$\{(d/dt)b_j(t, f(x))|_{t=0}\}_{1\leq j\leq k}\}$ are linearly independent. Let $g(t_1, ..., t_k) = a_1^{t_1}...a_k^{t_k}(x)$. Then g is a smooth mapping $V\to X$, where V is a neighborhood of 0 in R^k. Clearly we have $g(V)\subset L$ and therefore $f\circ g(V)\subset L'$. Moreover, by the definition of the leaf, the mapping $g: V\to L$ and $f\circ g: V\to L'$ are smooth. Since (rank g), $=k$, we can assume, by contracting V if necessary, that g is a diffeomorphism of V onto an open subset U of L containing x. Thus $f: U\to L'$ is a smooth mapping and so $f: F(A)\to F(B)$ is smooth.

Remark 4. Proposition 2 contains as corollary Theorem 2 from [5] stated for diffeomorphisms of foliations with singularities. Other results concerning transversality to foliations with singularities are proved in [4].

Finally, we remark that Theorem 1 gives a general method to obtain new distributions and therefore different structures on manifolds. For example, we shall apply Theorem 1 to obtain CR-structures (introduced by A. Bejancu in [1]). Let X and Y be Kählerian manifolds with Kählerian structures (J, g) and (J', g') respectively. From [1] we recall that a submanifold N of Y is a CR-submanifold if there exist two complementary orthogonal distributions D and $D^\perp$ on N such that $J'(D_y) = D_y$ and $J'(D_y^\perp)\subset (T_yN)^\perp$, for all $y\in N$.

Proposition 3. *Let $f: X\to Y$ be a smooth mapping of the Kählerian manifolds X and Y such that $J'\circ df = df\circ J$ and let N be a CR-submanifold of Y defined by the distributions D and $D^\perp$. Assume f is transversal to the submanifold N and $f|_{f^{-1}(N)}$ is transversal to the distribution D on N. Then $f^{-1}(N)$ is a CR-submanifold of X.*

Proof. Theorem 1 implies that $E = d(f|_M)^{-1}(D)$ is a distribution on the submanifold $M = f^{-1}(N)$. The transversality conditions imply that for each $x\in M$, $E_x^\perp = df_x^{-1}(D_{f(x)}^\perp)$ and $(T_xM)^\perp = df_x^{-1}(T_{f(x)}^\perp N)$. Then it is straightforward to verify $J(E_x) = E_x$ and $J(E_x^\perp)\subset (T_xM)^\perp$.

Acknowledgement. I thank Professor A. Bejancu for the useful discussions and suggestions during the preparation of the paper.

REFERENCES

1. Bejancu A. — *Une classe de sous-variétés d'une variété kählérienne.* C.R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 597—599.
2. Bourbaki N. — *Variétés différentiables et analytiques. Fascicule de résultats.* Hermann Paris, § 1—7 (1967), § 8—15 (1971).
3. Brickell F. and Clark R.S. — *Differentiable manifolds.* Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970.
4. Motreanu D. — *Distributions and Transversality.* Colocviul Național de Geometrie și Topologie „Gh. Vrănceanu", Vaslui, 1980.
5. Stefan P. — *Accessible sets, orbits and foliations with singularities.* Proc. London Math. Soc. 29 (1974), 699—713.

Faculty of Mathematics
University of Iași
R.S. România

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

UNE CLASSE DE COMPLEXES DE CHAINES D'UNE VARIETE FEUILLETEE

PAR

GHEORGHE PITIȘ

Dédié à la mémoire du Professeur Mendel Haimovici

1. Chaines feuilletées. Pour $p\geq 0$ et $q\geq 0$ soit $\Delta^{p,q} = \Delta^p\times\Delta^q\subset R^{p+1}\times\times R^{q+1}\equiv R^{(p+1)+(q+1)}$, où Δ^p et Δ^q sont les simplexes standard de dimension p, resp. q.

