Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Supliment la tomul XXV, s. I a 1979
Cu ocazia centenarului naşterii Acad. Prof. Al. Myller

SUR LA COHOMOLOGIE D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES PROJECTIFS

PAR

GHEORGHE PITIŞ

Dans cette note nous continuons l'étude des groupes de cohomologie de Čech abstraite. L'intention est de présenter quelques résultats concernant le calcul de ces groupes dans le cas où le système projectif P admet une J-résolution bigraduée de la forme (20), la différentielle d^r vérifiant la condition (4).

Le but du §1 est de rappeler brièvement certains résultats sur la cohomologie de Čech abstraite introduite par R. Miron et I. Pop, dans la monographie [1]. Les considérations du §2 ont été suggérées par le travail [2] de I. Vaisman et elles s'appliquent dans les théorèmes 3.1. et 3.2. qui donnent des conditions suffisantes pour que des résultats de type Dolbeault, pour les systèmes projectifs, conduisent au théorème de de Rham.

1. Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble partiellement ordonné, vérifiant les conditions suivantes: *i*) I est filtrant à gauche; *ii*) pour tous $i, j \in I$, il existe $\inf(i, j) = i \wedge j$; *iii*) il existe $J \subseteq I$ ayant la propriété: R. pour tout $i \in I$ il existe $J_i \subseteq J$ tel que $\sup J_i \in I$ et $i \leqslant \sup J_i$. Un sous-ensemble J de I satisfaisant à la condition R est appelé „recouvrement" de I.

Sur l'ensemble A_I des „recouvrements" de I on peut définir une relation d'ordre, à savoir: $J' \prec J$ si pour tout $j' \in J'$ il existe $j \in J$ tel que $j' \leqslant j$. Supposons que l'ensemble $(A_I, \succ)$ est filtrant à droite.

Soit $P = (H_i, \alpha_{ij})_{i,j \in I}$ un système projectif de groupes abéliens sur I.

Définition 1.1. *On appelle résolution du système projectif P, toute suite exacte dans la catégorie $I(Ab)$, de la forme*

$$(RP)\quad 0 \to P \xrightarrow{j} I^0 \to \dots \to I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \to .$$

qui a la propriété

$$\check{H}^q(|I|, I^n) = 0 \text{ pour } q \geqslant 1 \text{ et } n \geqslant 0.$$

Si on désigne par $(d^n)^*: \check{H}^0(|I|, I^n) \to \check{H}^0((|I|, I^{n+1})$ l'homomorphisme associé au morphisme d^n, on obtient la suite sémiexacte de groupes

$$(1)\qquad 0 \to \check{H}^0(|I|, I^0) \xrightarrow{(d^0)^*} \check{H}^0(|I|, I^1) \xrightarrow{(d^1)^*} \check{H}^0(|I|, I^2) \to \cdots$$

Dans [1] on énonce et on démontre le résultat remarquable

Théorème 1.1. *Les groupes de cohomologie de Čech abstraite du système projectif P sont isomorphes aux groupes de cohomologie de la suite sémiexacte (1), associée à la résolution (RP) du système P.*

Nous avons essayé, dans [5], de donner une autre description des groupes de cohomologie de Čech abstraite. Pour cela, nous avons remplacé la définition 1.1 par la

Définition 1.2. *Soit J un „recouvrement" de I. On appelle J-résolution acyclique du système projectif P, une suite sémiexacte dans la catégorie $\underline{I}$ (Ab), de la forme*

$$0 \to P \xrightarrow{\delta} P^0 \to \cdots \to P^n \xrightarrow{d^n} P^{n+1} \to \cdots \tag{2}$$

exacte pour les termes P, P^0 et qui vérifie les conditions suivantes

i) la suite

$$0 \to H_{i_0 \wedge \cdots \wedge i_s} \to H^0_{i_0 \wedge \cdots \wedge i_s} \to \cdots \to H^n_{i_0 \wedge \cdots \wedge i_s} \xrightarrow{d^n_{i_0 \wedge \cdots \wedge i_s}} H^{n+1}_{i_0 \wedge \cdots \wedge i_s} \to \tag{3}$$

est exacte dans la catégorie Ab, pour tous $i_0, \ldots, i_s \in J$;

ii) $\check{H}^q(J, P^n) = 0$ *pour* $q \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$.

