$$\{u^{h+t}\, a_{h+t}\} \subseteq \{u^{h+j}\, b_{h+j}\}. \tag{31}$$

This relation implies

$$a_{h+t} = \beta^{h+s}_{h+t}\, F(a_{h+s}) \quad (t, s = 1, \ldots, r-h). \tag{32}$$

Conversely, the image of (28) corresponds to it by parallelism of generators, if

$$F(a_{h+t}) = \gamma^{h+t}_{h+i}\, a_{h+i}. \tag{33}$$

The tangent manifold in a point u of the manifold (30) is:

$$y = F(x_0(u^1, \ldots, u^h)) + \rho^i \frac{\partial F(x_0(u^1, \ldots, u^h))}{\partial u^i} + \sigma^{h+j} F(a_{h+j}), \tag{34}$$

$$(i = 1, \ldots, h; \quad j = 1, \ldots, r-h).$$

The tangent manifold (29) is parallel to (34), if

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u^i} &= \rho^i \frac{\partial F(x_0(u^1, \ldots, u^h))}{\partial u^i} + \psi^{h+j} F(a_{h+j}), \\ a_{h+j} &= \sigma^i \frac{\partial F(x_0(u^1, \ldots, u^h))}{\partial u^i} + \tau^{h+j} F(a_{h+j}). \end{aligned} \right. \tag{35}$$

9. In Euclidean linear spaces, many concepts and researches of Al. Myller in [1] for E_3 could be extended; for example we may consider the conic curvature of a curve on a surface, cylindric lines and so on.

REFERENCES

1. Myller Al. — *La transformation par plans tangents parallèles*, Bull. Sciences Math., 52 (1928).
2. Peterson K.M. — *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes*, Mat. Sbornik, 1 (1866).
3. Creangă I., Haimovici C. — *Asupra ecuației matriceale XA = YX*. (I) Studii și cercetări științifice. Matematică. XIII, fasc. 1, 1962.
4. Creangă I., Haimovici C. — *Asupra ecuației matriceale XA = XY*. (II), Studii și cercetări științifice. Matematică, XIV, fasc. 2, 1963.
5. Creangă I. — *Sur une famille de transformations entre deux surfaces reglées*. Bul. Inst. Politehnic „Gh. Asachi", Iași, 2, fasc. 1, 1947.

Received 31.I. 1980

Faculty of Mathematics
University „Al. I. Cuza", Iași
R.S. România

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" Iași
Supliment la tomul XXV, s. I a 1979
Cu ocazia centenarului nașterii Acad. Prof. Al. Myller

CONNEXIONS FINSLERIENNES GÉNÉRALES PRESQUE SYMPLECTIQUES

PAR

GHEORGHE ATANASIU et IOAN GHINEA

Récemment, dans [2], on a déterminé la forme générale des connexions finsleriennes compatibles avec une structure presque symplectique et respectivement conforme presque symplectique. Ce travail, utilise la définition de la connexion finslerienne dans le fibré Finsler d'une variété différentiable M, donnée par le prof. M. Matsumoto [3], et une méthode mise en valeur par le prof. R. Miron [4] et utilisée avec succès dans [1], [5], [10], [2], [9]. La méthode a été pour la première fois appliquée par le prof. Radu Miron dans la détermination de toutes les connexions finsleriennes métriques [6]. Des résultats inédits concernant les connexions Finsler métriques vont paraître dans [7].

Dans la note ci-présente nous allons prouver qu'il existe une connexion finslerienne, définie sur M, de telle manière que la h-dérivée covariante et la v-dérivée covariante du champ finslerien du type (0,2) disons $g_{ij}(x, y)$, antisymétrique, nondégénéré, qui détermine la structure presque symplectique sur M, soient, respectivement, deux champs finsleriens K_{ijk}, Q_{ijk}, du type (0,3), qui remplissent les conditions d'antisymétrie dans les deux premiers indices.

