteq \mathbf{G}$. Nous disons que g est une V-approximation de f en (x, y) sur S, si on a: $y + g(S) \subseteq \overline{V + f(x + S)}$.*

Thèoréme 4.2. *Soit f une multifonction de graphe séquentiellement fermé de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{F}$. *Soit $(0,0) \in F$ et $U \times V \in \mathcal{N}_{\mathbf{E} \times \mathbf{G}}$. Soient S_n une suite sommable d' ensembles de* $\mathbf{E}$ *avec $0 \in S_n$, $U_n \in \mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ une suite convergente, et pour tout $(x, y) \in U \times V$ et tout n, soit $g_{(x,y),n}$ un V_n-approximation de f en (x, y) sur S_n, ou V_n est tel qu'il existe $W \in \mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ avec $\overline{V_n + W} \subseteq U_{n+1}$. Alors pour que f soit ouvert autour de $(0,0)$, il suffit que $U_n \subseteq \overline{g_{(x,y),n}(S_n)}$.*

Démonstration. Soit $Z \in \mathcal{N}_{\mathbf{E}}$, il faut montrer que $f(Z) \in \mathcal{N}_{\mathbf{G}}$. En prenant au besoin les restes des suites S_n et U_n, on peut supposer que $T = S_1 + \ldots + S_n \ldots \subseteq Z \cap U$, et $(-U_n) \subseteq V'$ avec $V' + V' \subseteq V$, pour tout n. On a alors

$$y + U_n \subseteq \overline{y + g_{(x,y),n}(S_n)} \subseteq \overline{V_n + f(x + S_n)},$$

pour tout $(x, y) \in (U \times V) \cap F$. En particulier, pour tout $x \in S_1 + \ldots + S_{n-1}$, on a la relation:

$$(f(x) \cap V) + U_n \subseteq \overline{V_n + f(x + S_n)}.$$

Il résulte du théorème 2.3 qu'on a: $y + U_n \subseteq f(x + T_n)$ pour tout $x = S_1 + \ldots + S_n$ et $(x, y) \in F \cap (T \times (V'))$. En particulier $U_n \subseteq f(T) \subseteq f(Z)$.

Pour une multifonction donnée, il existe en général beaucoup d' approximations possibles. Il convient de choisir celles dont l' ouverture est facile à déterminer. Par exemple, on peut utiliser le théorème 3.2 et choisir les multifonctions convexes

ou quasi-convexes. D'une manière plus conventionnelle, on considère des approximations coniques. C'est ce que nous allons voir. Soit donné un sous-ensemble S d' un espace vectoriel, nous désignons par K_S le cône de sommet 0 engendré par S; et pour tout $k \in K_S$, on pose

$$|k|_S = \inf\{\lambda \geq 0 | k \in \lambda S\}.$$

Soient $S \subseteq \mathbf{E}$ et $V \subseteq \mathbf{G}$. Pour $(u, v) \in K_S \times K_V$, on pose

$$||(u, v)|| = \max(|u|_S, \quad |v|_V).$$

On pose enfin $K_S^* \times K_V^* := \{w \in K_S \times K_V \mid ||w|| \neq 0\}$.

Definition 4.3. *Soient un sous ensemble fermé $F \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{G}$, et des sous ensembles convexes $S \subseteq \mathbf{E}$ et $V \subseteq \mathbf{G}$ contenant les origines respectives. Pour tout $M = (a, b) \in F$, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, on appelle $\varepsilon\eta V$ approximation conique de F en M sur S et on dénote par $SV_{\varepsilon\eta M}$ le sous ensemble conique de $\mathbf{E} \times \mathbf{G}$ suivant:*

$$\{w \in K_S^* \times K_V^* \mid \forall h \in]0, \eta], \exists M' \in F \text{ avec } (h^{-1}(M' - M) - ||w||^{-1} w) \in \varepsilon S \times \varepsilon V\}.$$

Quand F représente le graphe d'une multifonction f, en désignant par g la multifonction de graphe $(\eta S \times \eta V) \cap SV_{\varepsilon\eta M'}$, la multifonction $x \to g((1+\varepsilon)^{-1}x)$ est une $(-\varepsilon\eta V)$-approximation de f en M sur $(1+\varepsilon)\eta S$. C' est à dire qu'on a:

Proposition 4.4. $b + g(\eta S) \subseteq \overline{f(a + (1+\varepsilon)\eta S) - \varepsilon\eta V}$.

