Let $\vec{w}$ be a vector field along f_0 which defines an one parametrical family of morphisms $(f_0)_t$ such that for $t=t_0$ we have $(f_0)_{t_0}=f_0$. Every morphism is defined by

$$(f_0)_t(x) = \exp^{\wedge}_{f_0(x)} t\vec{w}(x) \text{ for any } x \in M.$$

By using (8) and derivations of mappings, we find the pull-back of restrictions $\mathrm{Im}(f_0)$ of g' and ∇' expressed by

$$(9) \qquad j(f_0^* g') = \bar{g} \qquad j({}^*_0\nabla') = \bar{\nabla}$$
$$j[(f_{0t}^* g')] = g(t) \qquad j[(f_0^*)_t \nabla'] = \nabla(t).$$

All these geometrical objects are defined on $\pi_0(\mathrm{Im}(j))$. If f_0 is a diffeomorphism on Riemannian spaces then the new objects are defined on the whole manifold (M, g).

Remark. Since the Riemannian bundle are endowed with pairs of metrics (g, γ) and corresponding with pairs of operators of derivations (∇, D), from (8) written first for tangent bundles and then for Riemannian bundles, we can get the pull-backs of such pairs of geometrical objects and operators.

We pay more attention to the comorphism from (9) of the tangent bundle to M' and obtain that the deformation of the Riemannian structure and of the Levi-Civita connection along a morphism is just a finite variation or respectively an infinitesimal variation of them on (M, g) or on a domain of it. In other words, the deformations of morphism of Riemannian manifolds (bundles) are reduced to finite variations or infinitesimal variations of the metric (pairs of metrics) and of the connection for which the metric is invariant (of the pairs of derivations operators induced for which the pairs of metrics are invariant). For this reason we can use the derivation operators induced by these metrics. Such a study has been done in [3].

Final remark. It appears as necessity the study of special Riemannian morphisms: immersions, submersions, transversality to a submanifold $N \subset M'$, embeddings, diffeomorphisms. The study sketched before could be useful to some problems on the stability of morphisms. Finally, one can try to bring together by classifications of f_0-morphisms some characteristics of subsets $\mathrm{Im}\, f_0 \subset M'$ and $\pi o j(f_0^*\ (\mathrm{Im}\, f_0)) \subset M$.

REFERENCES

1. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V. — *Varietăţi diferentiabile finit şi infinit dimensionale*. Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, I(1976), II(1979).
2. Gheorghiev, Gh. — *Sur les vecteurs et les distributions de Killing et leurs extensions*. An. şt. Univ. Iaşi 26 (1980), 103—116.
3. Gheorghiev, Gh. — *Despre difeomorfisme infinitezimale speciale legate de structuri riemanniene. Aplicaţii la medii continue*. Memoriile sect. şt. Acad. R.S.R. IV (1981).
4. Gheorghiev, Gh. — *Sur les G-structures classiques et leurs déformations*. Tensor (Japan) (a paraître).
5. Müller, C.H., Timpe, A. — *Die Grundgleichungen der Mathematischen Elastizitätstheorie*. Encyklopädie der Math. Wiss. B. IV, B. Teubner Leipzig, 1907—1914.
6. Noll, W. — *The equations of finite elasticity*. American Math. Soc., 1965, 93—101.
7. Truesdell, C., Noll, W. — *The nonlinear fields theories of mechanics*. Handbuch der Physik, III$_3$, Springer, Berlin, 1965.
8. Truesdell, C. — *Six lectures on modern natural philosophy*, Springer, New York, 1966.

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
6600—Iaşi, R.S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

GÉOMÉTRIES NON-CLASSIQUES ET PRÉ-RELATIVISTES CAPABLES DE DECRIRE LA PHÉNOMENALITÉ RELATIVISTE
II. LE FORMALISME COMPLEX VECTORIEL

PAR

NICOLAS IONESCO-PALLAS et LIVIU SOFONEA

Dédié à la mémoire du Professeur Mendel Haimovici

§ 1. **La géométrie de Plücker-Cayley et le formalisme complex-vectoriel.** En 1868—1869 J. Plücker et A. Cayley ont introduit en géométrie la notion de coordonée de ligne, associée aux coordonnées tetrahédrales de deux points sur une ligne droite, dont on attache quatre nombres; les coordonnées tetrahédrales $P_1(x_0, x_1, x_2, x_3)$; $P_2(y_0, y_1, y_2, y_3)$. Les coordonnées de ligne de la droite D sont définies par

$$(1) \qquad p_{mn} = (x_m y_n - x_n y_m)\ ;\ (n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Les coordonnées p_{mn} ont une signification purement géometrique, mais par leur construction se recommandent comme des éléments d'une représentation 4-dimensionelle. On considère la transformation suivante $\hat{T}_{PC}$ qui s'applique sur les $\{x_1\}$ ainsi que sur les $\{p_{mn}\}$:

$$(2) \qquad x_0 = x_0' \operatorname{ch}\alpha + x_1' \operatorname{sh}\alpha, \quad x_2 = x_2', \quad x_1 = x_1' \operatorname{ch}\alpha + x_0' \operatorname{sh}\alpha, \quad x_3 = x_3'$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} p_{01} &= x_0 y_1 - x_1 y_0 = (x_0' \operatorname{ch}\alpha + x_1' \operatorname{sh}\alpha)(y_1' \operatorname{ch}\alpha + y_0' \operatorname{sh}\alpha) - \\ &- (x_1' \operatorname{ch}\alpha + x_0' \operatorname{sh}\alpha)(y_0' \operatorname{ch}\alpha + y_1' \operatorname{sh}\alpha = x_0' y_1' - x_1' y_0' = p_{01}', \\ p_{02} &= p_{02}' \operatorname{ch}\alpha + p_{12}' \operatorname{sh}\alpha\ ; \quad p_{03} = p_{03}' \operatorname{ch}\alpha - p_{31}' \operatorname{sh}\alpha\ ; \\ p_{31} &= p_{31}' \operatorname{ch}\alpha - p_{03}' \operatorname{sh}\alpha\ ; \quad p_{12} = p_{12}' \operatorname{ch}\alpha + p_{02}' \operatorname{sh}\alpha\ ; \quad p_{23} = p_{23}'. \end{aligned}$$

Un ensamble de six grandeurs, qui se transforment par rapport à $\hat{T}_{PC}$ comme les coordonnées de ligne, forme un 6-vecteur (le caractère vectoriel se justifie *à posteriori*). L'invariant introduit par $\hat{T}_{PC}$ est

$$(4) \qquad I_1 = (p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2) - (p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2).$$

Les coordonnées de ligne (p_{mn}: réeles) sont associées, d'une manière organique, au grandeurs complexes

$$(5) \qquad Q_1 = p_{01} + i p_{23},\ Q_2 = p_{02} + i p_{31},\ Q_3 = p_{03} + i p_{12},$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \{(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2) - (p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2\} \\ &+ 2i\{p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12}\} = I_1 + 2iI_2\ ;\ (I_{10} I_2 - \text{invariants}). \end{aligned}$$

Les Q_K sont les vecteurs complexes (Q-vecteurs) qui se transforment par rapport à $\hat{T}_{PC}$ de la manière suivante

$$Q_1 = Q'_1,\ Q_2 = (p'_{02} + ip'_{31})\ \mathrm{ch}\ \alpha + (p'_{12} - ip'_{03})\ \mathrm{sh}\ \alpha = Q'_2\ \mathrm{ch}\ \alpha - iQ'_3\ \mathrm{sh}\ \alpha,$$
$$Q_3 = (p'_{03} + ip'_{12})\ \mathrm{ch}\ \alpha - (p'_{31} - ip'_{02})\ \mathrm{sh}\ \alpha = Q'_3\ \mathrm{ch}\ \alpha + iQ'_2\ \mathrm{sh}\ \alpha. \tag{7}$$

Cette transformation 4-dimensionelle prend, pour des diférentes valeurs de l'angle α, des formes concrètes qui correspondent à des importantes situations géométriques-cinématiques

A) $\hat{T}_{PC}$ est la rotation plane $\hat{R}_2(\alpha = i\xi,\ \mathrm{ch}\ \alpha = \cos\xi,\ \mathrm{sh}\ \alpha = i\sin\xi)$

$$Q_1 = Q'_1,\ Q_2 = Q'_2 \cos\xi + Q'_3 \sin\xi,\ Q_3 = Q'_3 \cos\xi - Q'_2 \sin\xi. \tag{8}$$

B) $\hat{T}_{PC}$ est la rotation en l'espace $\hat{R}_3$ (de vecteur $\vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$)

$$\hat{R}_3 = \{\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\ ;\ |\vec{\omega}| = \mathrm{tg}\ \xi\ ;\ \vec{\omega} \| Ox_1 \| \vec{k}_1\},$$
$$Q_1 = Q'_1,\ Q_2 = (1+\omega^2)^{-1/2}(Q'_2 + \omega Q'_3),\ Q_3 = (1+\omega^2)^{-1/2}(Q'_3 - \omega Q'_2),$$
$$Q_1\vec{k}_1 = \frac{(\vec{Q}\cdot\vec{\omega})}{|\vec{\omega}|}\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{(\vec{Q}\cdot\vec{\omega})\vec{\omega}}{\vec{\omega}^2}, \tag{9}$$

$$(Q_1\vec{k}_1 + Q_2\vec{k}_2 + Q_3\vec{k}_3) = Q_1\vec{k}_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\vec{\omega}^2}}\{(Q'_2 + \omega Q'_3)\vec{k}_2 + (Q'_3 - \omega Q'_2)\vec{k}_3\},$$
$$\vec{Q} = \eta\{\vec{Q}' - (\vec{\omega}\times\vec{Q}') + \frac{\eta}{1+\eta}(\vec{Q}\cdot\vec{\omega})\vec{\omega}\},\ \eta = (1+\vec{\omega}^2)^{-1/2}. \tag{10}$$