Soint V une variété feuilletée à $n+m$ dimensions et de codimension n.

Définition 1.1. *Une application feuilletée $\sigma: \Delta^{p,q}\to V$ s'appelle (p, q)-simplexe feuilleté* de V.

Remarque 1.1. Dans la définition 1.1 σ est la restriction à Δ^{pq} d'une application feuilletée de U dans V, U étant un voisinage ouvert de $\Delta^{p,q}$ dans $R^{(p+1)+(q+1)}$, envisagé comme variété feuilletée de codimension $p+1$.

Définition 1.2. *Si G est un groupe abelien, toute combinaison linéaire finie du type $l = \sum_i b_i\sigma_i$, où $g_i\in G$ et les σ_i sont des (p, q)-simplexes feuilletés, s'appelle (p, q)-chaîne feuilletée de V, à coefficients dans G.*

L'ensemble $C_{p,q}(V, G)$ des (p, q)-chaînes feuiletées peut être doté d'une structure naturelle de groupe abelien. Si $f: V\to W$ est une application feuilletée et si σ est un (p, q)-simplexe feuilleté de V, alors $f\sigma$ est un (p, q)-simplexe feuilleté de W. Nous obtenons donc, d'une manière évidente, les homomorphismes

$$f_{\#(p,q)}: C_{p,q}(V, G)\to C_{p,q}(W, G).$$

Soit $U = U_1\times U_2\subseteq R^{n_1+n_2}$, où $U_1\subseteq R^{n_1}$, $U_2\subseteq R^{n_2}$ sont des ensembles ouverts convexes, et considérons les points $A_i\in U_1$, $B_j\in U_2$, $0\leq i\leq p$, $0\leq j\leq q$. Si (ξ^i), (η^j) sont les coordonnées barycentriques des simplexes standard Δ^p et Δ^q, l'application $S_{p,q} = (A_0, ..., A_p, B_0, ..., B_q)$ définie par

$$S_{p,q}((\xi^i), (\eta^j)) = (\sum_j \xi^i A_i, \sum_j \eta^j B_j) \tag{1}$$

est un (p, q)-simplexe feuilleté de la variété feuilletée $R^{n_1+n_2}$ (de codimension n_1), appelé (p, q)-simplexe feuilleté spécial.

Remarque 1.2. i) L'identité de $\Delta^{p,q}$ est un (p, q)-simplexe feuilleté spécial, noté toujours $\Delta^{p,q}$. En effet il suffit de poser $X_i(\delta_i^k)\in\Delta^p$ et $Y_j(\delta_j^l)\in\Delta^q$.

ii) Si $l = \sum_i g_i\lambda^i$ est une (s, t)-chaîne feuilletée spéciale sur un voisinage ouvert de $\Delta^{p,q}$, sur lequel le (p, q)-simplexe feuilleté σ de V soit défini, alors $\sigma l = \sum_i g_i\sigma\lambda^i$ est une (s, t)-chaîne feuilletée de V.

Au (p, q)-simplexe feuilleté spécial $S_{p,q}$ nous pouvons associer deux chaînes feuilletées de $R^{n_1+n_2}$, appelées (1,0)-frontière, resp. (0, 1)-frontière. Elles sont définies par les égalités suivantes

$$\partial_{10}^{p,q}(S_{p,q}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\hat{A}_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_p, B_0, \ldots, B_q) \tag{2}$$

$$\partial_{01}^{p,q}(S_{p,q}) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{p+j} (A_0, \ldots, A_p, \hat{B}_0, \ldots, \hat{B}_j, \ldots, B_q) \tag{3}$$

où „^" signifie l'absence de l'argument respectif.
On vérifie par calcul direct la

Proposition 1.1. $\partial_{10}^2 = \partial_{01}^2 = 0$; $\partial_{10}\partial_{01} + \partial_{01}\partial_{10} = 0$,

