ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matematică, 1994, f.1.

REMARQUES SUR LES ALGÈBRES DE HEYTING

BY

GH. GH. RADU*

1. La catégorie asociée à une algèbre de Heyting.

1.1. Définition. *Un ensemble ordonné $(H, \leq)$ s'appelle treillis (ou lattice) si tout ensemble $\{x, y\} \subseteq H$ admet une borne inférieure, $x \wedge y$, et une borne supérieure, $x \vee y$. Si $(H, \leq)$ este un treillis, alors, pour toute famille finie, $H' \neq \emptyset$, d'éléments de H, il existe une borne inférieure, $\bigwedge_{x \in H'} x$, et une borne supérieure, $\bigvee_{x \in H'} x$. Le treillis $(H, \leq)$ s'appèlle complet si tout sou ensemble de H admet une borne inférieure et une borne supérieure.*

Il en résulte qu'un treillis complet possède un élément initial "0", et un élément final, "1".

La catégorie associée à l'ensemble ordonné $(H, \leq)$, notée par le même H, est la catégorie pour laquelle la classe des objets coïncide avec l'ensemble H et, si $x, y \in H$, alors

$$H(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & si\ x \leq y \\ \emptyset & si\ x \not\leq y \end{cases}$$

c.à.d. l'ensemble des morphismes de source x et d'adresse y est l'ensemble onde si $x \not\leq y$ et l'ensemble avec un seul élément, (x, y), si $x \leq y$. La composition des morphismes est assurée par la propriété de transitivité d'une relation d'ordre. Les seuls isomorphismes de H sont les morphismes identité, $(1_x = (x, x)$, pour x dans $H)$.

---

* *This paper represents the written version of the communication presented at the Proceedings of the University "Al.I.Cuza" held in Iaşi, October 21-30, 1994.*

1.2. Soient H et H' les catégories associées aux ensembles ordonnés $(H, \leq)$ et $(H', \leq)$, respectivement. Les propositions suivantes sont bien connues, mais nous les énonçons parce qu'on va faire fréquemment des références aux celles ci dans la partie finale de ce paragraphe.

1°. Donner un foncteur covariant (resp. contravariant) de H dans H' revient à donner une fonction monotone (resp. anti monotone), $f : (H, \leq) \to (H', \leq)$. Si $f, g : H \to H'$ sont des foncteurs covariants ou contravariants, alors il est défini un morphisme fonctoriel $\alpha : f \to g$ ssi pour tout x de H on a $f(x) \leq g(x)$.

2°. Si $f : H \to H'$, $g : H' \to H$ sont deux foncteurs covariants (resp. contravariants) alors f est un adjoint à gauche de g si pour tout couple $(x, x') \in H \times H'$ il existe une bijection

$$(*) \quad \begin{array}{l} H'(f(x), x') \to H(x, g(x')) \text{ ssi } x' \leq f(x) \iff x \leq g(x') \\ (\text{resp. } H'(x', f(x)) \to H(x, g(x')) \text{ ssi } x' \leq f(x) \iff x \leq g(x') \end{array}$$

3°. Si $a, b \in H$ et $h^a, h^b : H \to Ens$ (resp. $h_a, h_b : H \to Ens$) sont les foncteurs de Yoneda covariants (resp. contravariants) associés aux éléments a, b alors on aura un isomorphisme fonctoriel h^a, h^b (resp. h^a, h^b) ssi $a = b$.

4°. Si $F : C \to D$, $G : D \to C$ sont deux foncteurs covariants et F est un adjoint à gauche de G, alors F commute aux limites inductives et G aux limites projectives. En particulier F (resp. G) commute aux sommes directes (resp. aux produits directs) et conserve les objets initiaux (resp. finaux).

