Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

L'ETUDE D'UN PROBLEME DU TYPE TRICOMI AU CAS DES MOUVEMENTS TRANSSONIQUES

PAR

MIRCEA LUPU

Dédié à la mémoire du Professeur Mendel Haimovici

§1. On considère le mouvement plan, permanent, adiabatique et irrotationnel d'un fluide compressible isentropique s'écoulant par un ajutage à deux vitesses caractéristiques (fig. 1). La vitesse du fluide à l'infini amont est $\tilde{v}_1$; il s'écoule entre les deux plaques parallèles (AB), $(A'B')$ et ensuite rencontre deux autres plaques (BC), $(B'C')$ inclinées (symétriquement) formant l'angle $\pm\mu$ avec l'axe OX (axe de symétrie) selon le système d'axes choisi dans la figure 1. Le fluide sort de cet ajutage en s'écoulant à lignes libres émanant des points C et C'.

La loi du fluide compressible isentropique est de la forme

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \tag{1.1}$$

où γ est la constante adiabatique et ρ_0 et p_0 sont respectivement la densité et la pression dans le point de vitesse nulle.

En passant dans le plan hodographique (θ, τ) où θ est l'angle de la vitesse $\vec{V}$ avec l'àxe OX et

$$\tau^2 = \frac{\gamma-1}{2}\frac{V^2}{C_0^2} \tag{1.2}$$

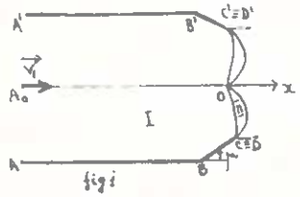
et C_0 est la vitesse du son dans les points de vitesse nulle, l'équation fondamentale de Tchapliguine [1] pour la fonction de courant est

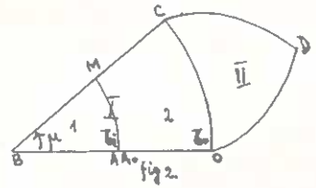
$$4\tau^2(1-\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + [1-(2\beta+1)\tau]\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{1.3}$$

où $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ et $\beta = \dfrac{1}{\gamma-1}$.

Au cas où la vitesse du fluide est égale à la vitesse du son, d'après (2), τ devient τ critique $= \tau_* = \dfrac{1}{2\beta+1}$. Le domaine de mouvement où $0 \leqslant \tau < \tau_*$ correspond à un régime de mouvement subsonique et l'équation (3) est du type elliptique ; le domaine pour lequel $\tau_* < \tau < 1$ correspond au régime de mouvement supersonique et l'équation (3) est du type hyperbolique. Les deux domaines peuvent être séparés par une courbe (ligne sonique) sur laquel-

le $\tau=\tau_*$ (l'équation (3) est parabolique). De tels mouvements où la vitesse passe par des valeurs critiques s'appellent des mouvements transsoniques [2].





Pour le mouvement du fluide de l'ajutage considéré on distingue donc les régimes de mouvement suivants :

a) si la pression extérieure au récipient (pression atmosphérique) est supérieure à la pression critique p_* (correspondant à τ_*) le mouvement est subsonique. Dans ce cas aussi le problème a été résolu par C. Jacob [3] par la méthode hodographique Tchaplyguine-Jacob-Falkovitch ($T-J-F$). Pour $\mu=\frac{\pi}{2}$ on obtient le problème étudié par S. V. Falkovitch [4]. Si à une distance finie sur l'axe OX de CC' les lignes libres doivent se raccorder à un canal formé de deux plaques parallèles à l'axe OX on obtient le problème étudie par Simona Popp [6].

b) si la pression sur les lignes libres (sur lesquelles la vitesse est critique $\tau=\tau_*$) est p_* alors a lieu le phénomène de convergence du jet auquel nous allons revenir en §3 [15].

c) si la pression extérieure (sur les lignes libres) est inférieure à p_* le régime de mouvement est transsonique, c'est-à-dire à l'intérieur du récipient le mouvement est subsonique et le jet aura un mouvement supersonique (détente), le flux par CC' étant maximal — les deux régimes de mouvement seront séparés par la ligne sonique réunissant les points CC' (fig. 1). On étudie par la suite les cas c) et b).

