where W is the potential energy density and $Nu_i = u_{i,j}n_j$. In the case of the torsion problem we have

$$(4.17) \qquad u_\alpha = 0,\ Nu_3 = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma_1,\ u_\alpha = \varepsilon_{3\beta\alpha}\tau l x_\beta,\ Nu_3 = 0 \ \text{on}\ \Sigma_2.$$

If we take into account (3.1), (3.10), (4.3) and (4.17), from (4.16) we obtain

$$(4.18) \qquad 2\int_B W dv = \tau l \int_\Sigma [x_1\tau_{32} - x_2\tau_{31} + 2(\mu_{132} - \mu_{231})] da = \tau^2 l D,$$

so that we conclude that $D > 0$.

Thus, if the torsion function is known, then the constant τ is determined by (4.14). The torsion problem is solved.

Example. In what follows we use the results established in this section in order to study the torsion of a circular cylinder. We assume that L is a circle of radius a. Axis Ox_3 of the coordinate system is taken along the axis of the cylinder. In this case $u_\alpha = x_\alpha/a$, so that the torsion function satisfies the equation (4.5) and the conditions $\mathfrak{M}\varphi = 0$, $\mathfrak{N}\varphi = 0$ on L. We can take $\varphi = 0$. From (4.15) we obtain the torsional rigidity

$$D = \frac{1}{2}\pi\mu a^4 + 4(2\alpha_4 - \alpha_5)\pi a^2.$$

In the classical theory of elasticity, the torsional rigidity is given by

$$D_c = \frac{1}{2}\pi\mu_c a^4 ,$$

where the subscript c is used to denote quantities in classical theory.

The extension, bending and flexure problem will be presented in another paper.

REFERENCES

1. Saint-Venant de A.J.C.B. — *Mémoire sur la torsion des prismes.* Mém. savants étrangers, 14(1855), 233—560.
2. Toupin R.A. — *Theories of elasticity with couple stresses.* Arch. Rational Mech. Anal., 17(1964), 85—112.
3. Mindlin R.D. and Eshel, N.N. — *On first strain-gradient theories in linear elasticity.* Int. J. Solids and Structures, 4(1968), 75—95.
4. Ieşan D. — *Saint-Venant's problem for inhomogeneous bodies.* Int. J. Engng. Sci., 14(1976), 353—360.
5. Ieşan D. — *Saint-Venant's problem for inhomogeneous and anisotropic elastic bodies.* J. Elasticity, 6(1976), 277—294.
6. Ieşan D. — *Saint-Venant's problem for heterogeneous anisotropic elastic solids,* Ann. Mat. Pura. Appl., (IV), 108(1976), 149—159.
7. Hlavacek I., Hlavacek M. — *On the existence and uniqueness of solution and some variational principles in linear theories of elasticity with couple-stresses,* Aplikace matematiky, 14(1969), 411—427.
8. Fichera G. — *Existence theorems in elasticity.* In vol. VI a/2 of Handbuch der Physik, edited by S. Flügge, Springer, Berlin, 1972.

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
6600—Iaşi, R.S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

SUR L'ESTIMATION DANS LA RÉSOLUTION APPROXIMATIVE D'UN PROBLÈME PARABOLIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

PAR

I. IONESCU et I. MOLNAR

Dédié à la mémoire du Professeur Mendel Haimovici

1. Introduction. Le but de cet article est de présenter une méthode de résolution approximative du problème mixte pour l'équation parabolique la plus simple, ayant les données nulles à la frontière, et aussi d'obtenir une estimation de l'erreur dans la norme de l'espace $L^2(\Omega)$, sous certaines suppositions de régularité pour la condition initiale et pour la frontière du domaine. Le résultat principal de cet ouvrage est le Théorème 4.1., qui établit l'estimation du type $\|u^n - u^n_{kh}\| \leqslant O(h+k)$. La méthode consiste dans la discrétisation relativement à la variable temps, d'où il résulte une suite de problèmes elliptiques correspondants aux temps fixés, qui seront résolus d'une manière récursive par la méthode des éléments finis. Le problème qui conduit à la solution approximative peut être résolu à l'aide du calculateur.

On utilisera les notations suivantes :

$(\cdot,\cdot)$-le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$: $(u, v) = \int_\Omega uv dx$

$\|\cdot\|$-la norme dans l'espace $L^2(\Omega)$: $\|v\| = (v, v)^{1/2}$

$H^j(\Omega)$, $j = 1,2$-l'espace de Sobolev, muni de la norme $\|\cdot\|_j$:

$$\|v\|_j = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant j} \|D^\alpha v\|^2\Big)^{1/2}$$

$H^1_0(\Omega)$-l'espace $\overline{C^\infty_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$

$$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$$

$$\nabla = (\partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2)$$

On note par C une constante positive générique indépendante des h, k, n, g.