5°. Si C est une catégorie avec des produits directs (resp. avec des sommes directes) et A un objet de C, alors il existe une bijection

$$C(A, \prod_{i \in I} X_i) \simeq \prod_{i \in I} C(A, X_i) \quad (\text{resp. } C(\coprod_{i \in I} X_i, A) \simeq \prod_{i \in I} C(X_i, A))$$

pour toute famille $\{X_i\}_{i \in I}$ d'objets de C indexée par I.

1.3. Définition. *Une catégorie C est dite cartesienne si elle est aux limites projectives finies et pour tout objet A de C le foncteur produit direct par A, $A \times - : C \to C$ possède un adjoint à droite, $(\ )^A : C \to C$ appelé le foncteur exponentiation par A.*

Soit $(H, \leq)$ un treillis et "$\to$" une opération binaire sur H. Pour tout $(x, y) \in H \times H$ on designe par $x \to y$ la composition de x avec y par "$\to$".

1.4. Définition. *Le triple $(H, \leq, \to)$ est dite algèbre de Heyting si le treillis $(H, \leq)$ possède un élément initial 0 et pour tous a, b, x de H, on a*

$$(*) \qquad a \wedge x \leq b \iff x \leq a \to b.$$

1.5. Remarque. Tout algèbre de Heyting $(H, \leq, \to)$ possède un élément final 1. En effet, pour tout x de H on a $a \wedge x \leq a$ et, compte tenu de $(*)$, il en résulte que $x \leq a \to a$, i.e. $a \to a$ est un élément final dans $(H, \leq)$.

1.6. Définition. *Soient $(H, \leq, \to)$, $(H', \leq, \to)$ deux algèbres. Une application $f : H \to H'$ est dite homomorphisme d'algèbre si les relations suivantes sont vérifiées:*

1° $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

2° $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

3° $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$, $(\forall) x, y \in H$

4° $f(0) = 0$.

1.7. Remarque. Compte tenu de 1.5. il résulte que, si $f : H \to H'$ est un homomorphisme d'algèbres, alors $f(1) = 1$ (l'image de l'élément final de $(H, \leq)$ est l'élément final de H').

Il est evident que la composition de deux homomorphismes d'algèbres est aussi un homomorphisme d'algèbres.

On obtient une catégorie, HA qui sera appellée la catégorie des algèbres de Heyting si on considère comme objets de HA toutes les algèbres de Heyting et comme morphismes les homomorphismes d'algèbres définis ci-dessus.

1.8. Théorème. *La catégorie H associée à une algèbre $(H, \leq, \to)$ est aux produits directs finis et aux sommes directes finies.*

Preuve. Si $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de H, alors le produit direct (resp. la somme directe) de la famille $\underline{x}$ seront définis par l'intermédiaire de $\bigwedge_{i \in I} x_i$ (resp. $\bigvee_{i \in I} x_i$.

Le theorème suivant est évident.

1.9. Théorème. *Soient H la catégorie associée à une algèbre de Heyting $(H, \leq, \to)$ et $a \in H$.*

Alors on a:

i) *Les correspondances $x \mapsto (a \to x)$, $x \mapsto a \wedge x$ définissent des foncteurs covariants $a \to -$, $a \wedge -$, de H dans H. De plus, $a \wedge -$ est adjoint à gauche du foncteur $a \to -$.*

ii) *La correspondance $x \mapsto (a \to x)$ définit un foncteur contravariant, $- \to a$, de H dans H qui est son propre adjoint à gauche.*

Le foncteur $a \wedge -$ est dit le foncteur "produit direct par a", et le foncteur $a \to -$ correspond à l'exponentiation dans une catégorie cartésienne.

1.10. Remarque. Soit $(H, \leq, \to)$ une algèbre de Heyting et $a \in H$. Compte tenu de 1.2: 4°, on a:

i) Si 0 (resp. 1) est l'élément initial (resp. final) dans $(H, \leq)$, alors $a \wedge 0 = 0$ et $(a \to 1) = 1$.

ii) Pour toute famille finie $\underline{x} = \{x_i\}_{i \in I}$ d'éléments de H on a les égalités:

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} x_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i) \quad \text{et} \quad a \to \left(\bigwedge_{i \in I} x_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (a \to x_i).$$

Si $(H, \leq)$ est un treillis complet, alors les égalités précédents ont lieu pour tout famille d'élément de H.