On adopte de Frankl [7] la correspondance du mouvement du plan physique au plan hodographique comme dans la figure 2. On remarque qu'au domaine du mouvement subsonique situé à la gauche de la ligne sonique CC' du plan physique correspond dans le plan $(\theta\tau)$ un secteur circulaire de rayon $\tau=\tau_*$ et d'ouverture 2μ. Le mouvement étant symétrique on se rapporte par la suite au demi-plan inférieur ; ainsi, par les points O et C du plan hodographique passent les courbes caractéristiques de familles différents s'intersectant en D où $\theta=\mu/2$ et $\tau=\tau_D$ (ce qui sera déterminé).

En intégrant l'équation des caractéristiques associée à l'équation hyperbolique 1.3 (pour $\tau_*<\tau<1$) on obtient deux familles d'épicycloïdes [5]

$$\theta \pm f(\lambda) = \text{const. où} \tag{1.4}$$

$$f(\lambda) = h \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{h^2-\lambda^2}} - \operatorname{arctg} h \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{h^2-\lambda^2}}, \quad \lambda=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\tau, \quad h^2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \tag{1.5}$$

Dans le plan physique, à la caractéristique OD correspond la courbe OD où D coïncide à C, et la caractéristique CD se réduit dans le plan physique aux points $C\equiv D$; la dernière caractéristique est justifiée [2] par le fait que, sur BC et sur la caractéristique CD, $\psi=-Q/2$ et $d\varphi=0$ donc sur CD, φ = const. également ; par le passage au plan physique, (φ, ψ), à CD correspond un point $C\equiv D$.

On se propose donc de résoudre le problème à la limite pour la fonction $\psi(\theta, \tau)$ dans le domaine du plan hodographique délimité par $BODCB$; on note par Q le débit total du fluide passant par AA', et alors pour $\psi(\theta, \tau)$ sont données les suivantes valeurs sur la frontière.

$$\psi=-\frac{Q}{2}, \quad 0<\tau<\tau_1, \quad \theta=0 \quad (AB), \tag{1.6}$$

$$\psi=-\frac{Q}{2}, \quad 0<\tau<\tau_*, \quad \theta=\mu \quad (BC, C\equiv D). \tag{1.7}$$

$$\psi=0, \quad \tau_1<\tau<\tau_*, \quad \theta=0 \quad (A_0O). \tag{1.8}$$

$$\psi=-\frac{Q}{2}, \quad \theta+f(\lambda)=\mu, \quad \mu/2\leqslant\theta\leqslant\mu \quad (CD). \tag{1.9}$$

La condition (1.9) est donnée sur la caractéristique CD ; la condition similaire sur la caractéristique $C'D'$ d'équation $\theta-f(\lambda)=-\mu$, $\theta\in[-\mu\,;\,\mu/2$ sera $\psi=\frac{Q}{2}$. L'équation de la caractéristique OD est $\theta-f(\lambda)=0$; si l'on y fait $\theta=\mu/2$ on obtient l'équation $f(\lambda)=\frac{\mu}{2}$ d'où on trouve τ_D.

Dans le plan hodographique du domaine I délimité par $BOCB$ l'équation (3) est elliptique, dans le domaine II $ODCO$ est du type hyperbolique et sur OC (la ligne sonique) — du type parabolique. En analysant cette situation, pour déterminer la fonction $\psi(\theta, \tau)$ on est amené au problème à la limite du type Tricomi suivant [2] pour l'équation du type mixte dans le domaine de mouvement : Déterminer la solution $\psi(\theta, \tau)$ de l'équation (3) dans le domaine $BODCB$ qui satisfait aux conditions de régularité, en connaissant pour ψ les valeurs données (6—8) sur la frontière du domaine elliptique (OBC) et la valeur sur une caractéristique (CD) délimitant une partie du domaine hyperbolique.