1. Soit M_{2n} une variété C^∞-différentiable, de dimension $2n$.

Une connexion finslerienne [3], [7] sur M_{2n} est un triplet $(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk})$ qui à un changement de coordonnées et d'élément d'appui

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^{2n}), \qquad y^{i'} = \frac{\delta x^{i'}}{\partial x^j}\, y^j, \tag{1.1}$$

se transforme selon les formules

$$\begin{aligned} N^{i'}_{j'}(x', y') &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} N^i_j + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} y^k, \\ F^{i'}_{j'k'}(x', y') &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} F^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}, \\ C^{i'}_{j'k'}(x', y') &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} C^i_{jk}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

À l'aide des objets géométriques N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk} on peut définir la h-dérivée covariante et la v-dérivée covariante, qui, par exemple, pour un champ finslerien t^i_j du type (1, 1) ont, respectivement, les expressions

$$t^i_{j|k} = \frac{\delta t^i_j}{\delta x^k} + t^h_j F^i_{hk} - t^i_h F^h_{jk}, \tag{1.3}$$

$$t^i_{j\|k} = \frac{\partial t^i_j}{\partial y^k} + t^h_j C^i_{hk} - t^i_h C^h_{jk}, \tag{1.4}$$

où

$$\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - N^h_k \frac{\partial}{\partial y^h}.$$

2. Considérons sur M_{2n} une structure presque symplectique définie par un champ de tenseurs finsleriens du type (0,2), disons $g_{ij}(x, y)$ (y étant l'élément de support au point x), antisymétriques $[g_{ij}(x, y) = -g_{ji}(x, y)]$ et nondégénérés $[\det g_{ij}(x, y) \neq 0, \ \forall y \neq 0]$.

On associe à cette structure les opérateurs K. Yano – M. Obata [8], [11]

$$\Theta^{kh}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^k_i \delta^h_j - g_{ij} g^{hk}), \quad {}^*\Theta^{kh}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^k_i \delta^h_j + g_{ij} g^{kh}), \tag{2.1}$$

où g^{ij} est un tenseur finslerien du type (2,0) ayant la propriété

$$g_{ij} g^{ik} = \delta^k_j, \quad g_{ji} g^{ki} = \delta^k_j.$$

et on remarque que ces opérateurs satisfont aux relations

$$\Theta + \Theta = \delta\delta, \quad \Theta . \Theta = \Theta, \quad {}^*\Theta . {}^*\Theta = {}^*\Theta, \quad \Theta . {}^*\Theta = 0, \quad {}^*\Theta . \Theta = 0.$$

Ici $(\Theta . \Theta)^{kh}_{ij} = \Theta^{mh}_{is} \Theta^{ks}_{mj}$, et la contraction d'un tenseur finslerien t^i_{jk} du type (1, 2), par Θ, a l'expression locale $(\Theta . t)^i_{jk} = \Theta^{mi}_{js} t^s_{mk}$, etc.

Nous voulons déterminer la famille générale des connexions finsleriennes qui remplissent les conditions

$$g_{ij|k} = K_{ijk}, \qquad g_{ij\|k} = Q_{ijk}, \tag{2.2}$$

où K_{ijk} et Q_{ijk} sont des tenseurs finsleriens du type (0,3) ayant les propriétés

$$K_{ijk} = -K_{jik}, \quad Q_{ijk} = -Q_{jik}. \tag{2.3}$$

Soit $(\mathring{N}^i_j, \mathring{F}^i_{jk}, \mathring{C}^i_{jk})$ une connexion finslerienne initialement donnée sur M et on suppose la connexion finslerienne $(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk})$ déterminée par

$$N^i_j = \mathring{N}^i_j + A^i_j, \quad F^i_{jk} = \mathring{F}^i_{jk} + B^i_{jk}, \quad C^i_{jk} = \mathring{C}^i_{jk} + D^i_{jk}, \tag{2.4}$$

où les champs finsleriens A^i_j, B^i_{jk}, C^i_{jk} doivent satisfaire au système

$$g_{ia} B^a_{jk} - g_{ja} B^a_{ik} = g_{ij\|k} - K_{ijk} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m} A^m_k,$$

$$g_{ia} D^a_{jk} - g_{ja} D^a_{ik} = g_{ij}\|_k - Q_{ijk},$$

qui est équivalent aux équations suivantes

$${}^*\Theta^{mh}_{js} B^s_{mk} = \frac{1}{2} g^{ih} \left(g_{ij\|k} - K_{ijk} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m} A^m_k \right), \tag{2.5}$$

$${}^*\Theta^{mh}_{js} D^s_{mk} = \frac{1}{2} g^{ih} (g_{ij}\|_k - Q_{ijk}). \tag{2.6}$$

