$$A_i(t)=\begin{cases}0, & 0<t<\dfrac{\sqrt{h}}{c_i},\\ t-\dfrac{\sqrt{h}}{c_i}, & t>\dfrac{\sqrt{h}}{c_i},\end{cases}\qquad B_i(t)=\begin{cases}0, & 0<t<\dfrac{\sqrt{h}}{c_i},\\ \dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{\sqrt{h}}{c_i}\right)^2, & t>\dfrac{\sqrt{h}}{c_i},\end{cases}\qquad (i=1,2,4).$$

The case when an impulsive body couple M_i is applied at the origin, the body force vector being null, can be treated similarly.

The same method may be applied in the general case of an arbitrary distribution of body forces and body couples.

4. Final conclusions. In the case of impulsively concentrated body forces we notice from (3.13) that the displacements u_1, u_2, u_3 have infinite discontinuities at the moments $t=\dfrac{\sqrt{h}}{c_1}$, $t=\dfrac{\sqrt{h}}{c_2}$ due to the presence of Dirac delta functions while at the moment $t=\dfrac{\sqrt{h}}{c_4}$ they have no discontinuities because the functions $A_4(t)$, $B_4(t)$ vanish simultaneously.

On the other hand, the displacement components u_1, u_2, u_3 suffer jumps at $t=\dfrac{\sqrt{h}}{c_1}$, $t=\dfrac{\sqrt{h}}{c_2}$, given by $H(t)$.

Concerning the rotation components φ_1 and φ_2 we observe that they suffer jumps at $t=\dfrac{\sqrt{h}}{c_2}$, $t=\dfrac{\sqrt{h}}{c_4}$, given by $H(t)$.

REFERENCES

1. Nowacki W., Nowacki W.K. — *The generation of waves in an infinite microplar elastic body*. Proc. Vibr. Prob. 10 (1969).
2. Nowacki W., Nowacki W.K. — *Propagation of elastic waves in a microplar cylinder*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Tech. 17 (1969).
3. Shanker M.U., Dhaliwal R.S. — *Dynamic coupled thermoelastic problems in micropolar theory*. Int. J. Eng. Sci. 13 (1975).
4. Sengupta P.R., Ghosh B. — *Generation of waves in an infinite microplar elastic solid due to the action of concentrated forces and body couples*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Tech. 14 (1976).
5. Watson G.N. — *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press (1958).
6. Erdely A. — *Tables of integral transforms*. McGraw-Hill (1954).

Department of Mathematics
Polytechnic Institute of Iaşi
Iaşi, R.S. România

Iaşi, October 23, 1981

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

QUELQUES RESULTATS SUR LA DEFORMATION DES PLAQUES

PAR

I. IBĂNESCU

Dédié à la mémoire du Professeur Mendel Haimovici

Dans [1] on donne une nouvelle théorie sur la déformation d'un corps avec microstructure dans laquelle le tenseur de contrainte est symetrique. En utilisant cette théorie nous avons trouvé les équations d'équilibre d'une plaques élastique [3].

Dans la Note présente on trouve généralisations du théorème de Clapeyron et des relations de réciprocitées de Betti.

1. Les relations de base. On considère la plaque comme un corps qui occupe le domaine $V=\mathcal{D}\times[-h,h]$ où $\mathcal{D}$ est un domaine du plan $0x_1x_2$ avant la frontière Γ, et $2h$ est l'épaisseur de la plaque. La surface du corps $\Sigma=S\cup S^+\cup S^-$ se compose de la surface latérale S et de S^- et S^+ qui sont les bases de la plaque.