Dans le domaine à la droite de la frontière COD on aura pour $\psi(\theta, \tau)$ des problèmes du type hyperbolique susceptibles d'être résolus par la méthode des caractéristiques [2].

Pour résoudre le problème Tricomi on applique la méthode hodographique $T-J-F$: on détermine la solution pour le domaine I et on la prolonge analytiquement dans le domaine II.

Les études menées par C. Jacob [2] et L. Bers [8] montrent que ces prolongements peuvent être effectués (pour les problèmes du type Kirchoff [12]) lorsque sur la frontière de raccordement on a des singularités simples (le passage des lignes de courant par ces points s'effectue de façon continue, sans à-coups — il n'y a pas d'ondes de choc en C et C'). A la vi-

tesse $\bar{V}_1$ correspondra l'arc MAM' de rayon τ_1 ; le domaine I a donc été partagé en deux régions, 1 et 2. On cherchera, d'après C. Jacob [3], la solution pour les régions 1 et 2, de la forme

$$\psi_1 = -\frac{Q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z(\tau, \lambda_n) \sin \frac{n\pi\theta}{\mu}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$$

(1.10)

$$\psi_2 = -\frac{Q\theta}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n Z(\tau, \lambda_n) + B_n Z(\tau, -\lambda_n)] \sin \frac{n\pi\theta}{\mu}, \quad \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$$

où $Z(\tau, \lambda_n)$, $Z(\tau, -\lambda_n)$ sont les fonctions spéciales de Tchapliguine [1] pour l'équation (3) et les valeurs propres sont $\lambda_n = \frac{n\pi}{2\mu}$, $n = 1, 2, 3...$ La solution ψ_2 étant le prolongement analytique de ψ_1, alors sur la ligne (AM), $\tau = \tau_1$ on a les conditions de raccordement

(1.11)

$$\psi_1(\theta, \tau_1) = \psi_2(\theta, \tau_1) \; ; \; \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau_1} = \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau_1}$$

Le choix et de ψ_1 de ψ_2 de (10) vérifie les conditions (6—8) ; on prolonge ψ_2 dans le domaine II de sorte que la condition (9) sur la caractéristique soit vérifiée. Pour déterminer les coefficients a_n, A_n, B_n on se sert des relations (1.11) et (1.9) ; à partir des relations (1.11) il résulte le système

(1.12)

$$(A_n - a_n) Z(\tau_1, \lambda_n) + B_n Z(\tau_1, -\lambda_n) = -\frac{Q}{n\pi}$$

$$(A_n - a_n) Z'(\tau_1, \lambda_n) + B_n Z'(\tau_1, -\lambda_n) = 0.$$

En résolvant ce système on obtient

(1.13)

$$B_n = \frac{Q}{n\pi} \frac{Z'(\tau_1, \lambda_n)}{W(\tau_1)}, \quad a_n = A_n - \frac{Q\mu}{n^2\pi^2} \cdot \frac{\tau_1 Z'(\tau_1, -\lambda_n)}{(1-\tau_1)^\beta}$$

où le wronskien des fonctions de Tchapliguine [5]

$$W[Z(\tau_1, \lambda_n), Z(\tau_1, -\lambda_n)] = -\frac{n\pi}{\mu} \frac{(1-\tau_1)^\beta}{\tau_1}.$$

Pour déterminer les coefficients A_n on pose la condition (9) sur la caractéristique (CD), $\theta = \mu - f(\lambda)$ et on obtient

(1.14)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} A_n Z(\tau, \lambda_n) \sin \frac{n\pi f(\lambda)}{\mu} = \frac{Qf(\lambda)}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} Q}{n\pi} \times$$

$$\times \frac{Z'(\tau, \lambda_n) Z(\tau, -\lambda_n)}{W(\tau_1)} \sin \frac{n\pi f(\lambda)}{\mu} \; ; \quad \tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau_D.$$