Démonstration. Soit $(u, v) \in (\eta S \times \eta V) \cap SV_{\varepsilon\eta M}$. Montrons qu' on a:

$$b + v \in f(a + (1+\varepsilon)\eta S - \varepsilon\eta V.$$

Posons $h = ||(u, v)||$, on a $h \leq \eta$. Il existe donc $(x, y) \in F$ tel que:

$$(h^{-1}(x - a, y - b) - ||(u, v)||^{-1}(u, v)) \in \varepsilon S \times \varepsilon V.$$

D'où $x - a - u \in h\varepsilon s$ et $y - b - v \in h\varepsilon V$. Comme S et V sont convexes et contiennent les origines respectives, on a:

$$x \in a + u + h\varepsilon S \subseteq a + (1+\varepsilon)\eta S, \quad \text{et } b + v \in y - h\varepsilon V \subseteq f(a + (1+\varepsilon)\eta S) - \varepsilon\eta V.$$

Dans le cas où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{G}$ sont des espaces de Banach, nous prenons pour S et V les boules unité ouvertes respectivement de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{G}$. Nous écrirons $C_{\varepsilon\eta M}$ à la place de $SV_{\varepsilon\eta M}$. Il vient:

Théorème 4.5. *Soit $M \in F$. Supposons qu' il existe $r > 0$ et $\gamma > \varepsilon$ tels que pour tout $M' \in F \cap B_{\mathbf{E}\times\mathbf{G}}(M; r)$, on ait:*

$$\overline{Proj_{\mathbf{G}}((B_{\mathbf{E}}(0; 1) \times \mathbf{G}) \cap C_{\varepsilon\eta M'})} \supseteq B_{\mathbf{G}}(0; \gamma).$$

Alors f est ouvert autour de $M \in F$.

Démonstration. Notons que $C_{\varepsilon\eta M} \subseteq C_{\varepsilon\eta' M}$ pour tout $0 < \eta' \leq \eta$. Compte tenu que $C_{\varepsilon\eta M}$ est conique, l' hypothèse du théorème implique:

$$\overline{\mathrm{Proj}_{\mathbf{G}}((B_{\mathbf{E}}(0; \eta') \times \mathbf{G}) \cap C_{\varepsilon\eta' N})} \supseteq B_{\mathbf{G}}(0; \eta'\gamma),$$

pour tout $0 < \eta' \leq \eta$ et tout $N \in F \cap B_{\mathbf{E}\times\mathbf{G}}(M; r)$. Soit $(a, b) = N$ et soit g la multifonction définie par son graphe $(B_{\mathbf{E}}(0; \eta') \times B_{\mathbf{G}}(0; \eta')) \cap C_{\varepsilon\eta' M'}$. D' après la proposition 4.4, on a:

$$b + g(B_{\mathbf{E}}(0; \eta')) \subseteq \overline{f(a + B_{\mathbf{E}}(0; (1+\varepsilon)\eta')) - B_{\mathbf{G}}(0; \varepsilon\eta')}.$$

Par suite

$$\overline{b + g(B_{\mathbf{E}}(0; \eta'))} \subseteq \overline{f(a + B_{\mathbf{E}}(0; (1+\varepsilon)\eta')) + B_{\mathbf{G}}(0; \varepsilon\eta')}.$$

Observons que:

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{G}}((B_{\mathbf{E}}(0; \eta') \times \mathbf{G}) \cap C_{\varepsilon\eta' M'}) = g(B_{\mathbf{E}}(0; \eta')),$$

on en déduit:

$$b + B_{\mathbf{G}}(0; \eta'\gamma) \subseteq \overline{f(a + B_{\mathbf{E}}(0; (1+\varepsilon)\eta')) + B_{\mathbf{G}}(0; \varepsilon\eta')}.$$

Prenons $c \in]\varepsilon/\gamma, 1[$, et $t \in]0, \inf(\eta, r - ||M'||)[$, et donnons à η' sucessivement (suivant n) les valeurs $t(1-c)c^{n-1}$. D'après le corollaire 2.8, on déduit que la multifonction f est ouverte. De façon précise, on a pour tout n:

$$b + B_{\mathbf{G}}(0; t(1-c)c^n) \subseteq f(a + B_{\mathbf{E}}(0; (1+\varepsilon)tc^n)).$$