Nous obtenons alors le résultat suivant

Théorème 1.2. *Si la suite (2) est une J-résolution acyclique de systèmes projectifs canoniques de P, alors les groupes de cohomologie de Čech abstraite relatifs au „recouvrement" J, sont donnés par*

$$\check{H}^n(J, P) \approx \operatorname{Ker} \varprojlim_{i \in I} d^n / \operatorname{Im} \varprojlim_{i \in I} d^{n-1} \qquad \check{H}^0(J, P) \approx \operatorname{Ker} \varprojlim_{i \in I} d^0.$$

2. Soit

$$0 \to Q^0 \to \cdots \to Q^r \xrightarrow{d^r} Q^{r+1} \to \cdots \tag{Q}$$

une suite sémiexacte de systèmes projectifs de groupes abéliens $Q^r = (H^r_i, \alpha^r_{ij})_{i,j \in I}$ sur l'ensemble $(I, \leqslant)$. Supposons que $Q^r = \bigoplus_{p+q=r} Q^{pq}$ où $Q^{pq} = (H^{pq}_i, \alpha^{pq}_{ij})_{i,j \in I}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, sont des systèmes projectifs canoniques sur $(I, \leqslant)$.

Remarque. 1. La somme directe écrite auparavant a la signification suivante

$$H^r_i = \bigoplus_{p+q=r} H^{pq}_i \qquad \alpha^r_{ij} = \bigoplus_{p+q=r} \alpha^{pq}_{ij}; \qquad i, j \in I,\ i \leqslant j.$$

2. Les systèmes projectifs Q^{pq} étant canoniques, on déduit que Q^r est canonique.

Pour tout $l^{pq}_i \in H^{pq}_i$, $i \in I$, avec $p + q = r$, nous avons la décomposition unique

$$d^r_i\, l^{pq}_i = \sum_{h+k=1} l^{p+hq+k}_i \qquad \text{où } l^{p+hq+k}_i \in H^{p+hq+k}_i \tag{4}$$

Nous allons étudier le cas des suites (Q) doubles positives, i.e. supposons que $l^{p+hq+k}_i = 0$ si $h < 0$ ou $k < 0$. (4) devient alors

$$d^r_i\, l^{pq}_i = l^{p+1q}_i + l^{pq+1}_i \tag{5}$$

égalité qui permet de définir les homomorphismes de groupes

$$d^{pq}_{01,i} : H^{pq}_i \to H^{pq+1}_i \qquad d^{pq}_{10,i} : H^{pq}_i \to H^{p+1q}_i$$

par

$$d^{pq}_{01,i}\, l^{pq}_i = l^{pq+1}_i \quad d^{pq}_{10,i}\, l^{pq}_i = l^{p+1q}_i \tag{6}$$

Soient $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ donnés et $p + q = r$. L'application $d^r : Q^r \to Q^{r+1}$ étant un morphisme de systèmes projectifs, nous avons

$$\alpha^{r+1}_{ij}\, d^r_j = d^r_i\, \alpha^r_{ij} \tag{7}$$

pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leqslant j$. Comme conséquence de l'égalité (7) et de la définition des homomorphismes α^r_{ij} nous obtenons

$$\alpha^{pq+1}_{ij}\, d^{pq}_{01,j} = d^{pq}_{01,i}\, \alpha^{pq}_{ij}, \qquad \alpha^{p+1q}_{ij}\, d^{pq}_{10,j} = d^{pq}_{10,i}\, \alpha^{pq}_{ij}, \tag{8}$$

