Leray system, a Cauchy problem. If the initial data are sufficiently regular, the theorem of Leray shows that:

Theorem 5.1. *In the previous assumptions the Cauchy problem for the system* (1)—(5) *has one and only one solution* $(g^{\alpha}_{\beta}, \rho, u^{\alpha}, E^{(r)}, S^{\alpha})$.

To prove that $(g_{\alpha\beta}, \rho, u^{\alpha}, E^{(r)}, S^{\alpha})$ gives a solution of the system (5.1)—(5.5), let us observe that, after a reason given in [7], if the Cauchy data are analytic, the system defined by these equations has, under our assumptions, one and only one solution, which satisfies necessarily the system (1)—(5) and, according to the choice of the adopted Cauchy data, coincides with the solution of this system given by theorem of Leray. By passing to limit it shows that this last solution satisfies the system (5.1)—(5.5), when the data are not assumed to be analytic, but only sufficiently differentiable.

REFERENCES

1. Fourès-Bruhat Y. — *Théorèmes d'Existence en Mécanique des Fluides Relativistes*, Bull. Soc. Math. France, 86, 1958, pp. 155—175.
2. Lichnerowicz A. — *Théorèmes d'existence et d'unicité pour un fluid thermodynamique relativiste*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, pp. 3291—3295.
3. Leray J. — *Hyperbolic differential equations*, Lecture Notes, Institute for Advanced Study. Princeton, 1953.
4. Procopiuc Gh. — *The Equations of Radiation Field. Invariance Groups*, An. şt. Univ. Iaşi, t. XXIV, f. 2, s. I a, 1978, pp. 389—398.
5. Pomraning G. C. — *The Equations of Radiation Hydrodynamics*, Pergamon Press, New York, 1973.
6. Lichnerowich A. — *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Eclctromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
7. Lichnerowich A. — *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, W. A. Benjamin, New York, 1967.

Received 21. V. 1979

Departament of Mathematics
Polytechnic Institute, Iaşi
R. S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Supliment la tomul XXV, s. I a 1979
Cu ocazia centenarului naşterii Acad. Prof. A. Myller

SUR LES FLOTS DYNAMIQUES

BY

ELEONOR CIUREA

1. Formulation du problème. Soit $G=(N, A)$ un graphe connexe dont N est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs. A chaque arc $(x, y)\in A$ on attache les nombres entiers positifs $h(x, y)$ et $c(x, y; t)$ qui représentent le temps de parcours et respectivement la capacité au moment t.

On note par s la source et avec d le puits du réseau G.

Le problème du flot dynamique maximal pour p périodes de temps peut être formulé de la manière suivante: Déterminer les flux $f(x, y; t)$ qui doivent satisfaire:

$$\sum_{t=0}^{t=p}\sum_{y\in N}(f(s, y; t)-f(y, s; t-h(y, s)))=v(p), \tag{1 a}$$

$$\sum_{y\in N}(f(x, y; t)-f(y, x; t-h(y, x)))=0, \tag{1b}$$

$$(x\neq s, d; \quad t=0, j, \ldots, p),$$

$$\sum_{t=0}^{t=p}\sum_{y\in N}(f(d, y; t)-f(y, d; t-h(y, d)))=-v(p) \tag{1 c}$$

$$0\leqslant f(x, y; t)\leqslant c(x, y; t); \; t=0, 1, \ldots, p-h(x, y), \tag{1 d}$$

$$\max v(p) \tag{2}$$

Si $f(x, y; t)$ et $v(p)$ satisfont à (1), on dit que $f(t)$ est un flot dynamique de s à d en G pour p périodes avec la valeur $v(p)$. Si, de plus $v(p)$ est maximal, alors $f(t)$ est un flot dynamique maximal en G pour les p périodes.

Lorsque les capacités se conservent dans le temps, autrement dit pour chaque arc $(x, y)\in A$ on a

$$c(x, y; t)=c(x, y), \; t=0, 1, \ldots, p-h(x, y). \tag{3}$$

Ford et Fulkerson [2], ont généré un flot dynamique maximal en G, en partant d'un flot statique de G. Dans le cas général, les auteurs ont montré qu'un flot dynamique en G est équivalent au flot statique dans un réseau agrandi $G(p)=(N(p), A(p))$.