On partage l'intervalle $[\tau_*, \tau_D]$ en sous-intervalles en prenant j noeuds. τ_k, $k = 1 \ldots j$; $j = 1, 2, \ldots$ et pour chaque valeur τ_k remplacée en (1.14) on aura une équation, en obtenant de la sorte le système algébrique infini, linéaire et non-homogène pour les inconnues de A_n

(1.15)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} A_n Z(\tau_k, \lambda_n) \sin \frac{n\pi f_k}{\mu} = \frac{Qf_k}{2\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \times$$

$$\times \frac{Z'(\tau_1, \lambda_n) Z(\tau_k, -\lambda_n)}{w(\tau_1)} \sin \frac{n\pi f_k}{\mu} \; ;$$

où $f[\lambda(\tau_k)] = f_k$.

Conformément à la théorie générale [2] et également aux travaux de Frankl [9] et Aslanov [10] sur les fonctions de Tchapliguine, pour $\tau_k \geqslant \tau_*$, les coefficients $A_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$; il en résulte qu'on peut appliquer au système (1.15) la méthode de la réduction : il suffit de résoudre un nombre fini d'équations aux inconnues A_n ; en choisissant un grand nombre de noeuds la solution exacte s'obtient lorsque $j \to \infty$. Pour $\mu = \frac{\pi}{2}$ on obtient les résultats de Guchine [11] pour le problème étudié en transonique au cas de l'ajutage de S.V. Falkovitch [4].

§2. On déterminera par la suite le coefficient de débit ε qui se définit en tant que rapport entre le flux réel du gaz s'écoulant par l'ouverture (AA'), $\rho_1 Q$ et le flux maximal s'écoulant par l'ouverture (COC'), $2\,|Y_{max}|\,\rho_* C_*$.

(2.1)

$$\varepsilon = \rho_1 Q \, 2\,|Y_{max}|\,\rho_* C_*,$$

où ρ_1 est la densité correspondant à la vitesse $\bar{V}_1$ et $2\,|Y_{max}|$ est l'ouverture maximum de l'ajutage, en employant

(2.2.)

$$\rho_* = \rho_0 (1-\tau_*)^\beta, \quad \rho_1 = \rho_0 (1-\tau_1)^\beta, \quad C_* = C_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

Afin de déterminer Y_{max} on se sert des formules de passage au plan physique

(2.3)

$$x = \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v} \int_0^\theta \left(2\tau \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \cos\theta - \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \sin\theta \right) d\theta + x_0$$

$$y = \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v} \int_0^\theta \left(2\tau \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \sin\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \cos\theta \right) d\theta + y_0,$$

où, dans notre cas, x_0, y_0 sont nuls, représentant les coordonnées de O.

Dans ces formules, afin d'obtenir une convergence plus rapide dans la solution ψ_2 on se servira de l'asymptotique donnée par Frankl [9] et Aslanov [10] des fonctions de Tchapliguine dans le voisinage du centre O de l'ajutage.

Ainsi, pour les coefficients A_n de (1.10) (1.13) et pour ψ_2 on aura la représentation suivante :

(2.4)

$$\psi_2 \frac{2\mu}{Q} = -\theta + \alpha_0 \psi_2^0 + \delta\psi_2 \text{ où}$$

$$\psi_2^0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z(\tau, \lambda_n)}{Z(\tau, \lambda_n)} \sin \frac{n\pi\theta}{\mu}, \tag{2.5}$$

$$\delta\psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \frac{Z(\tau_*, \lambda_n)}{Z(\tau_*, \lambda_n)} - \frac{\mu^2 \tau_1}{2\pi^2 (1-\tau_1)^\beta} \cdot \frac{Z'(\tau_1, \lambda_n) Z(\tau, -\lambda_n)}{n^2} \right\} \sin \frac{n\pi\theta}{\mu}. \tag{2.6}$$

Donc, au lieu des coefficients A_n on détermine les coefficients α_0, α_n, $n = 1, 2 \ldots$, en posant la condition (1.9) ; ainsi, en (2.4) pour $\psi = -\frac{Q}{2}$ et $\theta = \mu - f(\lambda)$, $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau_D$ on obtient de la même manière un système algébriquement infini, linéaire et non-homogène pour α_0, α_n similaire à (1.14). En considérant les noeuds τ_0, $\tau_* = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_j = \tau_0$ on obtient le système similaire à (1.15) pour lequel on applique la méthode de la réduction, ayant une convergence plus rapide.