donc $d^{pq}_{01} = (d^{pq}_{01,i})_{i \in I} : Q^{pq} \to Q^{pq+1}$ et $d^{pq}_{10} = (d^{pq}_{10,i})_{i \in I} : Q^{pq} \to Q^{p+1q}$ sont des morphismes de systèmes projectifs. D'autre part, la suite (Q) étant semi-exacte nous avons $d^{r+1}_i\, d^r_i = 0$, et compte tenu de (5), il vient

$$d^{pq+1}_{01}\, d^{pq}_{01} = d^{p+1q}_{10}\, d^{pq}_{10} = d^{pq+1}_{10}\, d^{pq}_{01} + d^{p+1q}_{01}\, d^{pq}_{10} = 0. \tag{9}$$

Nous avons montré ainsi que l'on peut associer à la suite double positive (Q), deux familles de suites sémiexactes de systèmes projectifs, à savoir

$$(Q^p_{01}) \quad 0 \to Q^{p0} \xrightarrow{d^{p0}_{01}} \cdots \to Q^{pq} \xrightarrow{d^{pq}_{01}} Q^{pq+1} \to \cdots$$

$$(Q^q_{10}) \quad 0 \to Q^{0q} \xrightarrow{d^{0q}_{10}} \cdots \to Q^{pq} \xrightarrow{d^{pq}_{10}} Q^{p+1q} \to \cdots$$

Pour $i \in I$, $r \geqslant 0$ nous pouvons considérer l'homomorphisme de projection $p^r_i : H^r_i \to H^{0r}_i$ et on vérifie aisément que $p^r = (p^r_i)_{i \in I} : Q^r \to Q^{0r}$ est un morphisme de systèmes projectifs. Si J est un „recouvrement" de I alors p^r induit un homomorphisme entre les groupes de cohomologie de Čech associés aux deux systèmes projectifs, à savoir

$$(p^r)^{*s} : \check{H}^s(J, Q^r) \to \check{H}^s(J, Q^{0r}).$$

Le problème qui nous intéresse est de trouver des conditions afin que ces homomorphismes soient des isomorphismes. Pour cela, considérons le sous-système $Q^r_1 = \bigoplus_{p+q=r}^{p \geqslant 1} Q^{pq}$, du système projectif Q^r. Il est aisé de remarquer que la suite de systèmes projectifs

$$(Q_1) \quad 0 \to Q^1_1 \xrightarrow{d^1} Q^2_1 \to \cdots \to Q^r_1 \xrightarrow{d^r} Q^{r+1}_1 \to \cdots$$

est semiexacte (d^r est la restriction de d^r à Q^r_1).

Si $i^r : Q_1^r \to Q^r$ est l'inclusion, nous obtenons la suite exacte

$$0 \to Q_1^r \xrightarrow{i^r} Q^r \xrightarrow{p^r} Q^{0r} \to 0. \tag{10}$$

Mais $i = (i^r)_{r\geq 0} : (Q_1) \to (Q)$ et $p = (p^r)_{r\geq 0} : (Q) \to (Q_{01}^0)$ sont des morphismes de suites sémiexactes (i.e. ils commutent avec les différentielles de cettes suites), donc la suite

$$0 \to (Q_1) \xrightarrow{i} (Q) \xrightarrow{p} (Q_{01}^0) \to 0 \tag{11}$$

est exacte dans la catégorie $Sc^s[\overleftarrow{I}(Ab)]$.

De l'exactité des suites (10) il résulte que l'on peut associer à la suite double (Q), les suites exactes de cohomologie relatives au „recouvrement" J suivantes

$$\cdots \to \check{H}^s(J, Q_1^r) \xrightarrow{(i^r)^{*s}} H^s(J, Q^r) \xrightarrow{(p^r)^{*s}} H^s(J, Q^{0r}) \xrightarrow{\Delta^s} H^{s+1}(J, Q^r) \to. \tag{12}$$

Rémarque. Des résultats similaires ont lieu pour la différentielle d_{10} en remplaçant le système projectif Q_1^r par $Q_2^r = \bigoplus_{p+q=r}^{q\geq 1} Q^{pq}$, la suite (Q_{01}^0) par la suite (Q_{10}^0) et p^r par la projection $q^r : Q^r \to Q^{r0}$.