C) *Comportement sous l'inversion spatiale de $\vec{Q}$.* On admet que l'entité $\vec{Q}$ conserve son caractère de symétrie par rapport aux reflexions des axes, (la conservation de la parité spatiale ; L'existence des caractères de parité spécifiques et conservatifs pour les composantes), ce qui oblige que le vecteur $\vec{\omega}$ ne change pas son signe à $\vec{I}_{(r)}$ (pseudovecteur), propriété correspondant aux attributs de vecteur de rotation.

D) *$\hat{T}_{PC}$ est la transformation Lorentz-Poincaré (LP)* (4-rotation imaginaire).

$$\xi = \frac{1}{i}\alpha,\ \omega = \mathrm{tg}\ \xi = \frac{1}{i}\mathrm{th}\ \alpha = \frac{1}{i}\beta\ ;$$
$$\alpha = i\xi = i\ \mathrm{arc\ tg}\ \omega = i\ \mathrm{arc\ tg}\ (\beta/i) = \mathrm{arc\ th}\ \beta. \tag{11}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{i}\vec{\beta},\ \eta = (1 - \vec{\beta}^2)^{-1/2} \equiv \gamma,\ \beta = \mathrm{th}\ \alpha.$$
$$\vec{Q} = \gamma\{\vec{Q}' + i(\vec{\beta}\times\vec{Q}') - \frac{\gamma}{1+\gamma}(\vec{Q}'\vec{\beta})\vec{\beta}\},\ \gamma \equiv (1 - \vec{\beta}^2)^{-1/2}. \tag{12}$$

Dans ces circonstances formelles, qui sont propres à représenter des situations physiques (rotation imaginaire ; la présence du γ si caractéristique pour les transformations d'inertie), le comportement par rapport aux $\hat{T}_{PC}$ tridimensionnelles des (Q_j), ainsi que des coordonnées tétrahédrales (x_i), est spécifique

$$\vec{Q}_K = F\{\vec{Q}, \eta, \vec{\omega}\},\ \vec{Q}_{PC} = F\left\{\vec{Q}, \gamma, \frac{1}{i}\vec{\beta}\right\}. \tag{13}$$

$$I_1 = (\mathcal{R}e\vec{Q})^2 - (\mathcal{I}m\vec{Q})^2,\ I_2 = (\mathcal{R}e\vec{Q})(\mathcal{I}m\vec{Q}). \tag{14}$$

ou, par composantes,

$$\mathcal{R}e\vec{Q} \equiv \vec{\mathcal{E}} = p_{01}\vec{k}_1 + p_{02}\vec{k}_2 + p_{03}\vec{k}_3,\ \mathcal{I}m\vec{Q} \equiv \vec{\mathcal{H}} = p_{23}\vec{k}_1 + p_{31}\vec{k}_2 + p_{12}\vec{k}_3\ ; \tag{15}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_K = \eta\left\{\vec{\mathcal{E}} - (\vec{\omega}\times\vec{\mathcal{E}}) + \frac{\eta}{\eta+1}(\vec{\omega}\cdot\vec{\mathcal{E}})\vec{\omega}\right\},\ \vec{\mathcal{H}}_K = \eta\left\{\vec{\mathcal{H}} - (\vec{\omega}\times\vec{\mathcal{H}}) + \frac{\eta}{\eta+1}(\vec{\omega}\cdot\vec{\mathcal{H}})\vec{\omega}\right\}; \tag{16}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{PC} = \gamma\left\{\vec{\mathcal{E}} - (\vec{\beta}\times\vec{\mathcal{H}}) + \frac{\gamma}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{\mathcal{E}})\vec{\beta}\right\},$$
$$\vec{\mathcal{H}}_{PC} = \gamma\left\{\vec{\mathcal{H}} + (\vec{\beta}\times\vec{\mathcal{E}}) + \frac{\gamma}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{\mathcal{H}})\vec{\beta}\right\}; \tag{17}$$

$$I_1 = \vec{\mathcal{E}}^2 - \vec{\mathcal{H}}^2,\ I_2 = \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{H}} \tag{18}$$

$$(X_0)_{PC} = (1-\beta^2)^{-1/2}(X_0 + \beta X_1),\ (X_1)_{PC} = (1-\beta^2)^{-1/2}(X_1 + \beta X_0),$$
$$(X_2)_{PC} = X_2,\ (X_3)_{PC} = X_3 \tag{19}$$

$$I_{PC} = [X_0^2 - (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)]_{PC} = [X_0^2 - (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)] \tag{20}$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3)_{PC} \equiv [\mathrm{ct}, (x, y, z)_{E_3}] \tag{21}$$

La séparation spécifique des entités complexes vectorielles en parties imaginaire et réelle, le caractère global de $\{Q_j\}$, la forme concrète de la transformation des composantes $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}})$, ou bien des $\{x_j\}$, suggèrent l'analogie avec les composantes physiques du champ électromagnétique. Cette analogie n'est pas supperficielle, mais au contraire elle accède aux profondeurs [1], [2].