On a noté ici avec $_{\|}$ et $\|$, la h-dérivée et respectivement la v-dérivée covariante par rapport à la connexion finslerienne donnée $(\mathring{N}^i_j, \mathring{F}^i_{jk}, \mathring{C}^i_{jk})$.

Par un calcul direct, on vérifie que pour ces équations le lemme de K. Yano [[11], p. 133] est satisfait, d'où on peut conclure que ces équations ont des solutions par rapport à B^i_{jk}, D^i_{jk}, quel que soit le champ de tenseurs A^i_j, solutions données, respectivement, par

$$\begin{cases} B^h_{jk} = \dfrac{1}{2} g^{ih} \left(g_{ij\|k} - K_{ijk} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^m} A^m_k \right) + \Theta^{mh}_{js} U^s_{mk}, \\[2ex] D^h_{jk} = \dfrac{1}{2} g^{ih} (g_{ij}\|_k - Q_{ijk}) + \Theta^{mh}_{js} V^s_{mk}, \end{cases} \tag{2.7}$$

où U^i_{jk} et V^i_{jk} sont des tenseurs finsleriens du type (1,2) arbitraires.

De cette manière on a obtenu le

Théorème 1. *Sur une variété M_{2n} douée d'une structure finslerienne presque symplectique, la famille générale de connexions finsleriennes, qui remplit les conditions $g_{ij|k} = K_{ijk}$, $g_{ij}\|_k = Q_{ijk}$, K_{ijk} et Q_{ijk} étant des tenseurs du type (0,3), antisymétriques dans les deux premiers indices, est donnée par*

$$\begin{cases} N^h_j = \mathring{N}^h_j + A^h_j, \\[2ex] F^h_{jk} = \mathring{F}^h_{jk} + \dfrac{1}{2} g^{ih} \left(g_{ij\|k} - K_{ijk} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^m} A^m_k \right) + \Theta^{mh}_{js} U^s_{mk}, \\[2ex] C^h_{jk} = \mathring{C}^h_{jk} + \dfrac{1}{2} g^{ih} (g_{ij}\|_k - Q_{ijk}) + \Theta^{mh}_{js} V^s_{mk}, \end{cases} \tag{2.8}$$

où $(\mathring{N}^i_j, \mathring{F}^i_{jk}, \mathring{C}^i_{jk})$ est une connexion finslerienne fixée, $_{\|}$ et $\|$ sont la h-dérivée et la v-dérivée covariante par rapport à cette connexion, et A^i_j, U^i_{jk}, V^i_{jk} sont des tenseurs finsleriens arbitraires.

Remarques 1. On montre par calcul direct qu'une transformation du genre $(\mathring{N}^i_j, \mathring{F}^i_{jk}, \mathring{C}^i_{jk}) \to (\mathring{N}^i_j + \bar{A}^i_j, \mathring{F}^i_{jk} + \bar{U}^i_{jk}, \mathring{C}^i_{jk} + \bar{V}^i_{jk})$, appliquée aux formules (2.8) modifie additivement les champs A^i_j U^i_{jk} et respectivement V^i_{jk}, d'où l'affirmation que $(\mathring{N}^i_j, \mathring{F}^i_{jk}, \mathring{C}^i_{jk})$ peut se fixer, dans le théorème exposé plus haut, est correcte.

2. Si $K_{ijk} = 0$, $Q_{ijk} = 0$, on obtient, de (2.8) les connexions finsleriennes presque symplectiques [2].

3. Si $K_{ijk} = 2g_{ij}\omega_k$, $Q_{ijk} = 2g_{ij}\lambda_k$, où $\omega_k = \omega_k(x, y)$ et $\lambda_k = \lambda_k(x, y)$ sont des vecteurs finsleriens covariants, on obtient, de (2.8), les connexions finsleriennes conformes presque symplectiques [2].