Lemme 2.1. *Si $\check{H}^s(J, Q^{pq}) = 0$ pour $p \geq 0$ et $q \geq 0$ tels que $p + q = r$ alors $\check{H}^s(J, Q^r) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les suités

$$0 \to C^1(J, Q^r) \to \cdots \to C^s(J, Q^r) \xrightarrow{\delta_r^s} C^{s+1}(J, Q^r) \to \cdots \tag{13}$$

$$0 \to \bigoplus_{p+q=r} C^1(J, Q^{pq}) \to \cdots \to \bigoplus_{p+q=r} C^s(J, Q^{pq}) \xrightarrow[p+q=r]{\bigoplus \delta_{pq}^s} \bigoplus_{p+q=r} C^{s+1}(J, Q^{pq}) \to \cdots \tag{14}$$

sont isomorphes. Tout d'abord remarquons que la suite (14) est sémiexacte. Soit $t^r = (t^r_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s})_{(i_0,\ldots,i_s)\in\Sigma_s} \in C^s(J, Q^r)$, où nous avons noté par Σ_s l'ensemble $\{(i_0, \ldots, i_s) ; i_0, \ldots, i_s \in J\}$. L'élément $t^r_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s}$ de $H^r_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s}$ admet la décomposition unique

$$t^r_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s} = \sum_{p+q=r} t^{pq}_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s} ; \quad t^{pq}_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s} \in H^{pq}_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s},$$

donc nous pouvons définir un homomorphisme $f^s : C^s(J, Q^r) \to \bigoplus_{p+q=r} C^s(J, Q^{pq})$ en posant

$$f^s(t^r) = \sum_{p+q=r} t^{pq} \qquad t^{pq} = (t^{pq}_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s})_{(i_0,\ldots,i_s)\in\Sigma_s}.$$

On vérifie aisément que f^s ainsi défini est un isomorphisme de groupes. Pour $(i_0, \ldots, i_{s+1}) \in \Sigma_{s+1}$ nous avons

$$(\delta_r^s t^r)_{i_0\wedge\ldots\wedge i_{s+1}} = \sum_{u=0}^{s+1} (-1)^u \alpha^r_{i_0\wedge\ldots\wedge i_s,\, i_0\wedge\ldots\wedge\hat{i}_u\wedge\ldots\wedge i_{s+1}} t^r_{i_0\wedge\ldots\wedge\hat{i}_u\wedge\ldots\wedge i_{s+1}} =$$
$$= \sum_{p+q=r} (\delta_{pq}^s t^{pq})_{i_0\wedge\ldots\wedge_{s+1}}$$

et alors

$$f^{s+1}\delta_r^s t^r = f^{s+1}\{(\delta_r^s t^r)_{i_0\wedge\ldots\wedge i_{s+1}}\}_{(i_0,\ldots,i_{s+1})\in\Sigma_{s+1}} =$$
$$= f_{s+1}\{(\sum_{p+q=r} (\delta_{pq}^s t^{pq})_{i_0\wedge\ldots\wedge i_{s+1}})_{(i_0\wedge\ldots\wedge i_{s+1})\in\Sigma_{s+1}}\} = \sum_{p+q=r} \delta_{pq}^s t^{pq} = \bigoplus_{p+q=r} f^s t^r$$

donc $f = (f^s)_{s\geq 0}$ est de plus un morphisme de suites (13) et (14).