Si on identifie le sous-espace de Plücker-Cayley $(x_1, x_2, x_3)_{PC}$ avec l'espace euclidien 3-dimensionel $(x, y, z)_{E_3}$ et on considère la quatrième coordonnée de $\{x\}$ comme étant indépendente de (x, y, z) et ayant une nature specifique (ce qui correspond aux rapports entre les coordonnées spatiale et temporelle), la forme lorentzienne de $\hat{T}_{PC}$ a été „standardisée" du point de vue physique.

a) La transformation $x' = T_{LC}x$ a la forme de la transformation de Lorentz-Poincaré $x' = \hat{A}x$; b) La conservation des caractères de variance des entités formelles par rapport à la reflexion $\hat{I}_r$, à la suite d'un $\hat{T}_{PC}$, impose, pour le paramètre $\vec{\beta}$ de celle-ci, le même caractère que pour le set (x, y, z), de la sorte que $\vec{\beta}$ est un ortho-vecteur (3-vecteur euclidien). Dans ces circonstances, la géometrie de Plücker-Cayley $\mathcal{G}_{PC}$ peut servir comme cadre représentatif pour la formalisation des phénomènes physiques relativistes [1, 2].

D) *$\hat{T}_{PC}$-infinitésimale et $\hat{T}_{LP}$-infinitésimale.* La transformation $\hat{T}_{PC}$-infiniment lente des coordonnées de ligne reçoit, par la notation (21), une signification cinématique explicite. L'imposition de la transitivité de la transformation $(\vec{Q}_0 \to \vec{Q}' \to \vec{Q}'') \to (\vec{Q}_0 \to \vec{Q}'')$ conduit à la loi relativiste de composition des vitesses. On a

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_0 \delta \vec{V}, \quad t = t_0 + \frac{1}{c^2} \vec{r}_0 \cdot \delta \vec{V} . \tag{22}$$

$$\vec{Q} = \gamma \left\{ \vec{Q}_0 + i\vec{\beta} \times \vec{Q}_0 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{(\vec{Q}_0 \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \right. , \tag{23}$$

$$\vec{Q}_0 = Q_0 \vec{j}, \ \vec{\beta} = \frac{V}{c} \vec{k} \ \ \vec{Q}_0 \to \vec{Q}_0' \equiv \vec{Q}_1, \ \vec{Q}_0' = \gamma Q_0 (\vec{j} - i\beta_1 \vec{i}) \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \vec{Q}_0' \to \vec{Q}_0'' \equiv \vec{Q}_2, \ \vec{Q}_0'' = \gamma_2 \{ \gamma_1 Q_0 (\vec{j} - i\beta_1 \vec{i}) + i\gamma_1 Q_0 \beta_2 \vec{k} \times (\vec{j} - i\beta_1 \vec{i}) \} = \\ \gamma_1 \gamma_2 Q_0 \{ (\vec{j} - i\beta_1 \vec{i}) + i\beta_2 (-\vec{i} - i\beta_1 \vec{j}) \} = \gamma_1 \gamma_2 Q_0 \{ (1 + \beta_1 \beta_2) \vec{j} - \\ - i(\beta_1 + \beta_2) \vec{i} \} \equiv \gamma_{12} Q_0 (\vec{j} - i\beta_{12} \vec{i}), \end{gathered} \tag{24'}$$

$$\gamma_{12} = (1 - \beta_{12}^2)^{-1/2}, \quad \beta_{12} = \beta_1 + \beta_2 / 1 + \beta_1 \beta_2, \tag{25}$$

$$(1 + \beta_1 \beta_2)(1 - \beta_1^2)^{-1/2} (1 - \beta_2^2)^{-1/2} \equiv \{ 1 - \beta_1 + \beta_2 / 1 + \beta_1 \beta_2)^2 \}^{-1/2},$$

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 + i\delta \vec{q} \times \vec{Q}_0, \quad \delta \vec{q} = \frac{1}{c} \delta \vec{V} + i\delta \vec{\omega} . \tag{26}$$

Les lois de la mécanique relativiste, ainsi que celles de l'électrodynamique et d'autres théories physiques comparables, peuvent, de cette manière, s'exprimer à l'aide de ce formalisme [1, 2].

