ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matematică, 1994, f1.

SUR L'EXISTENCE DES SOLUTIONS OPTIMALES POUR UNE FAMILLE DES PROBLÈMES D'OPTIMISATION

BY

TEODOR PRECUPANU*

Le modelage mathématique de certains processus à l'aide des problèmes d'optimisation conduit en beaucoup de situations à des familles de problèmes d'optimisation dépendant de certains paramètres qui ont une importance et un rôle particulier dans le développement du processus respectif. Il arrive que même dans l'étude d'un certain problème d'optimisation nous soyons obligés de faire appel à de différentes familles de problèmes d'optimisation associés naturellement au problème respectif. Souvent on emploie des perturbations données par des translations. Soit donc une fonction $F : X \times Y \longrightarrow \overline{R}$ et la famille de problèmes associée

$$(P_y) \qquad \min_{x \in X} F(x, y), \quad y \in Y.$$

D'une part, il est utile de savoir en quelles conditions ces problèmes ont des solutions optimales pour chaque $y \in Y$, et d'autre part, la situation oposée dans laquelle aucun des problèmes de la famille (P_y) n'a pas de solution optimale. Il est clair que l'ensemble Y des paramètres se décompose dans une partie pour laquelle nous avons des solutions et sa complémentaire pour laquelle nous n'avons pas de solutions, mais usuellement les deux ensembles complémentaires de paramètres sont souvent antérieurement localisés. Considérons, par exemple, la minimisation sur un certain sousensemble $A \subset X$ avec $F|_{A \times Y}$ ayant des valeurs réelles, c'est-à-dire

$$(P_y^A) \qquad \min_{x \in A} F(x, y), \quad y \in Y.$$

---

* *This paper represents the written version of the communication presented at the Proceedings of the University "Al.I.Cuza" held in Iaşi, October 21–30, 1994.*

Nous désirons préciser les ensembles nonvides $A \subset X$ pour laquels (P_y^A) a des solutions optimales pour tout $y \in Y$ et les ensembles novides $A \subset X$ pour lesquels (P_y^A) n'a pas de solutions optimales. Un problème d'un tel type apparaît dans *la théorie de la meilleure approximation.*

Soit X un espace linéaire normé et A un sousensemble nonvide. Si $y \in X$, on dit que $x_y \in A$ est un *élément de meilleure approximation* par les éléments de l'ensemble A si

$$\|y - x_y\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x \in A. \tag{1}$$

Ici $Y = X$ or $Y = X \setminus A$ et $F(x, y) = \|x - y\| + I_A(x)$ où I_A est la fonction indicatrice de l'ensemble A.

On désigne par $S_A(y)$ l'ensemble de tous les éléments de la meilleure approximation, c'est-à-dire:

$$S_A(y) = \{x_y \in A;\ \|y - x_y\| \leq \|y - x\|,\ \forall \in A\}. \tag{2}$$

On dit que l'ensemble A est *proximinal* si $S_A(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in X$. Aussi, si $S_A(y) = \emptyset$, $\forall y \in X \setminus A$, on dit que l'ensemble A est *antiproximinal* .

On remarque facilement que

$$S_A(y) \subset Fr\, A, \quad \forall y \in A,$$

tel que tout ensemble proximinal est nécessairement fermé, et tout ensemble ouvert A est antiproximinal. D'ailleurs, nous verrons que la proximinalité or l'antiproximinalité d'en ensemble peut être même caractérisée par la condition qu'un certain ensemble déterminé par la norme de l'espace et l'ensemble A soit fermé, respectivement ouvert. Une situation pareille a lieu pour la famille de problèmes (P_y) ou (P_y^A).

En ce qui suit nous considérons seulement le problème de l'existence des solutions optimales pour une famille des problèmes donnés. Particulièrement nous mettons en évidence une caractérisation pour la surjectivité de sousdifférentielle d'une fonction convexe.