La construction du réseau $G(p)$ est la suivante: (i) pour chaque sommet $x\in N$ on définit $p+1$ sommets $x(t)\in N(p)$, $t=0, 1, \ldots, p$ et p arcs

$$(x(t),\ x(t+1)) \in A(p),\ t=0,1,\dots,\ p-1\ ;$$

(ii) pour chaque arc $(x, y) \in A$ on définit $p+1-h(x, y)$ arcs

$$(x(t),\ y(t+h(x, y))) \in A(p),\ t=0,1,\dots,\ p-h(x, y)\ ;$$

(iii) les capacités des arcs de G sont :

(4 a) $$c(x(t),\ y(t+h(x, y)))=c(x, y\ ;\ t),\ t=0,1,\dots,\ p-h(x, y)$$

(4 b) $$c(x(t),\ x(t+1))=\infty,\ t=0,1,\dots,\ p-1.$$

Dans [1] on a remarqué qu'un flot dynamique en G pour p périodes, peut être examiné comme un flot statique dans un graphe agrandi $G_p(p)=(N_p(p),\ A_p(p))$ généré par les chemins de G, de la source au puits, chemins pour lesquels le temps de parcours est inférieur ou égal à p.

La construction du réseau $G_p(p)$ est la suivante :

(i) soit $T(s, x)$ la valeur du plus court chemin de s à x et $T(x, d)$ la valeur du plus court chemin de x à d en G ;

(ii) si $T(s, x)+T(x, d)>p$, on élimine le sommet x ; soit N_p l'ensemble des sommets restants ;

(iii) si $T(s, x)+h(x, y)+T(y, d)>p$, on élimine l'arc (x, y) ; soit A_p l'ensemble des arcs restants ;

(iv) on construit alors le graphe $G_p(p)$ de la façon suivante :

— chaque sommet $x \in N_p$, on définit $q(x)=p+1-(T(s, x)+T(x, d))$ sommets, $x(t) \in N_p(p)$, $t=T(s, x),\dots, p-T(x, d)$ et $q(x)-1$ arcs $(x(t),\ x(t+1))$, $t=T(s, x),\dots,\ p-1-T(x, d)$;

— pour chaque arc $(x, y) \in A_p$, on définit $a(x, y)=p+1-(T(s, x)+h(x, y)+T(y, d))$ arcs $(x(t),\ y(t+h(x, y)))$, $t=T(s, x),\dots,\ p-h(x, y)-T(y, d)$;

— les capacités des arcs de $G_p(p)$ sont :

(5 a) $$c(x(t),\ y(t+h(x, y)))=c(x, y\ ;\ t)\ ;\ t=T(s, x),\dots,\ p-h(x, y)-T(y, d)$$

(5 b) $$c(x(t),\ x(t+1))=\infty,\ t=T(s, x),\dots,p-1-T(x, d)$$

Dans le paragrahe suivant on va faire quelques considérations sur les graphes $G(p)$ et $G_p(p)$.

2. Considérations sur les graphes agrandis G(p) et G_p(p). La définition de $T(s, x)$ implique que $T(s, d)$ est la valeur du plus court chemin par rapport au temps de la source s au puits d dans le réseau G.

Soit $G'_p=(N, A'_p)$ le graphe obtenu de $G=(N, A)$ par l'élimination des arcs $(x, y) \in A$ pour lesquels

(6) $$h(x, y)>p$$

Ainsi, n'importe quel arc et sommet de $G'_p=(N, A'_p)$ se multiplie en $G(p)=(N(p),\ A(p))$ et n'importe quel arc et sommet de $G_p=(N_p, A_p)$ se multiplie en $G_p(p)=(N_p(p),\ A_p(p))$.

Soit $|N|=n$, $|A|=m$, $|A'_p|=m'$, $|N(p)|=n(p)$, $|A(p)|=m(p)$, $|N_p|=n_p$, $|A_p|=m_p$, $|N_p(p)|=n_p(p)$, $|A_p(p)|=m_p(p)$.

Aussi, soit

(7) $$K=p+1-T(s, d)$$

et

(8) $$D_p=\sum_{A'_p} h(x, y)$$

Si $p<T(s, d)$, alors, par définition $q(x)=0$, $x \in N_p$, $a(x, y)=0$, $(x, y) \in A_p$, $k=0$.

Lemme 1. *Pour n'importe quel sommet $x \in N_p$, $q(x) \leqslant k$ et n'importe quel arc $(x, y) \in A_p$, $a(x, y) \leqslant k$.*

Démonstration. On a $q(x)=p+1-(T(s, x)+T(x, d))$, $a(x, y)=p+1-(T(s, x)+h(x, y)+T(y, d))$ et $T(s, x)+T(x, d) \geqslant T(s, d)$, $T(s, x)+h(x, y)+T(y, d) \geqslant T(s, d)$, d'où $q(x) \leqslant k$, $a(x, y) \leqslant k$.