A présent nous sommes en mesure d'associer au (p, q)-simplexe feuilleté σ de V deux chaînes feuilletées de dimensions $(p-1, q)$, resp. $(p, q-1)$, de la manière suivante

$$\partial_{10}^{p,q}\sigma = \sigma\, \partial_{10}^{p,q}\Delta^{p,q}\,;\ \partial_{01}^{p,q}\sigma = \sigma\, \partial_{01}^{p,q}\Delta^{p,q}. \tag{4}$$

Nous obtenons alors les homomorphismes

$$\partial_{10}^{p,q} : C_{p,q}(V, G) \to C_{p-1,q}(V, G)\,;\ \partial_{01}^{p,q} : C_{p,q}(V, G) \to C_{p,q-1}(V, G). \tag{5}$$

Proposition 1.2. *Si $f : V \to W$ est une application feuilletée alors sont valables les égalités*

$$f_{\#(p-1,q)}\, \partial_{10}^{p,q} = \partial_{10}^{p,q}\, f_{\#(p,q)}\,;\ f_{\#(p,q-1)}\, \partial_{01}^{p,q} = \partial_{01}^{p,q}\, f_{\#(p,q)}.$$

Remarque 1.3. De (4) et de la remarque 1.2 il résulte

$$\partial_{10}^{p,q}\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, \sigma s_i\,; \qquad \partial_{01}^{p,q}\sigma = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{p+j} \sigma s^j,$$

où $s_i = (A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_p, B_0, \ldots, B_q)$, $s^j = (A_0, \ldots, A_p, B_0, \ldots, \hat{B}_j, \ldots, B_q)$.

En notant $\sigma s_i = \sigma_{(i)}$ et $\sigma s^j = \sigma^{(j)}$ nous pouvons écrire

$$\partial_{10}^{p,q}\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, \sigma_{(i)}\,;\ \partial_{01}^{p,q}\sigma = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{p+j} \sigma^{(j)}. \tag{6}$$

Les homomorphismes (5) vérifient les égalités de la proposition 1.1 et alors le complexe double $C(V, G) = \bigoplus_{p\geq 0,\, q\geq 0} C_{p,q}(V, G)$ peut être considéré comme un complexe simple, avec la graduation totale $C_n(V, G) = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}(V, G)$ et la différentielle totale $\partial^{p+q} = \partial_{01}^{p,q} \oplus \partial_{10}^{p,q}$.

Théorème 1.1. *Il existe les foncteurs covariants C'_q, C''_p de source la catégorie des variétés feuilletées et de but la catégorie des complexes de chaînes feuilletées, qui associent à la variété feuilletée V le complexe $(C'_q(V, G) = \bigoplus_{p\geq 0} C_{p,q}(V, G), \partial_{10})$, resp. $(C''_p(V, G) = \bigoplus_{q\geq 0} C_{p,q}(V, G), \partial_{01})$.*

Soient $H'_{pq}(V, G)$ et $H''_{pq}(V, G)$ les groupes d'homologie des complexes précédents. Les homomorphismes $f_{\#(p,q)}$ induisent les homomorphismes

$$f'_{*(p,q)} : H'_{pq}(V, G) \to H'_{pq}(W, G)\,;\ f''_{*(p,q)} : H''_{pq}(V, G) \to H''_{pq}(W, G)$$

de manière que les foncteurs $H'_q(_, G)$ et $H''_p(_, G)$ sont covariants.