A présent nous pouvons énoncer la

Proposition 2.1. *Si*

$$\check{H}^s(J, Q^{pr-p}) = 0 \qquad p = 1, \ldots, r ; \; r \geq 1 \tag{15}$$

alors $(p^r)^{*s}$ est monomorphisme. $(p^r)^{*s}$ et $(p^0)^{*s}$ sont toujours des monomorphismes.

Démonstration. Du lemme 2.1 on déduit $\check{H}^s(J, Q_1^r) = 0$ et alors de l'éxactité de la suite (12) il résulte $\operatorname{Im}(i^r)^{*s} = 0$.

De la même manière on démontre la

Proposition 2.2. *Si*

$$\check{H}^{s+1}(J, Q^{pr-p}) = 0, \qquad p = 1, \ldots, r ; \; r \geq 1 \tag{16}$$

alors $(p^r)^s$ est épimorphisme. $(p^0)^s$ est toujours épimorphisme.

Soient $\varprojlim_{i\in I}(Q)$, $\varprojlim_{i\in I}(Q_{01}^p)$, $\varprojlim_{i\in I}(Q_{10}^q)$ les suites de limites projectives associées aux suites sémiexactes (Q), (Q_{01}^p), resp. (Q_{10}^q). Nous allons établir certaines relations entre les différentielles de cettes suites.

Soit $(l_i^{pq})_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} Q^{pq}$ et $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = r$. Alors $\alpha_{ij}^{pq} l_j^{pq} = l_i^{pq}$ pour $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, et

$$\varprojlim_{i\in I} d^r((l_i^{pq})_{i\in I}) = (d_i^r((l_i^{pq})_{i\in I}) = (d_{01,i}^{pq} l_i^{pq})_{i\in I} + (d_{10,i}^{pq} l_i^{pq})_{i\in I}.$$

Compte tenu des définitions des homomorphismes α_{ij}^r et d_i^r, on a alors

$$(d_{01,i}^{pq} l_i^{pq})_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} d_{01}^{pq}(l_i^{pq})_{i\in I}, \quad (d_{10,i}^{pq} l_i^{pq})_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} d_{10}^{pq}(l_i^{pq})_{i\in I}.$$

Par les isomorphismes

$$\varprojlim_{i\in I} Q^r \approx \bigoplus_{p+q=r} \varprojlim_{i\in I} Q^{pq}, \tag{17}$$

nous pouvons identifier $\varprojlim_{i\in I} d^r(l_i^{pq})_{i\in I}$ à $\varprojlim_{i\in I} d_{01}^{pq}(l_i^{pq})_{i\in I} + \varprojlim_{i\in I} d_{10}^{pq}(l_i^{pq})_{i\in I}$ et alors

Proposition 2.3. *Les morphismes de limites projectives $\varprojlim_{i\in I} d_{01}^{pq}$ et $\varprojlim_{i\in I} d_{10}^{pq}$ satisfont aux égalités suivantes*

$$\varprojlim_{i\in I} d_{01}^{pq+1} \varprojlim_{i\in I} d_{01}^{pq} = \varprojlim_{i\in I} d_{10}^{p+1q} \varprojlim_{i\in I} d_{10}^{pq} = \varprojlim_{i\in I} d_{10}^{pq+1} \varprojlim_{i\in I} d_{01}^{pq} +$$
$$+ \varprojlim_{i\in I} d_{01}^{p+1q} \varprojlim_{i\in I} d_{10}^{pq} = 0. \tag{18}$$

Remarque. De cette proposition on déduit, d'une autre manière, que les suites $\varprojlim_{i\in I} (Q^q_{10})$ et $\varprojlim_{i\in I} (Q^p_{01})$, associées à la suite $\varprojlim_{i\in I} (Q)$, sont sémi-exactes.