Lemme 2. *Si $p<T(s, d)$, alors le flot dynamique de G, pour les p périodes est zéro.*

Démonstration. Si $p<T(s, d)$ on a $N_p=\varnothing$ et $A_p=\varnothing$ d'où il résulte que le flor dynamique pour les p périodes est zéro.

Lemme 3. *On a $m'_p \leqslant D_p \leqslant pm'_p$.*

Démonstation. Cette affirmation résulte du fait que, pour n'importe quel arc $(x, y) \in A'_p$ on a $1 \leqslant h(x, y) \leqslant p$.

Remarques. 1) $D_p=m'_p$, si et seulement si pour n'importe quel arc $(x, y) \in A'_p$ on a $h(x, y)=1$.

2) $D_p=pm'_p$, si et seulement si n'importe pour quel arc $(x, y) \in A'_p$ on a $h(x, y)=p$. Dans ce cas on a $k \leqslant 1$.

Lemme 4. *Pour le graphe $G(p)=(N(p),\ A(p))$ on a $n(p)=(p+1)n$ et $m(p)=p(m'_p+n)+m'_p-D_p$.*

Démonstration. Chaque sommet $x \in N$ se multiplie $(p+1)$ fois, donc $n(p)=(p+1)\ n$. Chaque arc $(x, y) \in A'_p$ se répète $(p+1-h(x, y))$ fois, donc le nombre total des arcs, après la multiplication est $(p+1)\ m'_p-\sum_{A'_p} h(x, y)=(p+1)\ m'_p-D_p$. Il y a pn arcs $(x(t),\ x(t+1))$. Ainsi $m(p)=p(m'_p+n)+m'_p-D_p$.

Remarques. 1) En tenant compte du Lemme 3, on a $m'_p+p \cdot n \leqslant m(p) \leqslant p \cdot (m'_p+n)$. Les égalités ont lieu si et seulement si les conditions de la remarque du Lemme 3 sont accomplies.

2) Dans [2], on montre que les arcs $(x(t),\ x(t+1))$, $t=0,1,\dots,p-1$, avec $x \neq s, d$ ne sont pas nécessaires pour obtenir le flot dynamique maximal. Dans ces cas $m(p)=(m'_p+2)\ p+m'_p-D_p$.

Lemme 5. *Pour le graphe $G_p(p)=(N_p(p),\ A_p(p))$ on a $n_p(p)=\Sigma_{N_p} q(x) \leqslant nk$ et $m_p(p)=\Sigma_{A_p} a(x, y)+\Sigma_{N_p}(q(x)-1) \leqslant km'_p+(k-1)\ n_p$.*

Démonstration. Chaque sommet $x \in N_p$ se multiplie $q(x)$ fois donc $m_p(p)=\Sigma_{p,N} q(x)$. Du Lemme 1 et $n_p \leqslant n$ on a $n_p(p) \leqslant nk$. Chaque arc $(x, y) \in A_p$ se répete $a(x, y)$ fois, donc le nombre des arcs après les répétitions est $\Sigma_{A_p} a(x, y)$. Le nombre des arcs $(x(t),\ x(t+1))$ est $\Sigma_{N_p}(q(x)-1)$, donc $m_p(p)=\Sigma_{A_p} a(x, y)+\Sigma_{N_p}(q(x)-1)$. Du Lemme 1 et $m_p \leqslant m'_p$ on a $m_p(p) \leqslant km'_p+(k-1)\ n_p$.

Remarques. 1) On a $n_p(p)=nk$ seulement si $n_p=n$ et $q(x)=k$ pour n'importe quel $x \in N_p$. Aussi $m_p(p)=km'_p+(k-1)\ n_p$ seulement si $m_p=m'_p$ et $a(x, y)=q(x)=k$ pour n'importe quel arc $(x, y) \in A_p$ et $x \in N_p$.

2) Si en $G_p(p)$ on ne considère pas les arcs $(x(t),\ x(t+1))$ avec $x \neq s, d$, alors $m_p(p)=\Sigma_{A_p} a(x, y)+2\ (k-1) \leqslant km'_p+2\ (k-1)$.

Lemme 6. *On a* $n(p)-n_p(p)\geq(p+1-k)\,n$ *et* $m(p)-m_p(p)\geq p.n$.