1. L'optimalité globale. Dans la caractérisation des problèmes P_y qui ont des solutions optimales pour chaque $y \in X$, un rôle important revient à l'ensemble

$$H = \{(y, a) \in Y \times R;\ \text{il existe } x \in X \text{ tel que } F(x, y) \leq a\}. \tag{3}$$

En rappelant que

$$\text{epi } F = \{(x, y, a) \in X \times Y \times R;\ F(x, y) \leq a\} \tag{4}$$

nous observons que H *est la projection sur* $Y \times R$ *de l'épigraphe* de la fonction F.

D'autre part, si nous associons la *fonction valeur*

$$h(y) = \text{val } P_y = \inf_{x \in X} F(x, y), \quad y \in Y \tag{5}$$

nous observons que

$$H \subset \text{epi } h \subset \overline{H}. \tag{6}$$

si Y est un espace topologique.

Pour le cas convexe, si nous avons:

(i) (X, X^*), (Y, Y^*) *deux systèmes duals munis aux topologies compatibles,*

(ii) F *est une fonction convexe et inférieurement semicontinue sur* $X \times Y$,

les propriétés des problèmes (A_y) sont étroitement liées aux propriétés des *problèmes duals* par conjugaison

$$(D_y)\ \max_{y^* \in Y} \{(y, y^*) - F^*(0, y^*)\}, \quad y \in Y.$$

Il est bien connu que

$$\text{val } D_y = h^{**}(y)$$

et en conséquence val P_y = val D_y, pour chaque $y \in Y$, *si et seulement si* h *est convexe et fermée sur* Y.

En tenant compte du théorème de la biconjuguée et des propriétés des fonctions convexes inférieurement semicontinues, à l'aide de la relation (6), nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Théorème 1. *Si un des problèmes* (P_y) *a une valeur finie, alors les problèmes* (P_y) *ont des solutions optimales et* val P_y = val $D_y \neq -\infty$, *pour chaque* $y \in Y$, *si et seulement si l'ensemble* H *est convexe et fermé.*

Ce résultat est mentionné en essence dans le travail de P. Levine-J.Ch. Pomerol [15] dédié à la caractérisation de l'existence des multiplicateurs de Lagrange dans l'optimisation convexe.

La condition de fermeture pour des ensembles du type (3) a été considérée pour le cas convexe par Ky Fan [7], Krabs [12], Dieter [4], Arrow-Hurwicz-Uzawa [1], Raffin [21], Vau Slyke-Wets [22], Nakamura-Yamasaki [16], Zălinescu [23] et d'autres. Dualement on obtient une caractérisation de la stabilité des problèmes convexes qui usuellement est donnée par la propriété de sousdifférentiabilité de la fonction valeur h. En conséquence, même

la propriété de sousdifférentiabilité d'une fonction peut être caractérisée par la condition qu'un certain ensemble soit convexe et fermé. Aussi nous avons la caractérisation suivante de la surjectivité de sousdifférentielle d'une fonction convexe.

Théorème 2. *La sousdifférentielle d'une fonction convexe propre et inférieurement semicontinue est surjective, c'est-à-dire*

$$\bigcup_{x\in \mathrm{Dom}(f)} \partial f(x) = \mathrm{Dom}(f^*), \tag{7}$$

si et seulement si l'ensemble

$$H = \{(x^*, u - x^*(x)) \in X^* \times R;\ (x,u) \in \mathrm{epi}\, f,\ x^* \in \mathrm{Dom}(f^*)\} \tag{8}$$

*est *faiblement fermé dans l'espace* $\mathrm{Dom}(f^*) \times R$.

Démonstration. Il est bien connu que $x^* \in \partial f(x)$ si et seulement si $(x, x^*) \in \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(f^*)$ et $f(x^*) = \sup_{u\in D(f)} \{x^*(u) - f(u)\} = x^*(x) - f(x)$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Dom}(f)$ est une solution optimale pour le problème

$$\inf_{u\in X} \{f(u) - x^*(u)\}. \tag{P_{x^*}}$$

En conséquence, l'égalité (7) est équivalente à l'existence des solutions optimales pour chaque $x^* \in \mathrm{Dom}(f^*)$. Il nous reste donc à appliquer le Théorème 2.