Dans la suite, nous allons illustrer l'usage (l'applicabilité) des remarques de 1.2 et du théorème 1.9, pour démontrer certains résultats concernant les algèbres de Heyting.

1.11. Théorème. *Soient x, y, z des éléments d'une algèbre de Heyting $(H, \leq, \to)$. Alors les égalités suivantes ont lieu:*

1°. $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z)$

2°. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

3°. $(x \wedge y) \to z = x \to (x \to z)$

Preuve. En tenant compte des remarques 1.02 et du théorème 1.5 on a:

1°. Pour tout a de H on a successivement: $H(x \wedge (y \vee z), a) \simeq H(y \vee z, x \to a) \simeq H(y, x) \to a) \times H(z, x \to a) \simeq H(x \wedge y, a) \times H((x \wedge y) \vee (x \wedge z), a)$ et l'égalité 1° résulte en vertu de 1.2: 3°.

2°. $H((x \vee y) \wedge (x \vee z), a) \simeq H(x \vee x, (x \vee y) \to a) \simeq H(x \vee z, (x \to a) \wedge (y \to a) \simeq H(x \vee z, x \to a \times x H(x \vee z, y \to a) \simeq H(x \wedge (x \vee z), a) \times H(y \wedge (x \vee z), a) \simeq H(x, a) \times H(y \wedge x \vee y \wedge z, a) \simeq (H(x, a) \times H(y \wedge x, a)) \times H(y \wedge z, a) \simeq H(x \vee (y \wedge x), a) \times H(y \wedge z, a) \simeq H(x, a) \times H(y \wedge z, a) \simeq H(x \vee (y \wedge z), a)$ et en vertu de 1.2: 3° la deuxième égalité en résulte.

3°. $H(a, x \to (y \to z)) \simeq H(x \wedge a, y \to z) \simeq H(z \wedge (x \wedge a), z) \simeq H((x \wedge y) \wedge a, z) \simeq H(a, (x \wedge y) \to z)$. Compte tenu de nouveau, de 1.2: 3°, l'égalité 3° en résulte.

1.12. Remarque. On démontre, [4], que si C est une catégorie cartésienne, [1.3], et A, B, C sont des objets de C, alors on a les isomorphismes

$$(*) \qquad 1^A \simeq 1, \ (B \times C) \simeq B^A \times C^A, \quad A^1 \simeq A, \ A^{B \times C} \simeq (A^B) \simeq (A^C)^B$$

et si, de plus, C possède un objet initial "0" et est aux sommes directes finies, alors

$$0 \simeq 0 \times A, \ A^0 \simeq 1, \ A^{B+C} \simeq A^B \times A^C$$

Soit B la catégorie associée à l'algèbre de Heyting, $(H, \leq, \to)$. En vertu des résultats 1.5; 1.8; 1.9, H et une catégorie cartésienne avec un objet initial 0 et aux sommes directes finies. Alors, compte tenu du fait que les seuls isomorphismes de H sont des morphismes identiques, aux isomorphismes ci dessus correspondent les égalités suivantes:

$$a \to 1 = 1; \ a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c);$$

$$1 \to a = a; \ (b \wedge c) \to a = c \to (b \to a) = b \to (c \to a)$$

$$0 = 0 \wedge a; \ 0 \to a = 1; \ (b \vee c) \to a = (b \to a) \wedge (c \to a)$$

pour tous a, b, c de H. Les deux dernières égalités résultent également du fait que le foncteur contravariant $- \to a : H \to H$ étant adjoint à gauche de lui même transforme les objets initiaux (resp. les sommes directs) dans objets finaux (resp. dans des produits directs).