3. Dans la suite nous allons donner quelques résultats sur les groupes de cohomologie de Čech des systèmes projectifs P et P^p, $p \geqslant 0$, dans le cas où il existe les morphismes injectifs $j : P \to Q^0$, $j^p : P^p \to Q^{p0}$ possedant les propriétés suivantes

$$\operatorname{Im} j = \operatorname{Ker} d^0 \qquad\qquad \operatorname{Im} j^p = \operatorname{Ker} d^{p0}_{01}.$$

Définition 3.1. *Soit J un „recouvrement" de I. Une suite sémiexacte (Q) de systèmes projectifs s'appelle J-exacte si pour tout $(i_0, \dots, i_s) \in \Sigma_s$, $s \geqslant 0$, la suite*

$$0 \to H^0_{i_0\wedge\dots\wedge i_s} \to \dots \to H^r_{i_0\wedge\dots\wedge i_s} \xrightarrow{d^r_{i_0\wedge\dots\wedge i_s}} H^{r+1}_{i_0\wedge\dots\wedge i_s} \to \dots$$

est exacte pour les termes $H^r_{i_0\wedge\dots\wedge i_s}$ tels que $r \geqslant l$.

Proposition 3.1. *Supposons que la suite*

$$(19) \qquad 0 \to P^p \xrightarrow{j^p} Q^{p0} \to \dots \to Q^{pq} \xrightarrow{d^{pq}_{01}} Q^{pq+1} \to \dots$$

est J-résolution du système projectif P^p pour tout $p \geqslant 0$. Si la suite (Q^0_{10}) est J-exacte alors le système projectif P admet la J-résolution

$$(20) \qquad 0 \to P \xrightarrow{j} Q^0 \to \dots \to Q^r \xrightarrow{d^r} Q^{r+1} \to \dots$$

Démonstration. Pour $r \geqslant 1$ soit $h^r = \sum_{p+q=r} h^{pq} \in \operatorname{Ker} d^r_i$ où $i = i_0 \wedge \dots \wedge i_s$, $(i_0, \dots, i_s) \in \Sigma_s$. Alors

$$(21_0) \qquad d^{0r}_{01,i}\ h^{0r} = 0,$$

$$(21_1) \qquad d^{1r-1}_{01,i}\ h^{1r-1} + d^{0r}_{10,i}\ h^{0r} = 0,$$

$$\dots\dots$$

$$(21_{r-1}) \qquad d^{r-11}_{01,i}\ h^{r-11} + d^{r-22}_{10,i}\ h^{r-22} = 0,$$

$$(21_r) \qquad d^{r0}_{01,i}\ h^{r0} + d^{r-11}_{10,i}\ h^{r-11} = 0,$$

$$(21_{r+1}) \qquad d^{r0}_{01,i}\ h^{r0} = 0.$$

D'après l'égalité (21_0) il existe $\bar{h}^{0r-1} \in H^{0r-1}_i$, tel que

$$(22_0) \qquad h^{0r} = d^{0r-1}_{01,i}\ \bar{h}^{0r-1}.$$

Compte tenu de (9), les égalités (22_0) et (21_1) montrent que

$$d^{1r-1}_{01,i}\ (\bar{h}^{1r-1} - d^{0r-1}_{10,i}\ h^{0r-1}) = 0$$

donc il existe $\bar{h}^{1r-2} \in H^{1r-2}_i$ tel que

$$(22_1) \qquad h^{1r-1} = d^{0r-1}_{10,i}\ \bar{h}^{0r-1} + d^{1r-2}_{01,i}\ \bar{h}^{1r-2}.$$

De la même manière, de la relation (21_{r-1}) il résulte qu'il existe $\bar{h}^{r-10} \in H^{r-10}_i$ tel que

$$(22_{r-1}) \qquad h^{r-11} = d^{r-2}_{10,i}\ \bar{h}^{r-2,1} + d^{r-10}_{01,i}\ \bar{h}^{r-1,0}.$$