4. Considérant une structure métrique donnée par un champ finslerien du type (0,2), symétrique nondégénéré $g_{ij}(x, y)$, sur la variété M, on obtient une connexion finslerienne telle que

$$g_{ij}|_k = K_{ijk}, \quad g_{ij}|_k = Q_{ijk}, \quad \text{où} \quad K_{ijk} = K_{jik}, \quad Q_{ijk} = Q_{jik}$$

et comme cas particuliers les connexions finsleriennes métriques [6], [7] et conformes métriques [2].

5. Vu que (2.4) assure une correspondance biunivoque entre la terne de tenseurs finsleriens (A, B, D) et la terne de connexions finsleriennes (N, F, C), pour une connexion $(\overset{\circ}{N}, \overset{\circ}{F}, \overset{\circ}{C})$ fixée, on peut considérer le groupe des transformations de connexions (2.8) avec la composition habituelle des applications. Des cas particuliers remarquables de ce groupe de transformations ont été traités dans [2].

3. On suppose que les tenseurs K_{ijk}, Q_{ijk} du type (0,3), antisymétriques dans les deux premiers indices qui satisfont à (2.2), remplissent les conditions qu'il existe les tenseurs L_{ij}, M_{ij}, N_{ij} du type (0,2) antisymétriques, de manière que

$$\begin{aligned} K_{ijk}|_l - K_{ijl}|_k + Q_{ija} R^a_{kl} + K_{ija} T^a_{kl} &= 2 g_{ij} L_{kl}, \\ K_{ijk}|_l - Q_{ijl}|_k + Q_{ija} P^a_{kl} + K_{ija} C^a_{kl} &= 2 g_{ij} M_{kl}, \\ Q_{ijk}|_l - Q_{ijl}|_k + Q_{ija} S^a_{kl} &= 2 g_{ij} N_{kl}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où R^i_{jk}, P^i_{jk}, S^i_{jk}, T^i_{jk}, C^i_{jk} désignent les champs de tenseurs de torsion appartenant à M_{2n}.

De ce fait, si on note avec R^i_{jkl}, P^i_{jkl} et S^i_{jkl} les champs de tenseurs de courbure appartenant à M_{2n} et en utilisant les identités de Ricci appliquées à g_{ij} on obtient

$$ {}^*\Theta^{bh}_{ja} R^a_{bkl} = -\delta^h_j L_{kl}, \quad {}^*\Theta^{bh}_{ja} P^a_{bkl} = -\delta^h_j M_{kl}, \quad {}^*\Theta^{bh}_{ja} S^a_{bkl} = -\delta^h_j N_{kl}. \tag{3.2}$$

En contractant $h = j$ on obtient de (3.2) les relations

$$R^a_{akl} \equiv X_{kl} = -2nL_{kl}, \quad P^a_{akl} \equiv Y_{kl} = -2nM_{kl}, \quad S^a_{akl} \equiv Z_{kl} = -2nN_{kl}. \tag{3.3}$$

Finalement, on note avec

$$ {}^*R^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{2n}\delta^i_j X_{kl}, \quad {}^*P^i_{jkl} = P^i_{jkl} - \frac{1}{2n}\delta^i_j Y_{kl}, \quad {}^*S^i_{jkl} = S^i_{jkl} - \frac{1}{2n}\delta^i_j Z_{kl}, \tag{3.4}$$

et vu que

$$\Theta^{ks}_{ij}|_l = 0, \quad \Theta^{ks}_{ij}|_l = 0, \quad {}^*\Theta^{ks}_{ij}|_l = 0, \quad {}^*\Theta^{ks}_{ij}|_l = 0,$$