2. Limites dans la catégorie HA

Dans tout ce paragraphe, HA désigne la catégorie des algèbres de Heyting qu'on a d'ejà définie dans le paragraphe précédent et on convient d'écrire le plus souvent "algèbre" au lieu de "algèbre de Heyting".

2.1. Théorème. *la catégorie HA est aux produits directs quelconques.*

Preuve. soient I un ensemble quelconque, $F = \{(H_i, \leq, \to)\}_{i \in I}$ une famille d'algèbres index5 par I et $(\prod_{i \in I} H_i, (p_i)_{i \in I})$ le produit direct dans Ens pour la famille d'ensembles $\{H_i\}_{i \in I}$. L'ensemble $\prod_{i \in I} H_i$ sera muni d'une relation d'ordre "$\leq$" si pour toute paire d'éléments $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} H_i$ on définit $x \leq y$ ssi $x_i \leq y_i$ dans $(H_i, \leq)$ pour tout i de I.

Par rapport à cette relation, $(\prod_{i\in I} H_i, \leq)$ est un treillis pour lequel, $x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_{i\in I}$ et $x \vee y = (x_i \vee y_i)_{i\in I}$.

Si $a = (a_i)_{i\in I}$, $B = (b_i)_{i\in I}$ sont des éléments de $\prod_{i\in I} H_i$ et $a \to b = (a_i \to b_i)_{i\in I}$ on vérifie aisément que pour tout $x = (x_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} H_i$ on a une équivalence logique $a \wedge x \leq b$ ssi $x \leq a \to b$.

L'élément $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} H_i$ pour lequel ε_i est l'élément initial du treillis $(H_i, \leq)$ est l'élément initial dans $(\prod_{i\in I} H_i, \leq)$ et par conséquent, $(\prod_{i\in I} H_i, \leq, \to)$ est une algèbre de Heyting. Il est évident que l'application d'ensembles $p_i : \prod_{i\in I} H_i \to H_i$ est un homomorphisme d'algèbre de $(\prod_{i\in I} H_i, \leq, \to)$ dans $(H_i, \leq, \to)$ pour tout $i \in I$. Le couple $((\prod_{i\in I} H_i, \leq, \to); (p_i)_{i\in I})$ est un produit direct de la famille $\underline{H}$ dans HA et donc, on en déduit le résultat annoncé.

2.2. Théorème. *La catégorie HA est aux noyaux de flèche double.*

Preuve. Il s'agit de montrer que si $f, g : (H, \leq, \to) \to (H', \leq, \to)$ sont deux morphismes dans HA, alors il existe un couple (K, σ) pour lequel K est une algèbre Heyting, $\sigma : K \to H$ un morphisme dans HA tel que si $h : K' \to H$ est un homomorphisme d'algèbre tel quel $fh = gh$, alors il existe un homomorphisme h' de K' dand K et un seul tel que $\sigma h' = h$.

En effet, il suffit de considerer $K = \{x \in H \mid f(x) = g(X)\}$ qui est une sous-algèbre de H et $\sigma : K \to H$ comme étant l'inclusion de K dans H.

2.3. Théorème. *La catégorie HA est aux limites projectives quelconques.*

Preuve. Il est bien connu, [4], que toute catégorie aux produits directs quelconques et aux noyaux de flèche double est aux limites projectives quelconques. De même, nous donnons une esquisse de la construction de telles limites dans HA.

Soit $F : I \to HA$ un foncteur covariant pour lequel I est une catégorie petite. On désigne par $Fl(I)$ l'ensemble des flèches (c'est à dire des morphismes) de I et pour f de $Fl(I)$ on note $s(f)\ (= s_f)$ (resp. $c(f)\ (= c_f)$) la source (resp. l'adresse) de f.