Si l'on remplace h^{r-11} ainsi obtenu dans (21_r), on a $d^{r0}_{01,i}\ (h^{r0} - d^{r-10}_{10,i}\ \bar{h}^{r-10}) = 0$, et parce que la suite (19) est J-résolution du système projectif $P^r = (K^r_i, \bar{\sigma}^r_{ij})_{i,j\in I}$, on déduit qu'il existe $k^r \in K^r_i$ tel que

$$(22_r) \qquad h^{r0} = d^{r-10}_{10,i}\ \bar{h}^{r-10} + j^r_i k^r.$$

Étant données les égalités (21_{r+1}) et (22_r) on peut écrire $d^{r0}_{10,i} j^r_i k^r = 0$, donc il existe $\bar{k}^{r-1} \in H^{r-10}_i$ tel que $d^{r0}_{10,i}\ \bar{k}^{r-1} = j^r_i k^r$, car la suite (Q^0_{10}) est J-exacte. On obtient alors $h^r = d^r_i \bar{h}^{r-1}$ où $\bar{h}^{r-1} = \bar{h}^{0r-1} + h^{1r-2} + \dots + \bar{h}^{r-21} + \bar{h}^{r-10} + \bar{k}^{r-1}$; q.e.d.

Remarque. Le résultat précédent reste valable si nous remplaçons la J-exactité de la suite (Q^0_{10}) par la condition
$\operatorname{Ker} d^{r0}_{01,i} \cap \operatorname{Ker} d^{r0}_{10,i} \subseteq \operatorname{Im} d^{r-10}_{01,i}$ pour $r \geqslant 0$ et $i = i_0 \wedge \dots \wedge i_s$, $(i_0, \dots, i_s) \in \Sigma_s$, $s \geqslant 0$.

Les propositions 2.1 et 2.2 ont la conséquence suivante

Proposition 3.2. *Sous les hypothèses de la prop. 3.1. supposons que les J-résolutions (19) sont acycliques pour tout $p \geqslant 1$. La J-résolution (20) du système projectif P est acyclique si et seulement si la J-résolution du système projectif P^0 est acyclique.*

Les résultats précédents et le théorème 1.2 nous permettent de démontrer le

Théorème 3.1. *Si les suites (19) sont des J-résolutions acycliques de systèmes projectifs canoniques pour P^p, $p \geqslant 0$, et si la suite (Q^0_{10}) est J-exacte, alors*

a) $$\check{H}^s(J, P^p) \approx H^s(\varprojlim_{i\in I} (Q^p_{01}), G).$$

b) *le système projectif P admet la J-résolution acyclique (20) ;*

c) *les groupes de cohomologie de Čech du système projectif P, relatifs au „recouvrement" J, sont isomorphes aux groupes de cohomologie de la suite $\varprojlim_{i\in I} (Q)$*, i.e.

$$\check{H}^s(J, P) \approx H^s(\varprojlim_{i\in I} (Q), G).$$

Remarque. Le théorème 1.2 montre que pour obtenir a) il suffit que les suites (19) soient des J-résolutions acycliques pour les systèmes P^p.

Nous pouvons aussi énoncer le

Théorème 3.2. *Si les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées quel que soit le „recouvrement" J appartenant à une partie cofinale de l'ensemble Δ_I alors*

a) $$\check{H}^s(|I|, P^p) \approx H^s(\varprojlim_{i\in I} (Q^p_{01}), G).$$

b) $$\check{H}^s(|I|, P) \approx H^s(\varprojlim_{i \in I} (Q), G).$$

4. Nous allons appliquer les résultats obtenus dans le cas des variétés complexes.

Soit V une variété analytique complexe paracompacte de dimension finie et désignons par $\mathcal{E}^r$ le faisceau des formes différentielles de degré r, par $\mathcal{E}^{pq}$ — celui des formes différentielles de bidegré (p, q) et par Ω^p le faisceau des formes holomorphes sur V (cf. [3], cap. X).