Corollaire. *Un espace de Banach est réflexif si et seulement si l'ensemble*

$$H = \{(x^*, \|x\|^2 - x^*(x) + \varepsilon) \in X^* \times R;\ x \in X;\ \varepsilon \geq 0\}$$

*est *faiblement fermé dans l'espace* $X^* \times R$.

Démonstration. Soit $f(x) = \|x\|^2$, $x \in X$. Il est immédiat que $x^* \in \partial \frac{1}{2}\|\cdot\|^2(x)$, $\|x^*\| = \|x\| = 1$, si et seulement si x^* atteint son maximum sur la sphère unité fermée pour x. D'autre part, grâce au théorème de J a m e s [9], [20], un espace de Banach est réflexif si et seulement si chaque fonctionnelle linéaire et continue atteint son maximum sur la sphère unité fermée, c'est-à-dire l'opérateur multivoque $\partial\|\cdot\|^2$ est surjectif.

Mais on peut observer que *la propriété de convexité intervient seulement pour assurer de l'égalité entre les valeurs des problèmes $P(y)$ et leurs duals $D(y)$ et donc elle peut être séparée de la propriété d'existence des solutions optimales.* Cette observation permet l'extension de quelques critères d'optimalité au cas nonconvexe. Dans un travail antérieur, j'ai mis en évidence le suivant résultat général:

Théorème 3. [21] *Les problèmes (D_y) ont des solutions optimales pour chaque $y \in Y$ avec $h(y) \neq -\infty$ et la fonction valeur h est inférieurement semicontinue sur Y si et seulement si l'ensemble H est fermé en $Y \times R$.*

Donc, on peut obtenir des critères d'optimalité si l'on donne des conditions suffisantes pour que l'ensemble H, généralement non-convexe, soit fermé. On rappelle qu'une généralisation au cas non-convexe du critère connu de D i e u d o n n é [5] a été donnée par J.P. D e d i e u [3], qui reprend un critère de fermeture établi par J. G w i n n e r [8] pour le cas convexe.

Certains critères d'optimalité pour le cas non-convexe obtenus à l'aide du théorème de Dedieu sont largement discuté par V. B a r b u, T. P r e c u p a n u dans la monographie [2].

Un résultat de ce type, assez général, est le suivant:

Théorème 4. *Soient X, Y deux espaces linéaires topologiques séparés et $F : X \times Y \to R$ une fonction inférieurement semicontinue. Si*

(i) *pour chaque $x \in X \setminus \{0\}$ il existe $s > 0$ tel que $(x, 0)$ est un point intérieur de l'ensemble*

$$\{(u,v) \in X \times Y;\ \inf_{0<\lambda\leq s} \lambda F\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) > s\}$$

(ii) *il existe $s > 0$ tel que l'ensemble*

$$H_s = \{(u,v) \in X \times Y;\ \inf_{0<\lambda\leq s} \lambda F\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \leq s\}$$

a l'intersection avec un certain voisinage de l'origine de $X \times Y$ relativement compacte

alors chaque problème (P_y) a des solutions optimales toutes les fois que la valeur est finie. En plus, la fonction valeur est inférieurement semicontinue sur Y.

Démonstration. Soit $(y_i, \alpha_i)_{i\in I}$ une suite généralisé de H convergeante vers $(y_0, \alpha_0) \in X \times R$. Donc, pour chaque $i \in I$ il existe $x_i \in X$ tel que $F(x_i, y_i) \leq \alpha_i$. En tenant compte des propriétés (i), (ii), nous pouvons trouver une soussuite de $(x_i, y_i)_{i\in I}$ convergeante vers un élément (x_0, y_0) et nous avons finalement montré que H est fermé.

On observe que (i) est une condition de coércivité qui peut être remplacée par

$$F_\infty(x,0) > 0, \quad \text{pour chaque } x \in X \setminus \{0\}.$$

D'autre part, comme on procède d'habitude, la condition (ii) de compacité peut être remplacée par une condition d'intériorité dans l'espace dual.