On supposera que le corps se compose d'un materiau avec microstructure et de plus que le tenseur de contrainte est symetriques. Les équations d'équilibre du corps sont celles dans [1], c'est-à-dire :

— les équations d'équilibre ;

$$t_{ji,j}+\rho g_i=0,\quad C_{ji,j}+\varepsilon_{ijk}t_{jk}+\rho m_i=0. \tag{1.1}$$

— les relations géométriques ;

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\quad \varkappa_{ij}=\varphi_{j,i} \tag{1.2}$$

— les équations constitutives ;

$$\begin{aligned} t_{ij}&=(\lambda\theta+\omega\bar{\theta})\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}+\pi(\varkappa_{ij}+\varkappa_{ji})\\ C_{ij}&=(\omega\theta+\alpha\bar{\theta})\delta_{ij}+2\pi\varepsilon_{ij}+\beta\varkappa_{ij}+\gamma\varkappa_{ji}\end{aligned} \tag{1.3}$$

ou

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}&=\frac{1+\nu_1}{E_1}t_{ij}+\frac{1+\nu_2}{2E_2}(C_{ij}+C_{ji})-\frac{\nu_1}{E_1}s\delta_{ij}-\frac{\nu_2}{E_2}\bar{s}\delta_{ij}\\ \varkappa_{ij}&=\frac{1+\nu_2}{E_2}t_{ij}+\left(\frac{1+\nu_3}{E_3}-A\right)C_{ij}+AC_{ji}-\frac{\nu_2}{E_2}s\delta_{ij}-\frac{\nu_3}{E_3}\bar{s}\delta_{ij}\end{aligned} \tag{1.4}$$

avec

$$\begin{aligned} \theta&=\varepsilon_{mm}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}, & s&=T_{mm}=t_{11}+t_{22}+t_{33},\\ \bar{\theta}&=\varkappa_{mm}=\varkappa_{11}+\varkappa_{22}+\varkappa_{33}, & \bar{s}&=C_{mm}=c_{11}+c_{22}+c_{33}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

En utilisant les notations :

$$\frac{1}{\Delta}=\left(\frac{1-2\nu_2}{E_2}\right)^2-\frac{1-2\nu_1}{E_1}\,\frac{1-2\nu_3}{E_3}=\frac{1}{(3\lambda+2\mu)(3\alpha+\beta+\gamma)-(3\omega+2\pi)^2}=$$

$$(1.6)\qquad \frac{1}{2\Delta_1}=\frac{1+\nu_1}{E_1}\,\frac{1+\nu_3}{E_3}-\left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)^2=\frac{1}{2[\mu(\beta+\gamma)-2\pi^2]},$$

$$\Delta_3=\frac{1-\nu_1}{E_1}\,\frac{1-\nu_3}{E_3}-\left(\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)^2,$$

on exprime les constantes λ, μ, π, ω, α, β, γ en fonction de ν_1, ν_2, ν_3, E_1, E_2, E_3 et A ;

$$\lambda=-\frac{2\Delta_1}{3}\,\frac{1+\nu_3}{E_3}+\frac{\Delta}{3}\,\frac{1-2\nu_3}{E_3},\qquad \omega=\frac{2\Delta_1}{3}\,\frac{1+\nu_2}{E_2}-\frac{\Delta}{3}\,\frac{1-2\nu_2}{E_2}$$

$$\alpha=-\frac{2\Delta_1}{3}\,\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{\Delta}{3}\,\frac{1-2\nu_1}{E_1},\qquad \mu=\Delta_1\frac{1+\nu_3}{E_3};\ \pi=-\Delta_1\frac{1+\nu_2}{E_2}$$

$$(1.7)\qquad \beta\left(\frac{1+\nu_3}{E_3}-2A\right)=\Delta_1\left[2\,\frac{1+\nu_1}{E_1}\,\frac{1+\nu_3}{E_3}-2A\,\frac{1+\nu_1}{E_1}-\left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)^2\right],$$

$$\gamma\left(\frac{1+\nu_3}{E_3}-2A\right)=\Delta_1\left[\left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)^2-2A\,\frac{1+\nu_1}{E_1}\right].$$