§. 2. La liaison entre les Q-vecteurs et let 4-tenseurs minkowskiens (notamment avec celui anti-simétrique de second rang).

L'entité tensorielle $\mathcal{T}_{\alpha\beta} = -\mathcal{T}_{\beta\alpha}$ est définie dans l'univers représentatif, où la forme $ds^2 = dx_\mu dx^\mu (\mu = 1, \ldots, 4)$ reste invariante par rapport aux transformations d'inertie $(x^\mu = (\vec{r} \, ; \, ict))$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \gamma \vec{V} t_0 + (\gamma - 1)(\vec{V}\vec{r}_0)\vec{V}/\vec{V}^2 \tag{27}$$

$$t = \gamma (t_0 + 1/c^2 \vec{V}\vec{r}_0), \quad \gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} \tag{27'}$$

Entre Q et $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ il y a la liaison (E.A. Kramers)

$$\vec{Q} = \vec{U} + i\vec{U}, \ \vec{U} = \frac{1}{i} (\vec{i} T_{14} + \vec{j} T_{24} + \vec{k} T_{34}), \quad \vec{U} = (\vec{i} T_{32} + \vec{j} T_{13} + \vec{k} T_{21}) \tag{28}$$

qui est organique, car toutes les composantes distinctes de $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ se retrouvent en $\vec{Q}$ et les autres s'obtiennent de celles-ci grâce à l'anti-symétrie de $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$, de sorte que $\vec{Q}$ caractérise complètement le tenseur $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$. La loi de transformation de $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$, par rapport aux changements des repères d'inertie, est

$$\begin{gathered} \hat{\Lambda} \Leftrightarrow \Lambda_\beta^\alpha, \ (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4), \ \Lambda_j^i = \delta_j^i + (\gamma - 1) V^i V_j / \vec{V}^2, \\ \Lambda_4^i = \gamma / ic V^i, \ \Lambda_i^4 = -\gamma / ic V_i, \ \Lambda_4^4 = \gamma, \ (i, j = 1, 2, 3). \end{gathered} \tag{29}$$

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \mathcal{T}_{\mu\nu}^0 . \tag{30}$$

Les invariants de Lorentz de $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ s'expriment par les invariants de Plcüker et Cayley de $\vec{Q} : \vec{Q}^2, \vec{Q} \cdot \vec{V}_{\text{relative}}$.

Les vecteurs complexes se composent entre eux en respectant quelques règles algébriques ; elles sont les suivantes :

a) *La transformation infinitésimale*

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 + i\delta \vec{q} \times \vec{Q}_0, \quad \delta \vec{q} = 1/c \, \delta \vec{V} + i\delta \vec{\omega}. \tag{31}$$

($\delta \vec{q}$ est lui aussi un $\vec{Q}$-vecteur, parceque $\delta \vec{V}$ et $\delta \vec{\omega}$ forment un tenseur asymétrique).

b) *La somme algébrique des deux $\vec{Q}$-vecteurs est elle aussi un $\vec{Q}$-vecteur.*

c) *Le produit „exterieur"* :

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q}_{01} + i\delta \vec{q} \times \vec{Q}_{01}, \quad \vec{Q}_2 = \vec{Q}_{02} + i\delta \vec{q} \times \vec{Q}_{02}, \Rightarrow \tag{32}$$

$$\vec{Q} \equiv \vec{Q}_1 \times \vec{Q}_2 = (\vec{Q}_{01} \times \vec{Q}_{02}) + i\delta \vec{q} \times (\vec{Q}_{01} \times \vec{Q}_{02}). \tag{33}$$

d) *Le produit scalaire* : (34) $S = \vec{Q}_1 \cdot \vec{Q}_2 = \vec{Q}_{01} \vec{Q}_{02}$

e) *Parité spatiale.* L'opération de reflexion $\vec{Q}$ suivie de la conjugaison complexe $\vec{Q}^*$, amène à (35) $\mathring{\vec{Q}} = \Lambda \vec{Q}^*, \quad \Lambda = e^{i2\theta}$,
où θ este une grandeur réelle arbitraire (facteur de phase). Donc $\mathring{\vec{Q}}^*$ a la même loi de transformation infinitésimale que $\vec{Q}$; donc

$$\mathring{\vec{Q}} = \hat{\mathcal{P}} \vec{Q}, \quad \mathring{\vec{Q}}^* = \hat{\mathcal{P}}^* \vec{Q}^*, \quad (36') \quad \Rightarrow \hat{\mathcal{P}}^* \hat{\mathcal{P}} \vec{Q} = \Lambda \mathring{\vec{Q}}^*, \quad \Lambda^* \Lambda = 1. \tag{36}$$