Démonstration. Conformément aux Lemmas 4 et 5 on a $n(p)-n_p(p)=(p+1)\cdot n-\Sigma_{x_p}q(x)\geq(p+1)\cdot n-n\cdot k=(p+1-k)\cdot n$ D'une manière analogue $m(p)=m_p(p)=p\cdot(m'_p+n)=m'_p-D_p-\Sigma_{A_p}a(x,y)-\Sigma_{x_p}(q(x)-1)\geq p\cdot(m'_p+n)+m'_p-D_p-k\cdot m'_p-(k-1)\cdot n_p\geq(m'_p+n)-p\cdot m'_p=p\cdot n$.

Remarques. 1) On a $n(p)-n_p(p)=(p+1-k)n$ seulement si $n_p(p)=nk$.

2) On a $m(p)-n_p(p)=pn$ seulement si $m(p)=m'_p+pn$ et $m_p(p)=m'_p$.

De ces remarques, il résulte que les égalités sont réalisées dans des cas totalement particuliers.

Du Lemme 6 il résulte le .

Théorème. *Le graphe* $G_p(p)$ *est tojours un sous-graphe partiel de* $G(p)$.

3. Exemples On considère le graphe de la figure 1 où, sur chaque arc est inscrit un entier positif, au representet le temps de parcurs.

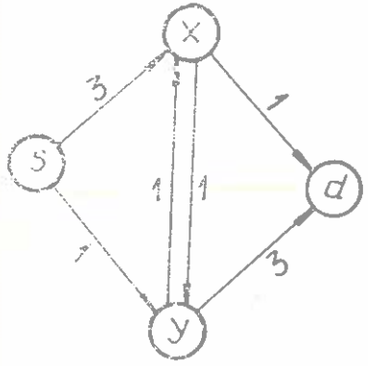

Fig. 1

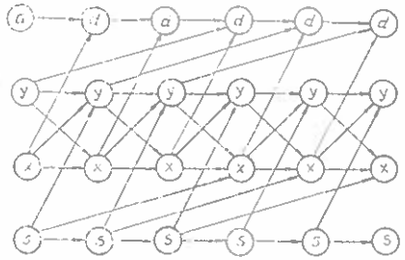

Fig. 2

Si on fixe le nombre des périodes de temps à $p=5$, alors $n(p)=24$, $m(p)=46$, $n_p(p)=12$, $m_p(p)=21$. Le graphe $G(5)$ est représenté dans la figure 2 et le graphe $G_n(5)$ dans la figure 3.

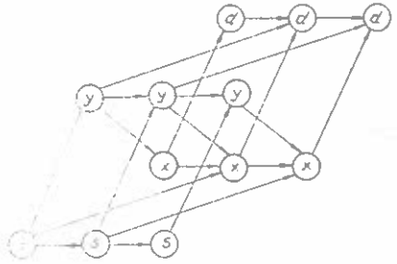

Fig. 3

Dans le tableau 1 on a considéré deux graphes, qui diffèrent par les temps de parcours. Chaque graphe est caractérisé par la matrice des temps $H=[h_{ij}]$, où $k_{ij}=0$ si $(i,j)\overline{\in}A$ et $h_{ij}>0$ si $(i,j)\in A$.

Tableau 1

$n=4$, $m=6$

$$H=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

p	0	1	2	3	4	5	6	7
n(p)	4	8	12	16	20	24	28	32
$n_p(p)$	0	0	0	4	8	12	16	20
m(p)	0	8	16	26	36	46	56	66
$m_p(p)$	0	0	0	3	12	21	30	39

$n=4$, $m=6$

$$H=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

p	7	8	10	11	13	14	16	17
n(p)	32	36	44	48	56	60	68	72
$n_p(p)$	0	3	9	13	21	25	33	37
m(p)	45	55	75	85	105	115	135	145
$m_p(p)$	0	2	12	19	35	44	62	72

$n=11$, $m=21$

$$H=\begin{array}{c|ccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

p	10	12	14	16	18	20	23	26
n(p)	121	143	165	187	209	231	264	297
$n_p(p)$	0	5	17	40	50	69	100	133
m(p)	248	312	376	440	504	568	664	760
$m_p(p)$	0	4	28	73	105	159	234	329

BIBLIOGRAPHIE

1. Ciurea E. — *Deux Remarque sur le Flot Dynamuique Maximal Coût Minimal*, R.A.I. R.O.V. 3, 1979.
2. Ford L. R., J. R. and Fulkerson D. R. — *Flow in Networks*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962.

Reçu le 7. XI. 1979

Faculté de Mathématiques
Université de
Braşov, R.S. România