L'énergie interne du corps est donnée par

$$(1.8)\qquad 2\rho\psi=\lambda\theta^2+2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+2\omega\theta\bar{\theta}+2\pi\varepsilon_{ij}(\varkappa_{ij}+\varkappa_{ji})+$$
$$+\alpha\bar{\theta}^2+\beta\varkappa_{ij}\varkappa_{ij}+\gamma\varkappa_{ji}\varkappa_{ij}$$

ou encore

$$2\rho\psi=\frac{1+\nu_1}{E_1}t_{ij}t_{ij}+\frac{1+\nu_2}{E_2}\left[\frac{3}{2}+\Delta_1\frac{1+\nu_1}{E_1}\left(\frac{1+\nu_3}{E_3}-2A\right)\right]t_{ij}C_{ij}+$$

$$(1.9)\qquad +2\,\frac{1+\nu_2}{E_2}\Delta_1\left[A\,\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)^2\right]t_{ij}C_{ji}+$$

$$+\left(\frac{1+\nu_3}{E_3}-A\right)C_{ij}C_{ij}+AC_{ij}C_{ji}-\frac{\nu_1}{E_1}s^2-\frac{\nu_3}{E_3}\bar{s}^2-2\frac{\nu_2}{E_2}s\bar{s}$$

En utilisant les mêmes notations que celles de M a n o l a c h i dans [2] et en supposant que les bases de la plaque ont les équations $x_3=\pm h$ nous écrirons les conditions aux limites sur les bases sous la forme :

$$\hat{P}_i(x_1,x_2,\pm h)=\pm\frac{1}{2}p(x_1,x_2)\delta_{i3},$$

$$(1.10)\qquad \hat{M}_\alpha(x_1,x_2;\pm h)=\pm\frac{1}{2}q_\alpha(x_1,x_2)\quad(\alpha=1,2),\ \hat{M}_3(x_1x_2,\pm h)=0.$$

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sur la surfaces latérale ont été trouvées dans [3].

$$\frac{2h^3}{3}(\lambda+2\mu)\Delta\Delta w-p(x_1,x_2)=0,$$

$$2h[\beta\Delta\varphi_\lambda+(\alpha+\gamma)\varphi_{\rho,\rho\lambda}]+q_\lambda=0,\ (\lambda=1,2)$$

$$(1.11)\qquad \frac{2h^3}{3}\left[\lambda(\Delta w)_{,n}+2\mu\Delta w_{,\beta}n_\beta+2\mu\frac{\partial}{\partial s}(w_{,\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\beta}n_\lambda n_\alpha)\right]-M_{nt,s}=0,$$

$$\frac{2h^3}{3}(\lambda\Delta w+2\mu w_{,\alpha\beta}n_\alpha n_\beta)+\hat{M}n=0,$$

$$h(2\alpha\varphi_{\rho,\rho}n_\lambda+2\beta\varphi_{\lambda,\beta}n_\beta+\gamma\varphi_{\alpha,\lambda}n_\alpha+\gamma\varphi_{\beta,\lambda}n_\beta)-\hat{R}_{\lambda n}=0.$$

2. Le théorème de Clapeyron. Dans une position d'équilibre de la plaque, l'énergie interne est égale à la moitié du travail mécanique des forces extérieures. Pour démontrer ce théoréme on intègre les équations d'équilibre par rapport à x_3 entre $-h$ et $+h$; en utilisant les notations :

$$(2.1)\qquad M_{\alpha\beta}=\int_{-h}^{h}x_3t_{\alpha\beta}dx_3,\quad Q_\alpha=\int_{-h}^{h}t_{\alpha3}dx_3,\quad R_{\rho\lambda}=\int_{-h}^{h}C_{\rho\lambda}dx_3,$$

on trouve :

$$(2.2)\qquad M_{\beta\alpha,\beta}-Q_\alpha=0\quad Q_{\beta,\beta}+p(x_1x_2)=0,\quad R_{\beta\alpha,\beta}+q_\alpha(x_1x_2)=0.$$

