BIBLIOGRAPHIES

1. Aubin, J.P.; Ekeland, I. — *Applied non linear analysis.* J. Wiley, N.Y. 1984.
2. Aze, D. — *An inversion theorem for set valued maps.* Bull. Austr. Math. Soc. 37(1988) 411–414.
3. Aze, D.; Chou, C. C. — *On some mathematical tools for local controllabity.* Fifth Symppo-sium IFAC, Perpignan (1989) 211–214.
4. Aze, D.: Chou, C. C. — *Openness and approximate openness of multifunctions in general spaces.* (to appear)
5. Borwein, J.M.; Zhuang, D.M. — *Verifiable necessary and sufficient conditions for open-ness and regularity of set-valued maps and single-valued maps,* J.Math. Anal. Appl. 134(1988)441–459
6. Chou, C. C, — *Inverse function theorems for multifunctions in Frechet spaces.* (to appear)
7. Dolecki, C. — *Open relation theorem without closedness assumption.* (to appear in Proc. of Amer. Soc.)
8. Edwards, R.E. — *Functional analysis.* Holt Rinehart, N.Y. 1965.
9. Ioffe, A.D. — *On the local surjection property.* Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl. 11(1987)565–592.
10. Kelley, J.L. — *General topology.* Van Nostrand, N.Y. 1955.
11. Khanh. P.Q. — *An induction theorem and general open mapping theorems.* J. Math. Anal. Appl. 118(1986)519–534.
12. Ljusternik, L.A.; Sobolev, S.L. — *Element of fonctional analysis.* Ungar, New-York, 1961.
13. Penot, J.P. — *About linearization, conization, calmness, openness and regularity.* Nonlin. Anal. & Appl., proc. conf. Arlington, Texas(1986)
14. Penot, J.P. — *Metric regularity, openness & lipschitzien behaviour of multifunction.* to appear in Nonl. Anal. Meth. Appl.
15. Robinson, S.M. — *Regularity and stability for convex multifunctions.* Math. Op. Res. 1(1976)130-143.
16. Ursescu, C. — *Multifunction with closed convex graphs.* Czech. Math. J. 25(1975)438–441.

Received 19.XII.1990
Revised 19.III.1991

Departement Mathematiques
Université de Perpignan
66025 PERPPIGNAN Cedex
FRANCE.

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XXXVII, s. I. a. Matematică, 1991, f. 4

NOTE SUR UNE MESURE DE LA LONGUEUR ENTROPIQUE D'UN CANAL DE COMMUNICATIONS

PAR

ION PURCARU

Soit $\mathcal{S} = \{B_i\}_{i\in I}$ un système aléatoire réel quelconque et dénotons par $\mathcal{D}[\mathcal{S}] = \{\mathcal{T}_j\}_{j\in J}$, $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{T}_k = \emptyset$, $j \neq k$, $\cup_{j\in J}\mathcal{T}_j = \mathcal{S}$ une décomposition arbitraire de $\mathcal{S}$. Dénotons également par $H(\mathcal{T}_j)$ et $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k)$ l'entropie de Shannon de $\mathcal{T}_j$ et respectivement de $\mathcal{T}_j$ conditionnée par $\mathcal{T}_k$, dont les expressions et les propriétés sont supposées connues (voir [1], [2]). On dit que $\mathcal{T}_j$ et $\mathcal{T}_k$ sont entropiquement indépendantes si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_j)$ et on écrit $\mathcal{T}_j$ e.i. $\mathcal{T}_k$. On dit aussi que $\mathcal{T}_j$ est complètement dépendant de $\mathcal{T}_k$ si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = 0$ et on écrit $\mathcal{T}_j$ c.d. $\mathcal{T}_k$. Si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_j) = 0$ on dit que $\mathcal{T}_j$ et $\mathcal{T}_k$ sont réciproquement complètement dèpendants et on écrit $\mathcal{T}_j$ r.c.d. $\mathcal{T}_k$.

Proposition. *La fonction* $d : \mathcal{D}[\mathcal{S}] \times \mathcal{D}[\mathcal{S}] \to [0,\infty)$ *définie par*

$$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_j) \tag{1}$$

est une semi-distance sur $\mathcal{D}[\mathcal{S}]$.

Preuve. A la suite des propriétés de l'entropie de Shannon (voir [1], [2]) on déduit facillement que

1)$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) \geq 0$ pour tout couple $(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k)$;
2)$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_j$ r.c.d. $\mathcal{T}_k$ (particulièrement si $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_k$);
3)$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = d(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_j)$ pour tout couple $(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k)$.