Si $(\prod_{i\in I} F(i); (p_i)_{i\in I})$ et $(\prod_{i\in I} F(C_f); (q_f)_{f\in Fl(I)})$ sont des produits directs dans HA, alors pour tout f de $Fl(I)$, existent deux morphismes

$$\prod_{i\in I} F(i) \underset{F(f)s_f}{\overset{p_{c(f)}}{\rightrightarrows}} F(C_f)$$

et en vertu de la propriété d'universalité d'un produit direct existent deux morphismes

$$\prod_{i\in I} F(i) \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \prod_{f\in Fl(I)} (C_f)$$

qui sont uniquement déterminés, vérifiant, respectivement, les relations:

$$q_f \circ v = p_{c(f)}, \quad q_f \circ v = F(f) \circ p_{s(f)}$$

pour tout f de $Fl(I)$.

Enfin, si $(K, \sigma) = \ker(u, v)$, alors le couple $(K; (p_i \circ \sigma)_{i\in I})$ est une limite projective du foncteur F.

D'une manière analogue on démontre le théorème pour le cas où F est contravariant.

2.4. Théorème. *La catégorie HA est aux produits fibrés quelconques.*

Preuve. Il s'agit, évidemment, d'un cas paticulier du théorème précédent. Plus précisemment, soient

$$H' \to^f H \leftarrow^g H''$$

un diagramme dans HA et $H' \leftarrow^{p'} H' \times H'' \to^{q'} H''$ le produit direct des algèbres H' et H''. Si $K = \{(x', x'') \in H' \times H''$ if $(x') = g(x'')\}$ et p', q' sont respectivement, les restrictions des applications p, q à K, alors le diagramme $H' \leftarrow^{p'} K \to^{q'} H''$ définit un produit fibré, dans HA, pour le diagramme $(*)$.

2.5. Définition. *Un ensemble préordonné $(I, \leq)$ est dit filtrant (croissant, où à droite) si tout couple (i, j) d'éléments de I possède un majorant, i.e., il existe $k \in I$ tel que $i \leq k$ et $j \leq k$.*

Si $(I, \leq)$ est un ensemble filtrant, alors toute partie finie de I a un majorant.

2.6. Théorème. *la catégorie HA est aux limites inductives filtrantes.*

Preuve. Soit $F : I \to HA$ un foncteur covariant pour lequel I est la catégorie associée à l'ensemble filtrant, $(I, \leq)$. Si f_{ji} est l'image par F du morphisme $(i, j) : i \to j$, $i \leq j$, alors les relations suivantes sont vérifiées.

(1) $f_{ii} = 1_{F(i)}$, $i \in I$

(2) $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$, si $i \leq j \leq k$

Soit $(S = \coprod F(i); (\sigma_i)_{i \in I})$ la somme directe dans En. de la famille d'ensembles $(F(i))_{i \in I}$ où $S = \cup(\{i\} \times F(i))$; les éléments de S sont des couples (i, x) pour lesquels $i \in I$ et $x \in F(i)$. On obtient sur S une relation de préordre, "$\leq$" si pour $(i, x), (j, y)$ de S on définit $(i, x) \leq (j, y)$ ssi il existe un majorant k de i et j tel que $f_{ki}(x) = f_{kj}(y)$.

En effet, tout d'abord, il est clair que la relation "$\leq$" est reflexive.

Si $(i, x) \leq (j, y)$ et $(j, y) \leq (k, z)$ existent $k_1, k_2 \in I$ tels que $i, j \leq k_1$, $j, k \leq k_2$ et de plus,

(a) $f_{k_1 i}(x) \leq f_{k_1 j}(y)$

(b) $f_{k_2 j}(x) \leq f_{k_2 k}(z)$

Soit $k_0 \in I$ tel que $k_1, k_2 \leq k_0$. Les applications $f_{k_0 k_1}, f_{k_0 k_2}$ étant monotones, en vertu de (a) et (b) et en tenant compte de 2° on a

$$f_{k_0 i}(x) \leq f_{k_0 j}(y) \quad \text{et} \quad f_{k_0 j}(y) \leq f_{k_0 k}(z)$$

Il en résulte qu'il existe $k_0 \in I$ tel que $i, k \in k_0$ et $f_{k_0 i}(x) \leq f_{k_0 k}(z)$; il en résulte que la relation "$\leq$" est transitive et donc, est une relation de préordre.