On peut multiplier la première équation (2.2) par $w_{,\alpha}$, la deuxième par w et la troisième par φ_α et on considère l'intégrale

$$(2.3)\qquad I=\int_{\mathcal{D}}(pw+q_\alpha\varphi_\alpha)d\tau$$

qui d'après la première équation (2.2) peut s'écrire

$$(2.4)\qquad I=\int_{\mathcal{D}}[-(M_{\beta\alpha,\beta}-Q_\alpha)w_{,\alpha}+pw+q_\alpha\varphi_\alpha]d\tau.$$

Dans cette intégrale on remplace et q par les expressions tirées de (2.2) ; en utilisant le théorème de la divergence on trouve :

$$(2.5)\qquad I=-\int_{\Gamma}M_{\beta\alpha}w_{,\alpha}+Qw_\beta+R_{\beta\alpha}u_\alpha)n\beta d\tau+\int_{\mathcal{D}}(M_{\beta\alpha}w_{,\alpha\beta}+R_\beta\varphi_{\alpha,\beta})d\tau$$

Dans cette intégrale on remplace les dérivées de w par

$$(2.6)\qquad w_{,1}=w_{,n}n_1-w_{,s}n_2,\quad w_{,2}=w_{,n}n_2+w_{,s}n_1$$

et on obtient :

$$(2.7)\qquad I=-\int_{\Gamma}(-\hat{M}_nw_{,n}+\hat{R}_{\rho n}\varphi_\rho+\hat{V}_nw)ds+\int_{\mathcal{D}}(M_{\beta\alpha}w_{,\alpha\beta}+R_{\beta\alpha}\varphi_{\alpha,\beta})d\tau$$

où

$$(2.8)\qquad \hat{V}_n=\hat{Q}_n-M_{nt,s}.$$

En tenant compte que les $M_{\alpha\beta}$ et $R_{\alpha\beta}$ sont données par :

$$(2.9)\qquad M_{\alpha\beta}=\frac{2h^3}{3}(-\lambda\Delta w\delta_{\alpha\beta}-2\mu w_{,\alpha\beta}),\quad R_{\alpha\beta}=\frac{2h^3}{3}[-\omega\Delta w\delta_{\alpha\beta}-2\pi w_{,\alpha\beta}]$$

et en remplaçant (2.6) et (2.9) dans l'expression de l'énergie interne de la plaque, on trouve :

$$(2.10)\quad 2\rho\psi = \iint_{\mathcal{D}} \frac{2h^3}{3}\,[\lambda(\Delta w)^2 + 2\mu w_{,\alpha\beta} w_{,\alpha\beta}]\,d\tau + 2h\iint_{\mathcal{D}} [\alpha\mu_{\lambda,\lambda}\varphi_{\rho,\rho} + \beta\mu_{\alpha,\beta}\varphi + \gamma\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\alpha}]\,d\tau\,;$$

donc l'énergie interne de la plaque prend la forme :

$$(2.11)\qquad 2\rho\psi = \iint_{\mathcal{D}} (M_{\beta\alpha} w_{,\alpha\beta} + R_{\beta\alpha}\varphi_{\alpha,\beta})\,d\tau.$$

Maintenant la relation (2.7) peut être écrite

$$(2.12)\qquad \iint_{\mathcal{D}} (pw + q_\rho\varphi_\rho)\,d\tau + \int_{\Gamma} (-\hat{M}_n w_{,n} + \hat{\Gamma}_n w + \hat{R}_{\rho n}\varphi_\rho)\,ds = 2\rho\psi$$

qui représente le théorème de Clapeyron.