Le comportement, à la reflexion, des Q-vecteurs est caractérisé par la parité spatiale $\hat{\mathcal{P}} \equiv p^*$. La séparation des états de parité du vecteur est mise en évidence par une transformation qui, en préservant le module, réalise cette discrimination. La transformation (d'„intéret physique", car elle conserve l'„intensité" du champ Q et, en même temps, distingue ses états de parité [2]) se fait par

$$Q_R = f(\theta) Q, \quad f^*(\theta) f(\theta) = 1, \quad \mathring{\vec{Q}}_R = -\vec{Q}_R^*. \tag{37}$$

restrictions qui déterminent, d'une manière unique, la fonction de phase

$$f(\theta) = ie^{-1/2 i\theta}. \tag{38}$$

La transformation cherchée des vecteurs complexes Q s'exprime ainsi par deux transformations qui s'appliquent aux composantes :

$$\vec{\mathcal{U}} \equiv \vec{U}_R = \sin \frac{\theta}{2} \vec{U} - \cos \frac{\theta}{2} \vec{U}, \quad \vec{\mathcal{X}} \equiv \vec{U}_R = \sin \frac{\theta}{2} \vec{U} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{U}. \tag{39}$$

Parceque la grandeur $\vec{Q}_R$ se transforme d'une manière spécifique par rapport à une reflexion des coordonnées [2], il r'sulte que $\vec{\mathcal{E}}$ est un vecteur polaire (ortho-vecteur) et $\vec{\mathcal{H}}$ un vecteur axial (pseudo-vecteur). On peut exprimer la transformation aussi bien par les composantes $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}})$ que par les tenseurs anti-symétriques.

$$(40) \qquad \mathcal{T}_{\alpha\beta}(R) = \left\{ \sin\frac{\theta}{2}\,\delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta} + \frac{1}{2}\,i\cos\frac{\theta}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \right\} \mathcal{T}_{\mu\nu} = \mathcal{T}_{\alpha\beta}\sin\frac{\theta}{2} + \tilde{\mathcal{T}}_{\alpha\beta}\cos\frac{\theta}{2}$$

(δ^{μ}_{α}, $\varepsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Kroeneker et de Levi Civita ; tilda exprime la dualité tensorielle; R indique la séparation des états de parité). $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ étant lui aussi un tenseur anti-symétrique et la liaison (28) étant générale, il en résulte que la nature de Q_R est celle d'un Q-vecteur.

f) *La parité temporelle des Q-vecteurs.* La transformation des vecteurs par rapport à l'inversion du sens d'écoulement du temps se fait d'une manière similaire avec celle qui correspond à l'inversion du sens des axes. (Donc par (39)). Le comportement des Q-vecteurs par rapport à la reversion temporelle est caractérisé par la parité temporelle $P \equiv P^T$. Ainsi, si avec deux 4-vecteurs $(\vec{A}, iQ_A)$ et $(\vec{B}, iQ_B)$ on forme l'entité complexe $\vec{Q} = Q_B\vec{A} - Q_A\vec{B} - i(\vec{A}\times\vec{B})$ et, au changement de l'orientation du temps, (Q_A, Q_B) change de signe tandis que $(\vec{A}, \vec{B})$ restent non changés (de sorte que l'effet de la reversion temporelle est $Q^T = -Q$, alors elle est similaire à la reflexion spatiale. Le comportement des $\vec{Q}$-vecteurs, par rapport à la reversion temporelle, est imposé par le trait spécifique de la matrice de Lorentz, car appliquant la transformation d'inertie au 4-vecteur position-instant $x^{\alpha} \to \Lambda^{\alpha}_{\lambda} x^{\lambda}$ et dans l'étape suivante effectuant sur le résultat l'opération de reversion-temporelle et comparant les expressions (inversée et originelle) on obtient $(\Lambda^{\alpha}_{\beta})^T = (\Lambda^{\alpha}_{\beta})^*$ et les propriétés (29) de la transformation de Lorentz montrent que la conjugaison complexe et la reflexion spatiale $(V^i \to -V^i)$ ont les mêmes effects sur la matrice Λ^{α}_{β}. Ainsi, à un facteur de phase près, qui reste indéterminé, $-Q$ et Q^T sont identiques ; pour les ortho Q-vecteurs $\vec{\mathcal{E}} + i\vec{\mathcal{H}}$ le facteur est $+1$, pour les pseudo Q-vecteurs il est -1. Les effects de la reversion spatiale et temporelle étant formellement les mêmes, le Q-vecteur reste invariant aussi par rapport à leur produit $\hat{T}\hat{P} = \odot$ (41); donc il reste invariant à la reflexion de l'Univers

$$(41) \qquad \overset{\odot}{\vec{Q}} = \vec{Q}$$

§.3. La structure des entités complexes vectorielles Lorentz-covariantes et la représentation des situations physiques. Les propriétés des entités complexes Q montrent que ces agrégations formelles (réalisées par l'intermédiaire du nombre $i = \sqrt{-1}$, qui introduit une algèbre spécifique) ont un visible, mais spécifique, caractère vectoriel :

a) Par l'intermédiaire de l'unité imaginaire, une synthèse se réalise entre les entités vectorielles $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}})$ qui ne sont pas quand même complètement identiques ; ces entités sont, purement et simplement, attachées, mais elles fusionnent dans l'entité Q-vectorielle.