2. Homotopie des chaînes feuilletées. Étant donné le (p, q)-simplexe feuilleté spécial $S_{p,q}$, posons $(A_i, 0) = A_i^0$, $(A_i, 1) = A_i^1$, $(B_j, 0) = B_j^0$, $(B_j, 1) = B_j^1$. Nous pouvons alors définir deux chaînes feuilletées spéciales de $R^{(n_1+1)+(n_2+1)}$, de dimensions $(p+1, q)$, resp. $(p, q+1)$, par les formules

$$P_{10}^{p,q}(S_{p,q}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (A_0^1, \ldots, A_i^1, A_i^0, \ldots, A_p^0, B_0^0, \ldots, B_q^0)$$

$$P_{01}^{p,q}(S_{p,q}) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{p+j} (A_0^1, \ldots, A_p^1, B_0^1, \ldots, B_j^1, B_j^0, \ldots, B_q^0).$$

On prolonge les opérateurs P_{10} et P_{01} par linéarité et on a

Proposition 2.1. *Les opérateurs P_{10} et P_{01} vérifient les identités*

$$\begin{aligned} &(\partial_{10}^{p+1,q} P_{10}^{p,q} + P_{10}^{p-1,q} \partial_{10}^{p,q})(S_{p,q}) = \\ &= (A_0^0, \ldots, A_p^0, B_0^0, \ldots, B_q^0) - (A_0^1, \ldots, A_p^1, B_0^0, \ldots, B_q^0) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &(\partial_{01}^{p,q+1} P_{01}^{p,q} + P_{01}^{p,q-1} \partial_{01}^{p,q})(S_{p,q}) = \\ &= (A_0^1, \ldots, A_p^1, B_0^0, \ldots, B_q^0) - (A_0^1, \ldots, A_p^1, B_0^1, \ldots, B_q^1). \end{aligned} \tag{9}$$

Compte tenu de la définition 2.1, [2], nous pouvons donner la suivante

Définition 2.1. *Deux (p, q)-simplexes feuilletés σ et σ' de V sont dits (0, 1)-homotopes s'il existe une application feuilletée $F : \Delta^{p,q} \times \Delta^q \times I \to V$ (F étant définie sur un voisinabe ouvert de $\Delta^{p,q} \times \Delta^q \times I$ dans $R^{q+2} \times R^{p+2}$, considéré comme variété feuilletée de codimension $p+1$) telle que*

$$F((u, a), (v, 0)) = \sigma(u, v),\ F((u, 1), (v, 1)) = \sigma'(u, v),\ (u, v) \in \Delta^{p,q}.$$

Remarque 2.1. Une condition nécessaire pour que σ et σ' soient (0, 1)-homotopes est $\sigma^a = \sigma'^a$, $a = 1, \ldots, n$, dans toute βf-carte locale de V (cf. [3] et [4]).

De la définition 2.1 et de la remarque 1.2 il résulte que l'application F vérifie les égalités

$$\sigma = F_{\#(p,q)}(X_0^1, \ldots, X_p^1, Y_0^1, \ldots, Y_q^1)\,;\ \sigma' = F_{\#(p,q)}(X_0^1, \ldots, X_p^1, Y_0^0, \ldots, Y_q^0). \tag{10}$$

En appliquant $F_{\#(p,q)}$ à l'égalité (9), pour $\Delta^{p,q}$, nous obtenons

$$\sigma' - \sigma = \partial_{01}^{p,q+1} F_{\#(p,q+1)} P_{01}^{p,q} \Delta^{p,q} + F_{\#(p,q} P_{01}^{p,q-1} \partial_{01}^{p,q} \Delta^{p,q}$$

et si on pose $D_{01}^{p,q} = F_{\#(p,q+1} P_{01}^{p,q}$ l'égalité précédente devient

$$\sigma' - \sigma = \partial_{01}^{p,q+1} D_{01}^{p,q} \Delta^{p,q} + D_{01}^{p,q-1} \partial_{01}^{p,q} \Delta^{p,q}. \tag{11}$$

Définition 2.2. *Les (p, q)-chaînes feuilletées $l = \sum_i \alpha_i \sigma_i$ et $l' = \sum_i \alpha'_i \sigma'_i$ de V sont (0, 1)-homotopes si $\alpha_i = \alpha$ et si les simplexes σ_i, σ'_i sont (0, 1)-homotopes.*

Proposition 2.2. *Si les (p, q)-chaînes feuilletées l et l' sont (0, 1)- homotopes alors*

$$l' - l = \partial_{01}^{p,q+1} D_{01}^{p,q} \Delta^{p,q} + D_{01}^{p,q-1} \partial_{01}^{p,q} \Delta^{p,q}$$

où $D_{01}^{p,q} = \sum_i \alpha_i D_{01,i}^{p,q}$.