3. Théoréme. *L'énergie interne de la plaque est positive-définie si e seulement si les conditions suivantes sont remplies :*

$$(3.1)\quad \mu>0,\quad +\mu>0,\quad \alpha+\beta+\gamma>0,\quad 2\alpha+\beta+\gamma>0,\quad \beta+\gamma>0,\quad \beta-\gamma>0.$$

Démonstration. On considère les mesures bidimensionelles de la déformation $k_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ qui ont été introduites dans [2].

$$(3.2)\qquad k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}\varkappa_{\rho\delta} = \varphi_{\delta,\rho}\,,$$

L'expresion de l'énergie interne en fonction de $k_{\alpha\beta}, \varkappa_{\delta\rho}$ est donnée par :

$$(3.3)\qquad 2\rho\psi = \frac{2h^3}{3}\,[\lambda k_{\alpha\alpha}k_{\beta\beta} + 2\mu k_{\alpha\beta}k_{\alpha\beta} + 2h[\alpha\varkappa_{\rho\rho}\varkappa_{\alpha\alpha} + \beta\varkappa_{\rho\delta}\varkappa_{\rho\delta} + \gamma\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa_{\beta\alpha}].$$

On pose :

$$(3.4)\qquad k_{11} = \varepsilon_1,\ k_{22} = \varepsilon_2,\ k_{12} = \varepsilon_3,\ \varkappa_{11} = \varepsilon_4,\ \varkappa_{22} = \varepsilon_5,\ \varkappa_{(12)} = \varepsilon_6,\ \varkappa_{(12)} = \varepsilon_7,$$

avec

$$(3.5)\qquad \varkappa_{(12)} = \frac{\varkappa_{12} + \varkappa_{21}}{2}\,,\quad \varkappa_{(12)} = \frac{\varkappa_{12} - \varkappa_{21}}{2}\,.$$

Avec les notations (3.4), l'énergie interne de la plaque peut être écrite

$$(3.6)\qquad 2\rho\psi = a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j,$$

avec les coefficients a_{ij} donnés par :

$$(3.7)\qquad \begin{gathered} a_{11} = a_{22} = \frac{2h^3}{3}(\lambda + 2\mu),\quad a_{66} = 2h\,.\,2(\beta+\gamma), \\ a_{12} = a_{21} = \frac{2h^3}{3}\,,\quad a_{77} = 4h(\beta-\gamma), \\ a_{33} = 2\mu\,.\,\frac{4h^3}{3}\,,\quad a_{44} = a_{55} = 2h(\alpha+\beta+\gamma),\quad a_{46} = a_{51} = 2h\,.\,2\alpha \end{gathered}$$

les autres coefficients étant zero.

D'après le théor me qui afirme que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique soit positive-définie est que tous les déterminants principaux de la matrice de la forme soient possitifs [4], on trouve les conditions (3.1).

4. Les relations de réciprocité de Betti. On considère le vecteur $\vec{F}$ avec les composantes $(p; q_1\ q_2)$ et l'opérateur $\mathcal{L}\vec{W}$ de composantes $\mathcal{L}_1\vec{W}$ $\mathcal{L}_2\vec{W}$, $\mathcal{L}_3\vec{W}$ où $\mathcal{L}_i(\vec{W})$ sont les opérateurs donnés par :

$$(4.1)\qquad \mathcal{L}_1\vec{W} = \frac{2h^3}{3}(\lambda + 2\mu)\Delta\Delta w,\quad \mathcal{L}_{\rho+1}\vec{W} = -2h[(\alpha+\gamma)\varphi_{\rho,\rho\lambda} + \beta\Delta\varphi_\lambda].$$

Les équations d'équilibre de la plaque deviennent :

$$(4.2)\qquad \mathcal{L}\vec{W} = \vec{F}.$$

On considère la forme bilinéaire

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} 2\theta(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{2h^3}{3}\,[\lambda\Delta w\Delta v + 2\mu v_{,\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}] + \\ + 2h[\alpha\varphi_{\lambda,\lambda}\psi_{\beta,\beta} + \beta\varphi_{\lambda,\alpha}\psi_{\lambda,\alpha} + \gamma\varphi_{\alpha,\beta}\psi_{\beta,\alpha}], \end{aligned}$$

où les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ ont les composantes $\vec{V}(v, \psi_1, \psi_2)$, $\vec{W}(w, \varphi_1\ \varphi_2)$.