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de V alors $\mathcal{U}$ admet un raffinement $\overline{\mathcal{U}}$ tel que, pour tout $p \geqslant 0$, la suite

$$0 \to \Omega^p \xrightarrow{\subset} \mathcal{E}^{p0} \to \dots \to \mathcal{E}^{pq} \xrightarrow{d_{01}^{pq}} \mathcal{E}^{pq+1} \to \dots$$

soit une $\overline{\mathcal{U}}$-résolution acyclique de Ω^p (cf. [4]).

En reproduisant la démonstration du lemme de Poincaré, nous avons

Proposition 4.1. *La suite*

$$(\mathcal{E}_{10}^0)\ 0 \to \mathcal{E}^{00} \to \dots \to \mathcal{E}^{p0} \xrightarrow{d_{10}^{p0}} \mathcal{E}^{p+10} \to \dots$$

est $\overline{\mathcal{U}}$*-exacte.*

Remarque. Plus généralement, on démontre dans [4], lemme 1.2', que la suite $(\mathcal{E}_{10}^p)$ des faisceaux de germes de courants, est $\overline{\mathcal{U}}$-exacte pour tout $p \geqslant 0$.

Les conditions du théorème 3.1 étant vérifiées, il résulte que la suite

$$0 \to \tilde{C} \xrightarrow[\to]{\subset} \mathcal{E}^0 \to \dots \to \mathcal{E}^r \xrightarrow{d^r} \mathcal{E}^{r+1} \to \dots$$

est une $\overline{\mathcal{U}}$-résolution du faisceau $\tilde{C}$ associé au préfaisceau constant (C). De plus nous avons les isomorphismes

$$\check{H}^s(\overline{\mathcal{U}}, \tilde{C}) \approx {}^{\operatorname{Ker} d_V^s}/\operatorname{Im} d_V^{s-1} \quad s \geqslant 1\,; \quad \check{H}^0(\overline{\mathcal{U}}, \tilde{C}) \approx \operatorname{Ker} d_V^0\,.$$

La famille des recouvrements $\overline{\mathcal{U}}$ de V étant cofinale dans l'ensemble des recouvrements ouverts de V, du théorème 3.2 il résulte

$$\check{H}^s(V, \tilde{C}) \approx {}^{\operatorname{Ker} d_V^s}/\operatorname{Im} d_V^{s-1} \quad s \geqslant 1\,; \quad \check{H}^0(V, \tilde{C}) \approx \operatorname{Ker} d_V^0$$

(en outre nous obtenons ainsi le théorème de Dolbeault).

Les groupes de cohomologie de Čech d'un espace topologique paracompact, à coefficients dans un préfaisceau, étant isomorphes aux groupes à coefficients dans le faisceau associé ([1], cap. VII, théorème 3.4), des isomorphismes écrits ci-dessus, nous obtenons le théorème de de Rham pour les variétés analytiques complexes paracompactes, à savoir

$$\check{H}^s(V, C) \approx {}^{\operatorname{Ker} d_V^s}/\operatorname{Im} d_V^{s-1} \quad s \geqslant 1\,; \quad \check{H}^0(V, \tilde{C}) \approx \operatorname{Ker} d_V^0,$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Miron R., Pop I. — *Topologie algebrică-omologie, omotopie, spații de acoperire*. Editura Academiei R.S.R., București, 1974.
2. Vaisman I. — *Sur une classe de complexes de cochaines*. Math. Ann., 194, 35—42 (1971).
3. Gheorghiev Gh., Oproiu V. — *Varietăți diferențiabile finit și infinit dimensionale*, vol. II. Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
4. Dolbeault, P. — *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe I*. Ann. of. Math., 64, 83—130 (1956).
5. Pitiş Gh. — *Une méthode de calcul des groupes de cohomologie de Čech abstraite*. Mem. Acad. R.S.R., vol. II (sous presse).

Reçu le 27.XI. 1979

Université de Braşov
Str. Karl Marx 50
Braşov, R.S.Romania