Soient $(i, x), (j, y)$ des éléments de S tels que $(i, x) \leq (j, y)$ et $(j, y) \leq (i, x)$. Il existe $k_1, k_2 \in I$ avec $i, j \leq k_1$, et $j, i \leq k_2$ et telle que

(a)' $f_{k_1 i}(x) \leq f_{k_1 j}(y)$

(b)' $f_{k_1 j}(y) \leq f_{k_2 i}(x)$

Si $k_0 \in I$ et tel que $k_1, k_2 \leq k_0$ alors en tenant compte des relations précédents et d'après 2°, on a

$$f_{k_0 i}(x) \leq f_{k_0 j}(y)$$

D'où, on a l'égalité, $f_{k_0 i}(x) = f_{k_0 j}(y)$.

On désigne par "$\sim$" l'équivalence sur S associée à la relation de préordre "$\leq$" c.a.d. l'équivalence définie par, $(i, x) \sim (j, y)$ ssi $(i, x) \leq (j, y)$ et $(j, y) \leq (i, x)$ ssi $(\exists k \in I)\ (i, j \leq k)\ (f_{ki}(x) = f_{kj}(y))$.

La classe d'équivalence du représentant (i, x) sera notée $cls(i, x)$.

Sur l'ensemble quotient, $S/_\sim$, on obtient une relation d'ordre "$\leq$", si pour $(i, x), (j, y) \in S$ on définit

$$cls(i, x) \leq cls(j, y) \iff (i, x) \leq (j, y) \iff$$

$$(\exists k \in I)(i, j \leq k) \wedge f_{ki}(x) \leq f_{kj}(x))$$

Nous voulons démontrer que si $(i, x), (j, y) \in S$ et $k, k' \in I$ sont des majorants pour i, j, alors:

$$(k, f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y) \sim (k', f_{k'i}(x) \wedge f_{k'j}(y)).$$

En effet, pour $k'' \geq k, k'$ on a:

$$f_{k''k}(f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y)) = f_{k''i}(x) \wedge f_{k''j}(y) \quad \text{et}$$

$$f_{k''k}(f_{k'i}(x) \wedge f_{k'j}(y)) = f_{k''i}(x) \wedge f_{k''j}(y)$$

et en vertu de la même définition (*) il résulte que la classe d'équivalence du représentant $(k, f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y))$ est la même pour tout majorant commun de i et j.

D'une manière analogue on démontre que les classes d'équivalences des représentants $(k, f_{ki}(x) \vee f_{kj}(y)$ et $(k, f_{ki}(x) \to f_{kj}(y))$ sont indépendants du choix du majorant commun k de i et j.

Nous allons démontrer que si $(i, x), (j, y), (j', y') \in S$ et $(j, y) \sim (j', y')$ alors

(1) $$(k, f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y)) \sim (k', f_{k'i}(x) \wedge f_{k'j}(y))$$

où k (resp. k') est un majorant commun de i et j (resp. i, j').