Soit encore la forme :

$$(4.4)\qquad \mathcal{D}(\vec{W}, \vec{V}) = -M_n(\vec{V})W_{,n} + V_n(\vec{V})W + R_{\rho n}(\vec{V})\varphi_\rho.$$

On multiplie la relation (4.2) par le vecteur $\vec{V}$ et on intégre sur le domaine $\mathcal{D}$. On trouve :

$$(4.5)\qquad \int_{\mathcal{D}} \vec{V}\mathcal{L}\vec{W}\,d\tau = \int_{\mathcal{D}} \vec{F}\vec{V}\,d\tau.$$

En faisant les calculs, on constate que

$$(4.6)\qquad \int_{\mathcal{D}} \vec{F}\vec{V}\,d\tau = \int_{\mathcal{D}} (pv + q_1\psi_1 + q_2\psi_2)\,d\tau$$

et pour l'intégral du membre gauche on trouve :

$$(4.7)\qquad \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}L\vec{W}\,d\tau = \iint_{\mathcal{D}} v\,\frac{2h^3}{3}(\lambda + 2\mu)\Delta\Delta w\,d\tau - 2h\iint_{\mathcal{D}} [(\alpha+\gamma)\varphi_{\rho,\rho\lambda}\psi_\lambda + \beta\Delta\varphi_\lambda\psi_\lambda]\,d\tau.$$

On calcule les intégrales

$$(4.8)\qquad \lambda\iint_{\mathcal{D}} v\Delta\Delta w\,d\tau = \lambda\iint_{\mathcal{D}} \Delta v\Delta w\,d\tau + \lambda\int_{\Gamma} v\Delta w_{,n}\,ds - \lambda\int_{\Gamma} \Delta w v_{,n}\,ds$$

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} 2\mu\iint_{\mathcal{D}} v\Delta\Delta w\,d\tau = 2\mu\iint_{\mathcal{D}} v_{,\lambda\mu}w_{,\lambda\mu}\,d\tau + 2\mu\int_{\Gamma} v\Delta w_{,n}\,d\tau - \\ - 2\mu\int_{\Gamma} \rho n w_{,\alpha\mu}\,n_\alpha n_\mu\,ds - 2\mu\int_{\Gamma} v\,\frac{\partial}{\partial s}\,(\varepsilon_{\rho\lambda}w_{,\rho\mu}n_\mu n_\lambda)\,ds \end{aligned}$$

$$\alpha \iint_{\mathcal{D}} \varphi_{\rho,\rho\lambda}\psi_\lambda d\tau = \alpha \int_{\Gamma} \varphi_{\rho,\rho}\psi_\lambda n_\lambda d\tau - \alpha \iint_{\mathcal{D}} \varphi_{\rho,\rho}\psi_{\lambda,\lambda} d\tau \tag{4.10}$$

$$\mu \iint_{\mathcal{D}} \varphi_{\rho,\rho\lambda}\psi_\lambda d\tau = \gamma \int_{\Gamma} \varphi_{\rho,\lambda}\psi_\lambda n_\rho ds - \gamma \iint_{\mathcal{D}} \varphi_{\rho,\lambda}\psi_{\lambda,\rho} d\tau. \tag{4.11}$$

$$\beta \iint_{\mathcal{D}} \psi_\lambda \Delta\varphi_\lambda d\tau = \beta \int_{\Gamma} \varphi_{\lambda\rho}\psi_\lambda n_\rho ds - \beta \iint_{\mathcal{D}} \varphi_{\lambda,\rho}\psi_{\lambda,\rho} d\tau. \tag{4.12}$$

On porte les relations (4.8)—(4.12) dans (4.5) et on trouve :

$$\iint_{\mathcal{D}} \vec{V}\mathcal{L}\vec{W} d\tau = 2\iint_{\mathcal{D}} \mathcal{P}(\vec{V},\vec{W}) d\tau - \int_{\Gamma} \mathcal{P}(\vec{V}, \vec{W})\, ds \tag{4.13}$$

qui est la première formule de Betti.