Une simplification des conditions (i) et (ii) a lieu si F est positivement homogène. Dans ce cas, nous avons

(i)′ $F(x,0) > 0$ *pour chaque* $x \in X \setminus \{0\}$.

(ii) *l'ensemble de niveau*

$$\{(x,y) \in X \times T;\ F(x,y) \le 1\}$$

possède un voisinage compacte de l'origine.

Considérons maintenant la famille des perturbations par translations d'un problème de minimisation

$$P(y)\ \min\{f(x) + g(y - Ax);\ x \in X\}, \quad y \in Y,$$

où f, g sont deux fonctions positivement homogènes, propres et inférieurement semicontinues et $A : X \times Y$ un opérateur linéaire continu. L'ensemble H associé sera

$$H = \text{epi } g - \{(Ax, x));\ x \in \text{Dom } f\}.$$

La propriété de fermeture de H peut être réalisée, par exemple, par les suivantes conditions suffisantes.

(i) $f(x) + g(-Ax) > 0$, *pour chaque* $x \in X \setminus \{0\}$.

(ii) $\{(Ax, x)):\ x \in \text{Dom } f\}$ *est localement compact or il est fermé et epi* g *est localement compact.*

Par l'utilisation convenable des différents critères pour fermeture de la différence de deux ensembles nous pouvons obtenir autres conditions qui assurent la fermeture d'ensemble H (voir V. Barbu et T. Precupanu [2] pour les critères spéciaux pour le cas convexe).

En imposant des conditions de coércivité, C. Zălinescu a établit dans plusieurs articles (voir [25]) des résultats analogues (voir aussi Levine–Pomerol [15],[16]).

Si on revient au problème de la meilleure approximation, en appliquant le Théorème 2, on obtient la suivante caractérisation des ensembles proximinals:

Théorème 5. *Un ensemble nonvide et fermé A d'un espace linéaire normé est proximinal si et seulement si l'ensemble*

$$\text{epi}\|\cdot\| + A \times \{0\}$$

est fermé dans $X \times R$.

Corollaire. *Un cône fermé A est proximinal si et seulement si* $\overline{S}(0,1) + A$ *est fermé dans* X.

Le Théorème 2 peut être adapté dans le cas d'optimalité locale, c'est-à-dire si pour un élément donné $y_0 \in Y$ il existe un voisinage de y_0 tel que les problèmes (P_y) ont des solutions pour chaque élément y de ce voisinage. Cette idée a été valorifiée par Jeyakumar [11].

REFERENCES

1. Arrow, K.J., Hurwicz, L., Uzawa, H. – *Studies in Linear and Non-linear Programming*, Stanford Univ. Press, 1958.
2. Barbu, V., Precupanu, T. – *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, D. Reidel Publishing company, 1986.
3. Dedieu, J.-P. – *Critères de fermeture pour l'image d'un fermé non-convexe par une multiplication*, C.R. Acad. Sci. Paris 185, 1977, 501–503.
4. Dieter, U. – *Optimierungsanfgaben in topologische Vectorräumen*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 5, 1966, 89–117.
5. Dieudonné, J. – *Sur la séparation des ensembles convexes*, Mat. Ann. 163 (1966), 1–3.
6. Edelstein, M., – *A note on nearest points*, Quart. J. Math. Oxford, 21 (1970), 403–405.
7. Fan, Ky – *Asymptotic cones and duality of linear relations*, J. Approx. Theory 2 (1969), 152–159.
8. Gwinner, J. – *Closed images of convex multivalued mapings in linear topological spaces with applications*, J. Math. Anal. Appl. 60 (1977), 75–86.
9. Holmes, R.B. – *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, 1975.
10. Jeyakumar, V. – *Non-convex infinite games*, Optimization 19 (1988).
11. Jeyakumar, V. – *Infinite dimensional convex programming with applications to constrained approximation*, Appl. Math. Preprint. Univ. of New South Wales, 1991.
12. Krabs, W. – *Zur Dualitatstheorie bei linearen Optimierungs Problemen in halbgeordneten Vektorräumen*, Math. Z. 121 (1971), 320–328.