On considère pour $u = u(x, t)$ le problème mixte représenté par les conditions suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = g(x) & x \in \Omega, \qquad t = 0 \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de R^2 ayant la frontière $\partial\Omega$, et g une fonction donnée.

On introduit la classe suivante de fonctions :

$$\mathfrak{U} = C([0, T] ; L^2(\Omega)) \cap C^1((0, T) ; L^2(\Omega)) \cap C((0, T) ; H_0^1(\Omega)).$$

Pour $g \in L^2(\Omega)$, on appelle solution généralisée du problème de Cauchy-Dirichlet, une fonction

$$u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

1° $$u \in \mathfrak{U}$$

2° $$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v\right) + (\nabla u, \nabla v) = 0 \quad \forall t \in (0, T), \qquad \forall v \in \mathfrak{U}$$

3° $$u(0) = g.$$

On note par $\{\psi_i\}_{i \in N}$ les fonctions propres généralisées du problème de Dirichlet se rapportant à l'opérateur $-\delta$, et par $\{\lambda_i\}_{i \in N}$ les valeurs propres associées, donc

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi_i \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ (\nabla\psi_i, \nabla v) = \lambda_i(\psi_i, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall i \in N. \end{cases}$$

Les valeurs propres λ_i sont des nombres positifs et forment une suite monotone croissante, et les fonctions propres ψ_i forment un système orthonormé et complet dans l'espace $L^2(\Omega)$. On en conclut que toute fonction $v \in L^2(\Omega)$ est représentée par

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (v, \psi_i)\psi_i,$$

et on a l'égalité

$$(3) \qquad \|v\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (v, \psi_i)^2\right)^{1/2}.$$

De plus, si $\partial\Omega \in C^2$ et $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors on aboutit à l'inégalité suivante :

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (v, \psi_i)^2 \lambda_i^2 \leqslant C\|v\|_2^2,$$

(à voir par exemple [2]).

La solution généralisée définie par les conditions 1°–3°, s'exprime par la série

$$(5) \qquad u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}(g, \psi_i)\psi_i.$$

2. Le problème semi-discret. La première étape consiste dans la discrétisation du problème (1) se rapportant à la variable t, utilisant un schéma implicite aux différences finies. Dans ce but, pour $N \in \mathbf{N}$ déjà connu, posons $k = T/N$ et $u^n(x) = u(x, nk)$, $n = \overline{0, N}$. Si on remplace la dérivée par rapport à la variable t, par un quotient aux différences régressives, on définit une solution approximative $u_k^n = u_k^n(x)$, $n = \overline{1, N}$, $u_k^0 = g$, par les conditions suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} u_k^n \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ (u_k^n, v) + k(\nabla u_k^n, \nabla v) = (u_k^{n-1}, v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On vérifie aisément que la solution du problème (6) s'exprime par la série suivante :

$$u_k^n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 + k\lambda_i)^{-1}(u_k^{n-1}, \psi_i)\psi_i,$$

et d'une manière récursive, on obtient

$$(7) \qquad u_k^n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 + k\lambda_i)^{-n}(g, \psi_i)\psi_i.$$

Lemme 2.1. *Il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$(8) \qquad |(1 + \tau)^{-n} - e^{-n\tau}| < C\tau, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

pour tout $\tau > 0$.

Théorème 2.1. *Si $\partial\Omega \in C^2$ et $g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$(9) \qquad \|u^n - u_k^n\| \leqslant Ck\|g\|_2, \qquad \forall n = \overline{0, N}.$$

Démonstration. Compte tenu des (3), (4), (5), (7), et (8), on obtient successivement :

$$\|u^n - u_k^n\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} (e^{-\lambda_i nk} - (1 + k\lambda_i)^{-n})(g, \psi_i)\psi_i\right\| =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |e^{-\lambda_i nk} - (1 + k\lambda_i)^{-n}|^2 (g, \psi_i)^2\right)^{1/2} \leqslant Ck\left(\sum_{i=1}^{\infty} (g, \psi_i)^2 \lambda_i^2\right)^{1/2} \leqslant Ck\|g\|_2.$$

3. Le problème discret. La deuxième étape consiste dans la discrétisation du problème (6) relativement à la variable x, en employant la méthode des éléments finis. Dans ce but on établit d'abord plusieurs faits : Considérons

$$a(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to R,$$

définie par

$$a(w, v) = (w, v) + k(\nabla w, \nabla v) \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega), \qquad \forall \ \in H_0^1(\Omega).$$

La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définit sur $H_0^1(\Omega)$ un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_a = a(\cdot, \cdot)$, qui induit sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_a$: $\|v\|_a = (v, v)_a^{1/2}$. Compte tenu de la double inégalité

$$(10) \qquad \min(1, k)\|v\|_1^2 \leqslant v\|_a^2 \leqslant \max(1, k)\|v\|_1^2,$$

il résulte que l'espace $H_a = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_a}$ coïncide avec l'espace $H_0^1(\Omega)$. De plus, pour tout $n = \overline{0, N}$ on a

$$|(u_k^n, v)| \leqslant \|u_k^n\|_a \|v\| \leqslant \|u_k^n\| \|v\| \leqslant (\min(1, k))^{-1/2} \|u_k^n\|_a \|v\|_a,$$

donc $(u_k^n, .)$ est un élément de H_a', l'espace dual de H_a.