Pour le calcul de Y_{max} on se sert de la relation (2.3) et au moyen d'une intégration par parties sur OC, en considérant qu'en C on a $\theta = \mu$, $\tau = \tau_*$ on aura

$$Y_{max} = \frac{Q}{2\mu} \frac{(1-\tau_*)^{-\beta}}{C_*} \left\{ \int_0^\mu \left[\frac{4\mu\tau_*}{Q} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\tau_*} \sin\theta + \psi(\tau_*) \sin\theta \right] d\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{2\mu}{Q} \psi(\mu, \tau_*) \cos\mu \right\}. \tag{2.7}$$

En considérant $\psi(0, \tau)$ après (2.4) avec (2.2) on obtient

$$\varepsilon = \frac{\mu(1-\tau_1)^\beta}{|I_1 + 2\tau_* I_2 + I_0|} \tag{2.8}$$

où le dénominateur représente les trois termes de (2.7.) ; après calcul on aura :

$$I_1 + 2\tau_* I_2 + I_0 = -\sin\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_0}{n^{4/3}} + \alpha_n - \frac{\mu^2 \tau_1 Z'(\tau_1, \lambda_n) Z(\tau_*, -\lambda_n)}{2n^2\pi^2(1-\tau_1)^\beta} + \right.$$
$$+ \frac{\alpha_0 \pi x_n(\tau_*)}{\mu n^{1/3}} + \frac{\alpha_n n\pi x_n(\tau_*)}{\mu} - \tag{2.9}$$
$$\left. - \frac{\mu^2 \tau_1 \tau_*}{n^2\pi^2(1-\tau_1)^\beta} Z'(\tau_1, \lambda_n) Z'(\tau_*, -\lambda_n) \right\} \frac{(-1)^{n-1} n\pi\mu \sin\mu}{n^2\pi^2 - \mu^2}$$

où $x_n(\tau) = \frac{\tau Z'}{\lambda_n Z}$.

Pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, et en remplaçant $Z(\tau_*, -\lambda_n)$ correspondant à la fonction de Cherry [16] on obtient avec (2.9) en (2.8) le coefficient de débit calculé par Guchine [11].

Le coefficient de débit ε peut s'exprimer en fonction du rapport des deux ouvertures $\frac{AA'}{cc'} = \frac{L}{l}$; ainsi, de l'évaluation du débit à l'infini amont

$L = \frac{Q}{2C_n\sqrt{2\beta\tau_1}}$ et de la relation (2.7), (2.8), en déterminant $|Y_{max}|_* = l = \frac{Q \cdot |I_1 + 2\tau_* I_2 + I_0|}{2\mu C_*(1-\tau_*)^\beta}$ on obtient de (2.1)

$$\varepsilon = \frac{L}{l} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\tau_1} \cdot \left(\frac{1-\tau_1}{\lambda-\tau_*} \right)^\beta. \tag{2.12}$$

La ligne sonique représente le lieu géométrique des points où $\tau = \tau_*$; pour déterminer cette courbe on utilise (2.3.) avec (2.4) et on obtient pour le demi-plan inférieur la forme paramétrique

$$x(\theta) = \frac{(1-\tau_*)^{-\beta}}{V_*} \left\{ \int_\mu^\theta \left[2\tau \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} + \psi_2 \Big|_{\tau=\tau_*} \cos\theta d\theta - \psi_2(\theta, \tau_*) \sin\theta - \frac{Q}{2} \sin\mu \right\} \right.$$
$$y(\theta) = \frac{(1-\tau_*)^{-\beta}}{V_*} \left\{ \int_0^\theta \left[2\tau \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} + \psi_2 \Big|_{\tau=\tau_*} \sin\theta d\theta + \psi_2(\theta, \tau_*) \cos\theta \right\} \right. \tag{2.13}$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant \mu$; les intégrales sont en rapport avec θ et se calculent immédiatement.