En effet, tout d'abord, compte tenu de la définition de "$\sim$", il existe $k_0 \in I$ tel que $j, j' \leq k_0$ et

(2) $$f_{k_0 j}(y) = f_{k_0 j'}(y')$$

Puisque $(I, \leq)$ est filtrant croissant, il existe $k'' \in I$ majorant commun pour k', k, k_0 et on a, donc:

$$i, j \leq k \leq k''; \quad i, j' \leq k \leq k''; \quad j, j' \leq k_0 \leq k''$$

En vertu de la remarque ci-dessus on a:

(3) $$(k, f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y)) \sim (k'', f_{k''i}(x) \wedge f_{k''j}(y))$$

$$(4) \qquad (k', f_{k'j}(x) \wedge f_{k'j}(y')) \sim (k'', f_{k''i}(x) \wedge f_{k''j}(y'))$$

En comptant à gauche dans l'égalité (2) par $f_{k''k_0}$ on obtient $f_{k''j}(y) = f_{k''j}(y')$ et par conséquent, compte tenu des relations (3) et (4) il résulte l'équivalence (1). Donc, on obtient sur l'ensemble quotient $S/_\sim$ une opération "$\wedge$" si on pose

$$cls(i,x) \wedge cls(j,y) = cls(k, f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y))$$

D'une manière analogue on définit

$$cls(i,x) \vee cls(j,y) = cls(k, f_{ki}(x) \vee f_{kj}(y)) \quad \text{et}$$

$$cls(i,x) \to cls(j,y) = cls(k, f_{ki}(x) \to f_{kj}(y))$$

où k est un majorant commun de i et j, dans $(I, \leq)$.

De plus, $cls(k, f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y))$ (resp. $cls(k, f_{ki}(x) \vee f_{kj}(y))$ et une borne inférieure (resp. supérieurement) le couple $(cls(i,x), cls(j,y))$ dans $(S/_\sim, \leq)$.

Soit $\eta : \coprod H_i \to \dfrac{\coprod H_i}{\sim}$; $(i,x) \mapsto cls(i,x)$.

Pour tout $i \in I$, l'application $\eta\sigma_i : H_i \to S/\sim$ est un morphisme d'algèbres Heyting.

En effet, compte tenu de la construction de l'algèbre $S/\sim$, si $x_i, y_i \in H_i$, on a:

$$(\eta\sigma_i)(x_i \wedge y_i) = \eta(i, x_i \wedge y_i) = cls(i, x_i \wedge y_i) = (cls(i, x_i)) \wedge (cls(i, y_i) =$$
$$= [(\eta\sigma_i)(x_i)] \wedge ((\eta\sigma_i)(y_i))$$

De la même façon on vérifie les autres conditions (axiomes) définissant un morphisme d'algèbres.

Nous allons démontrer que $(S/\sim, (\eta\sigma_i)_{i\in I})$ est une limite inductive du foncteur F. Il s'agit de montrer que si $v_i : H_i \to H$, $i \in I$, sont des morphismes d'algèbres tels que

$$v_j f_{ji} = u_i$$

si $i \leq j$, alors il existe un unique morphisme d'algèbres $u : S/\sim \to H$ tels que $u(\eta\sigma_i) = u_i$ pour tout i de I.

On considère le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
H_i \arrow[r, "f_{ji}"] \arrow[d, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "u_i"] & H_j \arrow[d, "v_j"] \\
S = \coprod_{i\in I} H_i \arrow[r, dashed, "v"] \arrow[d, "\eta"'] & H \\
S/\sim \arrow[ur, dashed, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

De la propriété d'universalité d'une somme directe il résulte qu'il existe une unique application $v : S \to H$ tels que $u\sigma_i = u_i$ pour tout i de I

Si $(i,x), (j,y)$ sont des éléments de S tels que $(i,x) \sim (j,y)$, alors il existe $k \in I$, un majorant commun de i et j et de plus $f_{ki}(x) = f_{kj}(y)$. De l'égalité précédente il résulte que $u_k(f_{ki}(x)) = u_k(f_{kj}(y))$ est en vertu des relations $(*)$ on a, $u_i(x) = u_j(x)$.

Par suite, on obtient une application $u : S/\sim \to H$ si on définit $u(cls(i,x)) = u_j(y)$.