Puisqu'on a toujours (voir [2])

$$H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_l) \geq H[\mathcal{T}_j/(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_l)] = H[(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_l)/\mathcal{T}_k] - H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_k) \geq H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) - H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_k)$$

et de même si on change j par k et k par j et parce que

$$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_l) + d(\mathcal{T}_l, \mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_l) + H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_j) + H(\mathcal{T}_l/\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_l),$$

on peut écrire sans difficultés que

4)$d(\mathcal{T}_j\mathcal{T}_k) \leq d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_l) + d(\mathcal{T}_l, \mathcal{T}_k)$ pour tout $\mathcal{T}_j$, $\mathcal{T}_k$, $\mathcal{T}_l$

et l'affirmation de la proposition est vérifiée.

On remarque aussi que $d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) \leq H(\mathcal{T}_j) + H(\mathcal{T}_k)$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{T}_j$ e.i. $\mathcal{T}_k$.

Supposons maintenant que $\mathcal{S}$ est un système de transmission de l'information dont les éléments principaux sont respectivement la source d'émission E, la source de réception R et le canal de communications $C = C(E, R)$, dont le fonctionnement peut-être perturbé par une source de bruiage B. Dans ce cas, on sait que $H(E/R)$ et $H(R/E)$ représentent les quantités d'information perdues dans les deux sens de la transmission de l'information par le canal de communications à cause des bruits. Par conséquent, l'expression $d(E, R)$ représente la distance entre l'émission E et la réception R en ce qui concerne la quantité totale d'information perdue par canal, pouvant être considérée même comme une mesure de la qualité de la transmission par canal ou bien même comme une caractéristique du canal de communications. Dénotons alors par

$$L(C) = L[C(E, R)] = d(E, R) \tag{2}$$

et observons que

a) $L(C)$ existe pour tout canal de communications $C(E, R)$,

b) $L[C(E, R)] = L[C(R, E)]$,

c) $0 \leq L(C) \leq H(E) + H(R)$,

d) $L(C) = 0 \Leftrightarrow E$ r.c.d. R, ce qui signifie que, practiquement, l'émission et la réception de l'information sont identiques, comme si le canal n'existe pas,

e) $L(C) = H(E) + H(R) \Leftrightarrow E$ e.i. R, ce qui signifie que, pratiquement, on a l'émission d'un message et la réception d'un autre message, comme si le canal est assez long, ou les bruits sont assez forts, qu'on a perdu toute l'information émisse,

f) $L[C(E, R)] \leq L[C(E, S)] + L[C(S, R)]$ pour toute source d'émission-réception S interposée entre l'émission E et la réception R, avec égalité si et seulement si E, R et S sont réciproquement complètement dépendantes.

Supposons maintenant que la distribution probabilistique du couple émission-réception (E, R) est définie par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a_1a_2 - h^2}\exp\{-\frac{1}{2}(a_1x_1^2 + 2hx_1x_2 + a_2x_2^2)\} \tag{3}$$

où $(x_1, x_2) \in R^2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1a_2 > h^2$.

Dans ce cas on va déduire sans difficulté que

$$H(E) = \log_2\sqrt{2\pi e a_2}(a_1a_2 - h^2)^{-1},$$
$$H(R) = \log_2\sqrt{2\pi e a_1}(a_1a_2 - h^2)^{-1},$$
$$H(E, R) = \log_2 2\pi e(a_1a_2 - h^2)^{-1},$$

et par conséquent,

$$L(C) = d(E, R) = \log_2(2\pi e/a_1a_2).$$

Si $a_k = \sigma_k^{-2}(1-\rho^2)^{-1}$, $k = 1, 2$ et $h = -\rho\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}(1-\rho^2)^{-1}$, où σ_1^2 est la variance de l'émission, σ_2^2 la variance de la réception et $\rho = \rho(E, R)$ est leur coefficient

de corrélation, alors la distribution (3) sera la distribution normale bidimensionnelle et dans ce cas on observe que

$$L(C) = d(E, R) = \log_2 2\pi e\sigma_1\sigma_2(1 - \rho^2).$$

On déduit que

a) si E e.i. $R \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow L(C) = \log_2 2\pi e\sigma_1\sigma_2 = L_{\max}(C)$,

b) si E r.c.d. $R \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ et $(1-\rho^2)^{-1} = 2\pi e\sigma^2 \Rightarrow L(C) = 0 = L_{\min}(C)$.

Par conséquant des considérations ci-dessus données, l'expression $L(C)$ sera dénommée longueur entropique ou informationelle du canal de communication $C(E, R)$. On observa que cette expression est une mesure quantitative et à la fois qualitative du canal de communications ou bien de la transmission de l'information par le canal de communications.

REFERENCES

1. Guiaşu, S. — *Information theory with applications*, McGraw-Hill, 1977.
2. Purcaru, I. — *Information et corrélation*, Maison d'Ed. Sci. et Encycl., 1988.
3. Watanabe, S. — *Knowing and quessing*, Wiley, 1969.

Received 26.VI.1990
Revised 23.I.1991

Departement de Mathématiques
Academie d'Etudes Economiques
Bucarest