§3. Dans ce paragraphe on étudiera le phénomène de convergence du jet à la vitesse critique, signalé en § 1 *b*. Ainsi, si sur les lignes libres la vitesse est V_* et la pression p_*, à partir d'une distance finie de l'orifice de l'ajutage CC', les particules fluides sont en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{V}_*$; donc le lieu géométrique des points à partir desquels on a ce mouvement uniforme est une ligne droite (ligne de passage) perpendiculaire à l'axe de symétrie. On déterminera la distance $L(\mu, \tau_*)$ à laquelle se trouve la ligne de passage.

Dans ce cas, le système de Tchapliguine devient [12]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\frac{\tau_n - \tau}{2\tau_*\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{3.1}$$

et la formule de passage au plan physique est

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{V_*} [d\varphi + i(1-\tau_*)^\beta d\psi]. \tag{3.2}$$

De la relation (3.2), en nous situant sur une ligne de courant, on aura

$$dx = \frac{\cos\theta}{V_*} \frac{2\tau_*}{(1-\tau_*)^\beta} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\Big|_{\tau=\tau_*} d\theta. \tag{3.3}$$

Pour la fonction de courant on se servira de la solution (1.10) pour la région 2, $\psi_2(\theta, \tau)$ où, d'après les résultats de C. Jacob [3] dans le cas du mouvement subsonique on remplace, $\tau_2 = \tau_*$ et on a

$$(3.4)\quad A_n = \frac{1}{Z(\tau_*, \lambda_n)}\left[-\frac{Q}{n\pi} - \frac{Q}{n\pi}\frac{Z'(\tau_1, \lambda_n)Z(\tau_*, -\lambda_n)}{W(\tau_1)}\right]; \quad B_n = \frac{Q}{n\pi}\frac{Z'(\tau_1, \lambda_n)}{W(\tau_1)}.$$

Pour ce cas-là, dans la relation (3.3.) on calcule $\frac{\partial \psi_2}{\partial \tau}$ avec (3.4.); en intégrant par la suite (3.3) de O à $L(\mu, \tau_*)$ et après θ de μ à O on obtient

$$(3.5)\quad \begin{aligned} L(\mu, \tau_*) = \frac{Q}{V_*(1-\tau_*)^\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^{n-1}\cos\mu + 1\}\cdot \\ \cdot\left[x_n(\tau_*) - x_n(\tau_1)\frac{Z(\tau_1, \lambda_n)}{Z(\tau_*, \lambda_n)}\left(\frac{1-\tau_*}{1-\tau_1}\right)^\beta\right]\frac{n\pi}{n^2\pi^2 - \mu^2}. \end{aligned}$$

En évaluant par la suite le débit à l'infini aval où le jet est large de L_∞ on obtient de (3.5).

$$(3.6)\quad \begin{aligned} L(\mu, \tau_*) = L_\infty \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{n^2\pi^2 - \mu^2}[(-1)^{n-1}\cos\mu + 1]\times \\ \times\left[X(\tau_*) - X(\tau_1)\frac{Z(\tau_1, \lambda_n)}{Z(\tau^*, \lambda_n)}\left(\frac{1-\tau_*}{1-\tau_1}\right)^\beta\right]. \end{aligned}$$

Par la mise à profit des nouvelles propriétés des functions de Tchapliguine étudiées par C. Jacob [2] on peut faire des délimitations au cas des calculs numériques pour la ligne de passage (3.6).

Si $\mu = \frac{\pi}{2}$ alors de (3.6) on a le résultat obtenu par Aslanov et Legkova [13] pour l'ajutage de Falkovitch. Egalement, toujours de (3.6) lorsque $\tau_1 \to 0$ pour l'ajutage à une seule vitesse critique de C. Jacob [2] on a le résultat obtenu par Galina Camenski [14].