BIBLIOGRAPHIES

1. Aubin, J.P.; Ekeland, I. — *Applied non linear analysis.* J. Wiley, N.Y. 1984.
2. Aze, D. — *An inversion theorem for set valued maps.* Bull. Austr. Math. Soc. 37(1988) 411–414.
3. Aze, D.; Chou, C. C. — *On some mathematical tools for local controllabity.* Fifth Symppo-sium IFAC, Perpignan (1989) 211–214.
4. Aze, D.: Chou, C. C. — *Openness and approximate openness of multifunctions in general spaces.* (to appear)
5. Borwein, J.M.; Zhuang, D.M. — *Verifiable necessary and sufficient conditions for open-ness and regularity of set-valued maps and single-valued maps,* J.Math. Anal. Appl. 134(1988)441–459
6. Chou, C. C, — *Inverse function theorems for multifunctions in Frechet spaces.* (to appear)
7. Dolecki, C. — *Open relation theorem without closedness assumption.* (to appear in Proc. of Amer. Soc.)
8. Edwards, R.E. — *Functional analysis.* Holt Rinehart, N.Y. 1965.
9. Ioffe, A.D. — *On the local surjection property.* Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl. 11(1987)565–592.
10. Kelley, J.L. — *General topology.* Van Nostrand, N.Y. 1955.
11. Khanh. P.Q. — *An induction theorem and general open mapping theorems.* J. Math. Anal. Appl. 118(1986)519–534.
12. Ljusternik, L.A.; Sobolev, S.L. — *Element of fonctional analysis.* Ungar, New-York, 1961.
13. Penot, J.P. — *About linearization, conization, calmness, openness and regularity.* Nonlin. Anal. & Appl., proc. conf. Arlington, Texas(1986)
14. Penot, J.P. — *Metric regularity, openness & lipschitzien behaviour of multifunction.* to appear in Nonl. Anal. Meth. Appl.
15. Robinson, S.M. — *Regularity and stability for convex multifunctions.* Math. Op. Res. 1(1976)130-143.
16. Ursescu, C. — *Multifunction with closed convex graphs.* Czech. Math. J. 25(1975)438–441.

Received 19.XII.1990
Revised 19.III.1991

Departement Mathematiques
Université de Perpignan
66025 PERPPIGNAN Cedex
FRANCE.

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XXXVII, s. I. a. Matematică, 1991, f. 4

NOTE SUR UNE MESURE DE LA LONGUEUR ENTROPIQUE D'UN CANAL DE COMMUNICATIONS

PAR

ION PURCARU

Soit $\mathcal{S} = \{B_i\}_{i\in I}$ un système aléatoire réel quelconque et dénotons par $\mathcal{D}[\mathcal{S}] = \{\mathcal{T}_j\}_{j\in J}$, $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{T}_k = \emptyset$, $j \neq k$, $\cup_{j\in J}\mathcal{T}_j = \mathcal{S}$ une décomposition arbitraire de $\mathcal{S}$. Dénotons également par $H(\mathcal{T}_j)$ et $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k)$ l'entropie de Shannon de $\mathcal{T}_j$ et respectivement de $\mathcal{T}_j$ conditionnée par $\mathcal{T}_k$, dont les expressions et les propriétés sont supposées connues (voir [1], [2]). On dit que $\mathcal{T}_j$ et $\mathcal{T}_k$ sont entropiquement indépendantes si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_j)$ et on écrit $\mathcal{T}_j$ e.i. $\mathcal{T}_k$. On dit aussi que $\mathcal{T}_j$ est complètement dépendant de $\mathcal{T}_k$ si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = 0$ et on écrit $\mathcal{T}_j$ c.d. $\mathcal{T}_k$. Si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_j) = 0$ on dit que $\mathcal{T}_j$ et $\mathcal{T}_k$ sont réciproquement complètement dèpendants et on écrit $\mathcal{T}_j$ r.c.d. $\mathcal{T}_k$.

Proposition. *La fonction* $d : \mathcal{D}[\mathcal{S}] \times \mathcal{D}[\mathcal{S}] \to [0,\infty)$ *définie par*

$$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_j) \tag{1}$$

est une semi-distance sur $\mathcal{D}[\mathcal{S}]$.

Preuve. A la suite des propriétés de l'entropie de Shannon (voir [1], [2]) on déduit facillement que

1)$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) \geq 0$ pour tout couple $(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k)$;
2)$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_j$ r.c.d. $\mathcal{T}_k$ (particulièrement si $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_k$);
3)$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = d(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_j)$ pour tout couple $(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k)$.

Puisqu'on a toujours (voir [2])

$$H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_l) \geq H[\mathcal{T}_j/(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_l)] = H[(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_l)/\mathcal{T}_k] - H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_k) \geq H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) - H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_k)$$

et de même si on change j par k et k par j et parce que

$$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_l) + d(\mathcal{T}_l, \mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_l) + H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_j) + H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_l),$$

on peut écrire sans difficultés que

4)$d(\mathcal{T}_j\mathcal{T}_k) \leq d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_l) + d(\mathcal{T}_l, \mathcal{T}_k)$ pour tout $\mathcal{T}_j$, $\mathcal{T}_k$, $\mathcal{T}_l$

et l'affirmation de la proposition est vérifiée.