b) La grandeur Q se comporte envers R_3 comme un vecteur euclidien.

c) Les entités complexes Q ne sont pas, quand même, des simples vecteurs euclidiens, parce qu'elles sont, en même temps, impliquées aussi dans $\hat{T}_{PC}$ (dans sa forme particulière, „physique" : $\beta = \mathrm{th}\alpha$).

d) Les propriétés d'invariance de ces entités sont, de cette manière, déterminées par (I_1, I_2), et l'entité Q, (3-dimensionelle) est mise dans une certaine correspondance avec les quatre coordonées x_1, x_2, x_3, x_0 qui ont une interprétation spatio-temporelle adéquate.

Ces propriétés de Q-vecteurs ont permis de présenter les lois de base de l'électrodynamique classique, covariantes dans un language qui utilise ces 3-vecteurs rapportés aux repères cartesiens, donc qui s'expriment dans une représentation explicitement 3-dimensionnelle [1]. On peut également utiliser une représantation intrinséque des propriétés quantiques de la lumière dans les termes des Q-vecteurs, ce qui apporte quelques bénéfices épistémologiques et méthodologiques [2].

e) *Le caractère dynamique des 3-vecteurs complexes.* Par leurs propriétes formelles, les Q-vecteurs se présentent comme des entités capables de représenter, d'une manière adéquate, la dynamique des quelques formations physiques. Les entités peuvent représenter cette dynamique si on donne quelques structures différentielles formées avec ces entités. Ces structures sont

$$(42) \qquad \underset{\text{(Div.)}}{\Sigma_1 = \nabla\ldots}, \quad \underset{\text{(Curb.)}}{\Sigma_2 = \nabla x\ldots}, \quad \underset{\text{(Time deriv.)}}{\Sigma_3 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\ldots}$$

Elles sont nécessaires et suffisantes pour déterminer la dynamique des Q-vecteurs : elles caractèrisent la configuration géometrique du champ (son caractère turbionaire, ses sources : la nature spatiale) ainsi que sa cinématique (la nature temporelle). Pour édifier la dynamique des 3-vecteurs complexes, nous considérons des entités Q avec leurs caractères de parité déjà séparés explicitement $(\vec{Q} = \vec{U} + i\vec{U})$ et leurs structures spécifiques $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ organisées de manière à engendrer des équations Lorentz-covariantes. On admet aussi l'assertion conventionelle suivante : *la dynamique d'un Q-vecteur à signification physique est decrite par des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre* (principe de superposition : thèorie classique, ou quantique des champs). La voie la plus simple d'obtenir pareilles équations des champs est l'assemblage des grandeurs caractéristiques du champ dans un 4-vecteur

$$(43) \qquad Z^{\alpha} = \left\{ c_1\nabla\times\vec{Q} + c_2\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t},\ \nabla\vec{Q} \right\} \equiv \{\vec{Z}, Z_4\}.$$

Les coefficients (C_1, C_2) sont déterminés par la condition que Z^{α} soit un 4-vecteur par rapport à $\hat{T}_{(L)}$ (Z^{α} se transforme comme $(\vec{r}\,;\,t)$ de (22)).

On obtient

$$Z^\alpha = \left(\frac{i}{c}\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} - \nabla \times \vec{Q},\quad \nabla \vec{Q}\right). \tag{44}$$

Le 4-vecteur complexe se décompose dans un ortho-vecteur $\mathcal{T}^\alpha$ et un pseudo-vecteur $\widetilde{\mathcal{Q}}^\alpha$.

$$Z^\alpha = -i\mathcal{F}^\alpha + \widetilde{\mathcal{Q}}^\alpha \tag{45}$$

$$\mathcal{F}^\alpha = \left(+\nabla \times \vec{U} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t},\quad i\nabla \vec{U}\right) \quad \mathcal{Q}^\alpha = \left(-\nabla \times \vec{U} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\tilde{U}}}{\partial t},\quad i\nabla \vec{\tilde{U}}\right). \tag{46}$$

Les composantes de la décomposition sont significatives, car on constate leur caractère conservatif

$$\mathcal{F}^\alpha_{,\alpha} = 0, \quad \widetilde{\mathcal{Q}}^\alpha_{,\alpha} = 0. \tag{47}$$