Si $x \in H_i$, alors $u((\eta\sigma_i)(x)) = u(cls(i,x)) = u_i(u)$ et donc les relations 2 sont vérifiées pour tout $i \in I$.

L'applications v est déterminée de manière unique par la propriété ci-dessus car η est surjective et la famille $(u_i)_{i\in I}$ est épimorphique. Il reste à montrer que u est un morphisme d'algèbres.

Compte tenu du fait que u_k est morphisme d'algèbres et des relations 1, on a successivement:

$$u(cls(i,x)) \wedge cls(j,y)) = u(cls(k, f_{ki}(x) \wedge f_{kj}(y)) = u_k(f_{ki} \wedge f_{kj}(y)) =$$
$$= u_k f_{ki}(x) \wedge u_k f_{kj}(y) = u_i(x) \wedge u_j(y) = u(cls(i,x) \wedge u(cls(j,y))$$

Par suite, $u(cls(i,x) \wedge cls)j,y)) = u(cs(i,x)) \wedge u(cls(j,y))$.

D'une manière analogue, on vérifie les autres conditions pour que u soit un morphisme d'algèbres.

Remarque. L'application v du diagramme 1 est monotone.

En effet, si $(i,x) \leq (j,y)$, alors il existe $k \in I$ un majorant commun de i et j tel que $f_{ki}(x) \leq f_{kj}(y)$. Compte tenu du fait que u_k est monotone et des relations 1 on a successivement

$$v(i,x) = v\sigma_i(x) = u_i(x) = u_k f_{ki}(x) \leq u_k f_{kj}(y) = v_j(y) = v\sigma_j(y) = v(j)$$

et donc $v(i,x) \leq v(j,y)$. Puisque "$\sim$" est l'équivalence associée à la relation de préordre "$\leq$" considérée sur S $(S/\sim, \leq)$ est ordonné, aussi, il existe une unique application monotone u telle que $u\eta = v$.

REFERENCES

1. J o h n s t o n, P.T. *Topos Theory*, Academic Press, 1977.
2. L a f o n, J.-P. *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative*, Hermann, 1974.
3. R a d u, Al.Gh. *Teoria toposurilor*, vol.I, Ed. Acad. Română, 1981.
4. R a d u, Gh. *Algebra categoriilor şi functorilor*, Ed. Junimea, 1988.

Department of Mathematics
University of Iaşi
6600 Iaşi
ROMANIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matematică, 1994, f.1

SOME KINDS OF APPROXIMATE EFFICIENT POINTS AND ITS APPLICATIONS TO THE VECTORIAL OPTIMIZATION THEORY WITH MULTIFUNCTIONS

BY

CRISTINA GHERMAN

0. The approximate extremum points and the approximate subdifferential of a convex function have been proved to be a useful tool in real and vectorial analysis from the theoretical viewpoint as well as for practical purposes.

The vectorial optimization problems have been studied specially in finite dimensional spaces having in view to establish necessary, sufficient or necessary and sufficient conditions for the existence of the solutions and to obtain duality results for vectorial optimization programs with multivalued objective mappings. Thus, for example, T. T a n i n o and Y. S a w a r a g i in [8],[9] constructed and developed a duality theory for multiobjective optimization problems and H. K a w a s a k i [5] extended their results using the concepts of "subdiferential" and "conjugate" for multifunctions from a linear space to $R^n_\leq$. For optimization problems with the objective maps taking values in order complete vector lattices then are some notable results in the monographies [2], [5].

In general vectorial ordered spaces, the optimization problems are strongly related with the efficient points of sets. There are some existence results for this in [2], [6].

In [2] the efficient points are presented in connection with the study of the vectorial subdifferential for multifunctions.

This paper intends to present the natural extensions of the *approximate efficient points* and the *approximate vectorial subdifferential* for multifunctions with their general properties.

1. In what follows $(Z, \leq)$ will denote a real vector space ordered by a convex cone Z_+. We suppose that Z_+ is pointed, i.e.