On formule de nouveau les données du problème (6), par les conditions : $u_k^0 = g$ et pour tout $n = \overline{1, N}$,

$$(11) \qquad \begin{cases} u_k^n \in H_a \text{ tel que} \\ (u_k^n, v)_a = (u_k^{n-1}, v), \quad \forall v \in H_a. \end{cases}$$

On considère V_h un sous-espace à diménsion finie de $H_0^1(\Omega) = H_a$, ayant la propriété suivante :

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \ \exists P_h v \in V_h \text{ tel que} \\ &\|v - P_h v\|_j \leqslant C h^{2-j} \|v\|_2, \qquad j = 0, 1 \end{aligned}$$

(P_h est l'opérateur d'interpolation sur l'espace V_h).

La réalisation de V_h et ses propriétés d'interpolation sont obtenues par la méthode des éléments finis (à voir par exemple [1]).

C'est maintenant qu'on peut définir une nouvelle solution approximative, par les conditions suivantes : $\bar{u}_{kh}^0 = P_h g$ et pour $n = \overline{1, N}$

$$(13) \qquad \begin{cases} \bar{u}_{kh}^n \in V_h \text{ tel que} \\ (\bar{u}_{kh}^n, v_h)_a = (u_k^{n-1}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases}$$

ces conditions résultant à la suite de discrétisation, relativement à la variable x, de la suite de problèmes donnés par (11).

L'existence et l'unicité de la solution du problème (11) (du problème (13)) résultent par le théorème de Riesz dans l'espace de Hilbert H_a (l'espace de Hilbert V_h).

Théoréme 3.1. *Si* $\partial\Omega \in C^2$ *et* $g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *alors on a*

$$(14) \qquad \|u_k^n - \bar{u}_{kh}^n\|_a^2 \leqslant C h^2 (h^2 + k) \|g\|_2^2, \qquad \forall n = \overline{0, N}.$$

Démonstration. Compte tenu du fait que le produit scalaire $(.,.)_a$ est continu et coercif sur l'espace H_a, si on applique le lemme de Céa, il résulte :

$$\|u_k^n - u_{kh}^n\|_a \leqslant \inf_{v_h \in V_h} \|u_k^n - v_h\|_a^2 \leqslant \|u_k^n - P_h u_k^n\| .$$

Vu les conditions de l'énoncé du théorème, les propriétés suivantes de régularité pour la solution u_k^n sont réalisées :

$$(15) \qquad \begin{cases} \text{(i)} \quad u_k^n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \text{(ii)} \quad \|u_k^n\|_2 \leqslant C \|\Delta u_k^n\|. \end{cases}$$

(à voir par exemple [2]).

De (7), (12), (15) il résulte donc :

$$\|u_k^n - \bar{u}_{kh}^n\|_a^2 \leqslant \|u_k^n - P_h u_k^n\|^2 + k \|u_k^n - P_h u_k^n\|_1^2 \leqslant C h^2 (h^2 + k) \|u_k^n\|_2^2,$$

$$\|u_k^n\|_2^2 \leqslant C \|\Delta u_k^n\|^2 = C \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 (u_k^n, \psi_i)^2 = C \sum_{i=1}^{\infty} (1 + k\lambda_i)^{-n} (g, \psi_i)^2 \lambda_i^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} (g, \psi_i)^2 \lambda_i^2 \leqslant C \|g\|_2^2,$$

et par suite de ces deux inégalités on a

$$\|u_k^n - \bar{u}_k^n\|_a^2 \leqslant C h^2 (h^2 + k) \|g\|_2^2.$$

4. L'estimation de l'erreur. On met en évidence ces problèmes :

$$(16) \qquad (u_k^n, v)_a = (u_k^{n-1}, v) \qquad \forall v \in H_a,$$

$$(17) \qquad (u_{kh}^n, v_h)_a = (u_k^{n-1}, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h,$$

$$(18) \qquad (u_{kh}^n, v_h)_a = (u_{kh}^{n-1}, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h,$$

où $\bar{u}_{kh}^0 = g$, $u_{kh}^0 = P_h g$, $u_k^0 = g$, $n = \overline{1, N}$.

On remarque aussi que le problème (18) est le seul qui ait une résolution numérique.