Les équations d'évolution des Q s'expriment par des relations à caractère conservatif des composantes

$$\mathcal{F}^\alpha - \mathcal{J}^\alpha = 0, \quad \widetilde{\mathcal{Q}}^\alpha - \widetilde{\mathcal{J}}^\alpha = 0. \tag{48}$$

($\mathcal{J}^\alpha, \widetilde{\mathcal{J}}^\alpha$ sont des 4-vecteurs conservatifs qui expriment les densités des sources des composantes). Aux composantes $\vec{U}$, $\vec{\tilde{U}}$ on peut associer les grandeurs [liées au concept de force]

$$f^\alpha = (+\vec{p} \times \vec{\tilde{U}} + q\vec{U},\quad i\vec{p}\,\vec{U}),\quad g^\alpha = (-\vec{p} \times \vec{U} + q\vec{\tilde{U}},\quad i\vec{p}\,\vec{\tilde{U}}) \tag{49}$$

qui proviennent de $\mathcal{F}^\alpha$, $\widetilde{\mathcal{Q}}^\alpha$ par la substitution formelle $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \vec{p}_\alpha \equiv (\vec{p}, iq)$ qui ne change pas le caractère de la variance. Le formalisme des Q-vecteurs se montre, de cette manière, capable de donner un modèle mathématique approprié pour décrire quelques situations physiques remarquables.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ionesco-Pallas, N. Sofonea L. — *La compatibilité des représentations relativistes du champ électromagnetique*. Studii şi Cercet. de Fiz. Ed. Acad. R.S.R. Bucarest, nr. 9, t. 24, 1972.
2. Ionescu-Pallas N., Sofonea L. — *The invariant structure of the photon*. Revue Roum. de Phys. nr. 4, 1977.
3. Ionesco-Pallas N., Sofonea L. — *Géométrisation des théories physiques. Le formalisme complex-vectoriel*. Dans les travaux du colloque national de Géometrie et Topologie, Timişoara, 19 Roumanie, 1977.
4. Sofonea L., Ionescu-Pallas N. — *Géométries non classiques et prérelativistes capables de décrire la phenomenalité relativiste*. VI-em Congrès des mathematiciens d'expression latine, section Géometrie Topologie, Luxembourg, 7—12 sept., 1981.

Centre National de Physique
Bucharest, R.S. Roumanie

Université de Braşov
Braşov, R.S. Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

FINSLER GEOMETRY ON VECTOR BUNDLES

BY

FRANCISC C. KLEPP

To the memory of Professor Mendel Haimovici

The notion of Finsler bundle and its properties have been given by M. Matsumoto [1]. The purpose of the present paper is to introduce the concept, called *Finsler vector bundle* associated to a pair of vector bundles, and to define a Finsler connection, using this Finsler vector bundle. If the pair of vector bundles is a pair of tangent bundles, we obtain the results of M. Matsumoto. Another particular case is studied by D. Opriş [3]. In the following we find the curvature of a Finsler connection on a Finsler vector bundle. The notations and terminology are those of M. Matsumoto [1] with few modifications.

§ 1. **The Finsler vector bundle associated to a pair of vector bundles.** Let $\pi_1 : E_1 \to M$ and $\pi_2 : E_2 \to M$ be two vector bundles over a differentiable n-manifold M, having the vector spaces $\mathbb{R}^{m_1}$ and $\mathbb{R}^{m_2}$ respectively as standard fibres.

Definition 1.1. *A Finsler vector bundle associated to the vector bundles* $\pi_i : E_i \to M (i = 1, 2)$ *is the induced bundle* $\pi : F = \pi_1^* E_2 \to E_1$.

The standard fibre of the bundle $\pi : F \to E_1$ is the same as the standard fibre of the bundle $\pi_2 : E_2 \to M$. Let $(\pi_1!, \pi_1)$ be the canonical morphism of $\pi : F \to E_1$ and $\pi_2 : E_2 \to M$. The exact sequence of vector bundles, associated to the Finsler vector bundle $\pi : F \to E_1$, is

$$0 \to VF \xrightarrow{i} TF \xrightarrow{j} FX_{E_1}TE_1 \to 0. \tag{1.1}$$

A map of $\pi : F \to E_1$ obtained by the trivialisation $\pi_1^{-1}(U) = \widetilde{U}_1$ of $\pi_1 : E_1 \to M$, is $(\widetilde{U}_1, \varphi)$, where φ is the diffeomorphism $\varphi : \pi^{-1}(\widetilde{U}_1) \to \widetilde{U}_1 \times \mathbb{R}^{m_2}$.

$$\begin{tikzcd}
F = \pi_1^* E_2 \arrow[r, "\pi_1 !"] \arrow[d, "\pi"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
E_1 \arrow[r, "\pi_1"'] & M
\end{tikzcd}$$