13. K u r c y u s z, S. – *On the existence and nonexistence of Lagrange multiplier in Banach spaces*, J. Optim. Theory Appl. 290 (1976), 81–110.
14. L e v i n e, P., P o m e r o l, J.-Ch. – *Sufficient conditions for Kuhn–Tucker vectors in convex programming*, SIAM J. Control and Optim. 17 (1979), 680–99.
15. L e v i n e, P., P o m e r o l, J.-Ch. – *C-closed mappings and Kuhn–Tucker vectors in convex programming*, CORE Disc. Papers, No. 7620, Univ. Louvain, 1976.
16. N a k a m u r a, T., Y a m a s a k i, M. – *Sufficient conditions for duality theorem in infinite linear programming problems*, Hiroshima Math. J. 90 (1979), 323–324.
17. P r e c u p a n u, A., P r e c u p a n u, T. – *A characterization of antiproximinal sets*, An. Şt. Univ. Iaşi, 33 (1987), 99–105.
18. P r e c u p a n u, T. – *Duality in best approximation problems*, An. Şt. Univ. Iaşi, 26 (1980), 23–30.
19. P r e c u p a n u, T. – *Closedness conditions for the optimality of a family of non-convex optimization problms*. Optimization, 15 (1984), 339–346.
20. P r e c u p a n u, T. – *Spaţii Lineare Topologice şi Elemente de Analiză Convexă*, Ed. Acad. Române, 1992.
21. R a f f i n, Cl. – *Sur les programmes convexes définis dans les espaces vectoriels topologiques*, C.R. Acad. Sci. Paris 268 (1969), 738–741.
22. V a n S l y k e, R., W e t s, R. – *A duality theory for abstract mathematical programs*, J. Math. Anal. Appl. 22 (1968), 679–706.
23. Z ă l i n e s c u, C. – *Stabilité pour une classe de problèmes d'optimization non-convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris 307 (1988), 643–646.

Department of Mathematics
"Al.I.Cuza" University of Iaşi
6600 Iaşi
ROMANIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matematică, 1994, f4

GRADUAL METRICS AND OUTER MEASURES

BY

LIVIU C. FLORESCU*

1. Introduction. The notion of probabilistic metric (PM) spaces was introduced by K. M e n g e r in 1942 (see [6]) for modelling those situations in which we have only probabilistic informations about the distances between points of the space ([10] is a survey in this subject; see [7] also). The E-spaces of S h e r w o o d (see [11]) are typical examples of PM spaces. So, if $(T, \mathcal{A}, \mu)$ is a space with a probability measure μ, then to every two measurable mappings $x, y : T \longrightarrow \mathbb{R}$ we assign a distribution function $F_{xy} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, letting $F_{xy}(a) = \mu(\{t \in T : |x(t) - y(t)| < a\})$. Let $\doteq$ be the equality μ-almost everywhere and let M be the quotient space $\mathcal{M}/\doteq$, when $\mathcal{M}$ is the family of all measurable mappings of T in $\mathbb{R}$; then (M, F, T_m) is a Menger space relating to the t-norm T_m ($T_m(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$).

B. S c h w e i z e r and A. S k l a r proved in [9] that the probabilistic metric on an E-space M of measurable mappings on a probability space $(T, \mathcal{A}, \mu)$ yields as much information about M as all Fréchet–Minkowski metrics on $L^p(T)$, $p > 0$; so all such Fréchet–Minkowski metrics are obtainable from a single probabilistic metric.

In section 2 of this paper we generalize E-spaces of Sherwood. So, if μ^* is an outer measure on T, then we introduce a gradual metric on the space X of all real mappings on T. In the particular case of a probability space, we obtain a probabilistic pseudometric on $M \subseteq X$ which is the equivalent form of probabilistic metric on E-space M of all measurable mappings (see [2]). Conversely, we give the conditions as a gradual metric be induced by an outer measure (Theorem 2.15). So, an outer measure on T yields the same informations as a gradual metric on X.

* *This paper represents the written version of the communication presented at the Proceedings of the University "Al.I.Cuza" held in Iaşi, October 21–30, 1994.*