de (3.2) et (3.3), on peut formuler le

Théorème 2. *Sur une variété M_{2n}, douée d'une structure finslerienne presque symplectique, les champs de tenseurs ${}^*R^i_{jkl}$, ${}^*P^i_{jkl}$, ${}^*S^i_{jkl}$ donnés sur* (3.4) *attachés aux connexions finsleriennes qui satisfont à $g_{ij}|_k = K_{ijk}$, $g_{ij}|_k = Q_{ijk}$, où K_{ijk} et Q_{ijk} sont des tenseurs du type* (0,3), *antisymétriques dans les deux premiers indices, remplissant les conditions supplémentaires* (3.1), *satisfont aux relations*

$$ {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*R^{ai}_{ikl} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*R^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*R^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{3.5}$$

$$ {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*P^a_{ikl} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*P^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*P^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{3.6}$$

$$ {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*S^a_{ikl} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*S_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} {}^*S^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{3.7}$$

Remarque 6. Dans le cas des connexions finsleriennes presque symplectiques on a $L_{ij} = M_{ij} = N_{ij} = 0$ et les relations de plus haut deviennent

$$ {}^*\Theta^{ih}_{ja} R^a_{ikl} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} R^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} R^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{3.5'}$$

$$ {}^*\Theta^{ih}_{ja} P^a_{ikl} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} P^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} P^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{3.6'}$$

$$ {}^*\Theta^{ih}_{ja} S^a_{ikl} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} S^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0, \quad {}^*\Theta^{ih}_{ja} S^a_{ikl}|_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{3.7'}$$

et dans le cas des connexions finsleriennes conformes presque symplectiques, on a

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \omega_{i|j} - \omega_{j|i} + \lambda_a K^a_{ij} + \omega_a T^a_{ij}, \\ M_{ij} &= \omega_i|_j - \lambda_{j|i} + \lambda_a P^a_{ij} + \omega_a C^a_{ij}, \\ N_{ij} &= \lambda_i|_j - \lambda_j|_i + \lambda_a S^a_{ij}, \end{aligned}$$

les relations (3.5), (3.6) et (3.7) restant formellement identiques et les tenseurs ${}^*R^i_{jkl}$, ${}^*P^i_{jkl}$ et ${}^*S^i_{jkl}$, donnés par (3.4), attachés aux champs de tenseurs de courbure appartenant à la connexion finslerienne respective.

BIBLIOGRAPHIE

1. Atanasiu Gh. — *Connexions compatibles aux structures conformes presque hermitiennes.* C. R. Acad. Sc. Paris, 1974, 278, 501–504.
2. Ghinea I. — *Conexiuni Finsler compatibile cu anumite structuri.* Teză de doctorat, Cluj-Napoca, 1978.
3. Matsumoto M. — *The Theory of Finsler Connections.* Publ. of the Study Group of Geometry, 5, Okayama Univ., Japan, 1970.
4. Miron R. — *Connexions compatibles aux structures conformes presque symplectiques.* C. R. Acad. Sc. Paris, 1967, 685–687.
5. Miron R. et Oproiu V. — *Connexions compatibles aux structures presque cosymplectiques et conformes presque cosymplectiques.* C.R.Acad. Sc. Paris, 1969, 268, séries A, 451–454.
6. Miron R. — *Spații Finsler. Cercetări ale matematicienilor români.* Conferință la „Colocviul Național de Geometrie", Timișoara, mai, 1977.
7. Miron R., Hashiguchi M. — *Metrical Finsler Connections.* Rep. Fac. Sc. Kagoshima Univ. (Mat., Phys., Chem.), No 12, 1979.
8. Obata M. — *Affine Connections on Manifolds with Almost Complex Quaternion or Hermitian Structure.* Jap. Jour. Math., 26, 1956, 48–77.
9. Opriș D. — *Sur les connexions infinitésimales conjuguées d'un espace fibré principal différentiable.* Ann. Univ. Timișoara, XI, 1, 1973, 75–89.
10. Oproiu V. — *Conexiuni compatibile cu diverse structuri și structuri de ordin superior.* Teză de doctorat, Iași, 1969.
11. Yano K. — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces.* Pergamon Press, 1965.

Reçu le 12.I. 1980

Chaire de Géométrie
Faculté de Mathématiques et Informatique
Université de Brașov
et
Chaire de Mathématiques
Institut Polytechnique de Iassy
R.S.Roumania