BIBLIOGRAPHIE

1. Tchapliguine, S. A. — *Oeuvres complètes*, Moscou, 1948, 2, 19—138.
2. Jacob, C. — *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest, Paris, 1959.
3. Jacob, C. — *Archiwum Mech. Stosow.* 14, 3/4, 603—619 (1962).
4. Falkovich, S. V. — Prikl. Mat. Mekh. 21, 459—464 (1957).
5. Popp Simona — *Leçons de dynamique des gaz*. Bucarest 1979 (roum).
6. Popp Simona — Rev. Roum. Math. pures appl. 9, 3—11 (1966).
7. Frankl, F. I. — Izv. Acad. nauk U.R.S.S. 9, 121—143 (1945).
8. Bers, L. — *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics* (New York, London, 1958).
9. Frankl, F. I. — Dokl. Acad. nauk. U.R.S.S. LVIII, 5, 1947.
10. Aslanov, S. K. — Prikl. Mat. Mekh. 21, 297—302 (1957).
11. Guchin, B. A. — Prikl. Mat. Mekh. 23, 770—776 (1959).
12. Lupu, M. — Studii şi cercetări matematice, 2, 25, 285—308, Bucureşti (1973).
13. Aslanov, S. K., Legkova, V. A. — Prikl. Mat. Mekh. 23, 190—193 (1959).
14. Camenschi Galina — Studii şi cerc. mat. 19, 7, 957—962, Bucureşti (1967).
15. Sedov, L. I. — *Ploskie zadaci ghidrodinamiki i aerodinamiki*. M—L 1950.
16. Cherry, T. M. — Proc. Royal. Soc. 191, 45—79 (1947).

Faculté de Mathématiques
Université de Braşov
2200—Braşov, R. S. Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

ON THE BENDING OF MICROPOLAR PLATES RESTED ON A VINKLER FOUNDATION

BY

A. MANOLACHI

To the memory of Professor Mendel Haimovici

In this paper we present an introductory study concerning the linear bending of a thin micropolar plate rested on an elastic foundation of Vinkler type. In the first part we establish the form of the general solution of equilibrium equations. In the second part we consider the small deflections of an infinite plate acted upon by a concentrated force.

The field equations used in this analysis are those from the papers [2, 4].

I. 1. Statement of the problem. Consider a thin elastic micropolar plate of constant thickness $2h$ in equilibrium under a given system of external loads acting on the lateral surfaces, $x_3 = \pm h$.

In the absence of extensional deformations paralel to the median plane, the differential equations governing the small deflections of an isotropic thin micropolar plate are:

$$D\Delta\Delta w - 8\alpha h\Delta w - 8\alpha h(\varphi_{2,1} - \varphi_{1,2}) = p(x_1, x_2),$$

$$A\Delta\varphi_\rho + B\varphi_{3,3\rho} + 8\alpha h(\varepsilon_{\rho\delta}w_\delta - \varphi_\rho) = -q_\rho(x_1, x_2), \quad \rho = 1, 2.$$

$$(I.1.1)\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \varphi_{2,1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, \ldots,$$

$$D = \frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}, \quad D' = \frac{2h\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}, \quad A = \frac{D'(1-\nu)}{2} + \varepsilon_1, \quad B = \frac{D'(1+\nu)}{2} - \varepsilon_1,$$

where w is the deflection function, φ_ρ are the components of the local rotation vector (microrotation); E, ν, α, $\bar{E}$, $\bar{\nu}$, ε_1 — the material coefficients, p and q_ρ — the external normal force and tangential couples respectively acting on the lateral plate surfaces.

When the plate rests on an elatic foundation the superficial loads can be decomposed into two parts, [5, 6]:

$$(I.1.2)\quad \begin{aligned} p(x_1, x_2) &= P(x_1, x_2) + p^*(x_1, x_2), \\ q_\rho(x_1, x_2) &= Q(x_1, x_2) + q_\rho^*(x_1, x_2), \end{aligned}$$

in which, P and Q_ρ are given loads at the surface, $x_3 = +h$, p^* and q_ρ being the normal force and tangential couples appearing as reactions due to the intime contact between the plate and foundation.