Théorème 4.1. *Si* $\partial\Omega \in C^2$, $g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $h^2 \leqslant c_0 k$, *alors on a*

$$(19) \qquad \|u^n - u_{kh}^n\| \leqslant C(h + k) \|g\|_2.$$

Démonstration. Puisque $V_h \subset H_a$, il résulte des (16) et (17) la relation suivante :

$$(u_k^n - \bar{u}_{kh}^n, v_h)_a = 0 \qquad \forall v_h \in V_h.$$

C'est une relation qui nous permet d'établir l'égalité :

$$(20) \qquad \|u_k^n - u_{kh}^n\|_a^2 = \|u_k^n - \bar{u}_{kh}^n\|_a^2 + \|\bar{u}_{kh}^n - u_{kh}^n\|_a^2.$$

Des (17) et (18), on a

$$\|\bar{u}_{kh}^n - u_{kh}^n\|_a^2 = (\bar{u}_{kh}^n - u_{kh}^n, u_k^{n-1} - u_{kh}^{n-1}) \leqslant \|\bar{u}_{kh}^n - u_{kh}^n\|_a \|u_k^{n-1} - u_{kh}^{n-1}\|_a.$$

Compte tenu du Théorème 3.1, on obtient

$$\|u_k^n - u_{kh}^n\|_a^2 \leqslant \|u_k^{n-1} - u_{kh}^{n-1}\|_a^2 + C h^2 (h^2 + k) \|g\|_2^2.$$

Récursivement, on en conclut

$$\|u_k^n - u_{kh}^n\|_a^2 \leqslant n C h^2 (h^2 + k) \|g\|_2^2 + \|g - P_h g\|_a^2 \leqslant (n + 1) C h^2 (h^2 + k) \|g\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant (c_0 + 1)(n + 1) k C h^2 \|g\|_2^2 \leqslant T C h^2 \|g\|_2^2 = C h^2 \|g\|_2^2.$$

Finalement on aura donc

$$\|u_k^n - u_{kh}^n\| \leqslant C h \|g\|_2.$$

En vertu du Théorème 2.1, on obtient l'estimation suivante :

$$\|u^n - u^n_{kh}\| \leq C(h+k)\|g\|_2.$$

REFERENCES

1. Ciarlet P.G. — *The finite element method for elliptic problems*, Amsterdam, North Holland 1979.
2. Mikhaïlov, V. — *Equations aux dérivées partielles*, 1980.
3. Zlamal, M. — *Finite element methods for parabolic equations*, 1974.
4. Dincă, G. — *Metode variaţionale şi aplicatii*, 1980.

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

A CONNECTION BETWEEN THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF ANALYTICAL MECHANICS AND THE CONCEPTS OF PROBABILITY AND ENTROPY

BY

NICOLAS IONESCU-PALLAS and LIVIU SOFONEA

To the memory of Professor Mendel Haimovici

The great efficiency of variational methods in entering upon the problems of analytical mechanics determined some scientists (among them being Louis de Broglie as well) to look for a relationship between the minimal action principle and the entropy principle. In other words, a trial was made to correlate the physical phenomenon, of selecting the real trajectory Γ from the family of virtual paths $\Gamma^{(virt)}$, to the reaching of a maximal probability.

On the same line, we propose a model for enlightening this connection.

a) Let us consider, in this respect, a point-like body moving in the space dimension q, during the time interval between the instants (s_1, s_2), $(s_2 > s_1)$. We divide the duration $(s_2 - s_1)$ in a great number N of identical, elementary intervals, so that

$$N = \frac{s_2 - s_1}{\delta s} \tag{1}$$

and assume that $\mathcal{L}(q, dq/ds, s)$ is a characteristic function of the motion, in a sense which will appear clear in the forthcoming considerations.

b) We put forward the hypothesis according to which the probability of a small departure ε in the q direction, with respect to the real trajectory Γ, during the interval δs, centred around the instant s_0, is given by the expression

$$p(q, \varepsilon) = 1 - k\,[L(q+\varepsilon) - L(q)]\,\frac{\delta s}{s_2 - s_1} \tag{2}$$

where $\varepsilon = \varepsilon(s)$, and K is a constant. The probability that a derogation $\varepsilon(s)$ occurs throughout the interval $s_1 \leq s \leq s_2$ obviously will be given by the multiplication rule

$$P(s_1, s_2, \varepsilon) = \Pi\, p(q, \varepsilon) = \Pi \left\{ 1 - k\,[L(q+\varepsilon) - L(q)]\,\frac{\delta s}{s_2 - s_1} \right\} \tag{3}$$

$$= e^{-\frac{k}{s_2 - s_1}\int_{s_1}^{s_2} [L(q+\varepsilon) - L(q)]\,ds}$$