Si le vecteur $\vec{V}$ coïncide avec $\vec{W}$, alors on trouve la deuxième formule formule de Betti :

$$\iint_{\mathcal{D}} \vec{W}\mathcal{L}\vec{W} d\tau = 2\iint_{\mathcal{D}} \rho\psi(\vec{W}) d \quad - \int_{\Gamma} \mathcal{P}(\vec{W}, \vec{W}) ds \tag{4.14}$$

La troisième formule de Betti est donné par :

$$\iint_{\mathcal{D}} (\vec{V}\mathcal{L}\vec{W} - \vec{W}\mathcal{L}\vec{V}) d\tau = \int_{\Gamma} [\mathcal{P}(\vec{V}, \vec{W}) - \mathcal{P}(\vec{W}, \vec{V})] ds. \tag{4.15}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Borş C.I. — *Deformable solids with microstructure having a symmetric stress tensor*. An. şt. Univ. Iaşi, T. XXVII, 1981.
2. Manolachi A. — *On the bending of elastic plates in asymmetrical elasticity*. An. şt. Univ. Iaşi, T. XIX, 1973.
3. Ibănescu I. — *Les équations des plaques microfolaires avec les contraintes symetriques*. Bul. Inst. Pol. Iaşi, 1981.
4. Tişkevici R.I. şi Fedenko A.S. — *Lineinaia alghebra i analiticeskaia ghcometria*. Minsk, 1968.

Department of Mechanics
Polytechnical Institute
6600 — Iaşi, R.S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

TORSION PROBLEM IN THE THEORY OF NON-SIMPLE ELASTIC MATERIALS

BY

D. IEŞAN

To the memory of Professor Mendel Haimovici

1. Introduction. The importance of Saint-Venant's problem requires no emphasis. Indeed, a comprehensive bibliography of the vast and varied literature to which the work contained in [1] has given impetus would multiply the length of this study.

The elastic energy of non-simple media depends on the space derivatives of the displacement vector up to the n-th order, $n>1$. In the case that $n=2$, we speak of the first strain-gradient theory (see [2], [3]).

This paper is concerned with the torsion problem of elastic cylinders in the first strain-gradient theory. We prove that this problem requires the solution of a special boundary value problem for a fourth order elliptic equation in two independent variables. We are led to a new torsional rigidity and prove that it is positive. For simplicity, we restricted our attention to homogeneous and isotropic bodies. Following [4] — [6] we can extend the method in order to study the case of inhomogeneous and anisotropic cylinders.

The results are used to study the torsion of a circular cylinder.

2. Basic Equations. Throughout this paper a rectangular Cartesian coordinate system $Ox_i (i=1, 2, 3)$ is used. We shall employ the usual summation and differentiation conventions : Greek subscripts are understood to range over the integers (1, 2), whereas Latin subscripts (unless otherwise specified) to the range (1, 2, 3) ; summation over repeated subscripts is implied and subscripts preceded by a comma denote partial differentiation with respect to the corresponding Cartesian coordinate.

We consider a body which occupies the bounded region B with Lipschitz boundary ∂B consisting of a finite number of smooth surfaces. Let Γ_α be intersections of two adjoined smooth surfaces and $\Gamma = \bigcup \Gamma_\alpha$.

The basic equations of the equilibrium theory, in the absence of body forces, are [3].

— the equations of equilibrium

$$\tau_{ji,j} - \mu_{\alpha ji,\alpha j} = 0, \tag{2.1}$$

— the constitutive equations

$$\tau_{ij} = \lambda e_{rr}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij},$$

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{2}\alpha_1(\varkappa_{rri}\delta_{jk} + 2\varkappa_{irr}\delta_{ij} + \varkappa_{rrj}\delta_{ik}) + \alpha_2(\varkappa_{irr}\delta_{jk} + \varkappa_{jrr}\delta_{ik}) + 2\alpha_3\varkappa_{rrk}\delta_{ij} + \tag{2.2}$$

$$+ 2\alpha_4\varkappa_{ijk} + \alpha_5(\varkappa_{kij} + \varkappa_{kij}),$$