Etant donnée la (p, q)-chaîne $l = \sum_i \alpha_i \sigma_i$, telle que $\alpha_i \neq 0$, posons $|l| = \bigcup_i |\sigma_i|$, où $|\sigma_i| = \sigma_i(\Delta^{p,q})$. Alors nous pouvons énoncer la

Proposition 2.3. $|l_1 + l_2| \subseteq |l_1| \cup |l_2|$; $|\partial_{10}^{p,q} l| \subseteq |l|$; $|\partial_{01}^{p,q} l| \subseteq |l|$; $|al| \subseteq |l|$, $a \in R$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Godement R. — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris 1973.
2. Pitiş Gh. — *Une théorie de cohomologie sur la catégorie des variétés feuilletées*. Studia Univ. Babeş-Bolyai (à paraître).
3. Vaisman I. — *Variétés riemanniennes feuilletées*. Czechosl. Math. Journal 21 (1971) 46—75.
4. Vaisman, I. — *Cohomology and differential forms*. Marcel Dekker, Inc., New-York, 1973.

Université de Braşov
Faculté de Mathématiques
Str. Karl Marx 50
2200 BRAŞOV

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supl'ment la tomul XXVII, s. I a, 1981

FOLIATIONS OF ALMOST AFFINE SPACES

BY

ANDREI RUGINĂ

To the memory of Professor Mendel Haimovici

1. Introduction. The notion of almost affine space was introduced by R. Miron in [10], as a result of his investigations concerning the independence [12, 14, 15, 16, 17] of the systems of axioms for the vector spaces and point-wise affine spaces [20, 23].

Let M be a usual affine space over a skew-field K. One drops the axioms $1^* x = x$, $\forall x$, and $x + y = y + x$, $\forall x, y$ for the tangent vector space TM of the K-affine space M, and obtains a new structure on M, called a structure of K-almost affine space ; TM is called the associated K-almost vector space of M. We have described in [21] a geometrical model for this structure, which has some interesting incidence properties. Having as a main purpose to rediscover these properties in any almost affine space, starting from the axioms, we introduce in this paper some geometrical objects, analogous to the usual affine lines, which satisfy a minimal number of incidence properties, similar to the usual ones. We point out the conditions of compatibility between the modular component uTM of TM, and the groupal one, zTM, which ensure some other natural properties.

2. K-almost affine spaces. In this section we recall the definition of the notion of K-almost affine space, and its main properties. Let $M = \{A, B, C, \ldots\}$ be a set whose elements are called *points* and let ρ be an equivalence relation on the set $M \times M$. The quotient set $(M \times M)/\rho = TM$ is called the set of *vectors* of M. Let K be a skew-field, and let 1 be its identity.

Definition 1. *The set $M \neq \Phi$ is called a K-almost affine space if :*

(a) An equivalence relation ρ on the set $M \times M$, which defines the quotient set $(M \times M)/\rho = TM$ of the vectors of M is given ;

(b) There exists a mapping $*: K \times TM \to TM$; $*(\alpha, x) = \alpha * x$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in TM$;

(c) The following two groups of axioms are verified :

First group of axioms.

I_1. $\forall A \in M$, $\forall x \in TM$, $\exists B \in M : \overrightarrow{AB} = x$.

I_2. $\forall A, B, A' \in M : \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B} \Rightarrow A = A'$.

I_3. $\forall A, B, C, A', B', C' \in M$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.